



# НОВІ ЗАСОБИ КІБЕРНЕТИКИ, ІНФОРМАТИКИ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Е.Г. РЕВУНОВА

УДК 004.942+623.454.862

## КРИТЕРИИ ВЫБОРА ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ И СЛУЧАЙНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

**Аннотация.** Разработаны критерии для определения оптимального числа компонент линейной модели при решении дискретной некорректной задачи методами усеченного сингулярного разложения и случайного проецирования. Для этого исследовано поведение зависимостей ошибки вектора решения и ошибки восстановления вектора правой части от размерности модели и их минимумов. Проведено также экспериментальное исследование разработанных критериев.

**Ключевые слова:** дискретная некорректная задача, усеченное сингулярное разложение, случайное проецирование, критерии выбора модели.

### ВВЕДЕНИЕ

Решение некорректных задач актуально для многих областей науки и техники. Дискретные некорректные задачи (ДНЗ) возникают, например, при дискретизации интегральных уравнений в спектрометрии, гравиметрии, магнитометрии, электроразведке и др. [1–3].

Известно, что решение ДНЗ как задачи наименьших квадратов является неустойчивым: малым изменениям в векторе измерений соответствуют большие изменения в векторе решения, при этом велико значение ошибки решения. Для преодоления неустойчивости и, следовательно, повышения точности решения используют методы регуляризации.

Один из подходов регуляризации [4, 5] состоит в том, что функционал метода наименьших квадратов дополняют ограничением нормы вектора параметров, взвешенным параметром регуляризации [5]. Недостатками этого подхода являются высокая вычислительная сложность, а также использование методов определения значения параметра регуляризации, которые зачастую не обеспечивают высокой точности. Другой подход состоит в том, что исходные данные представляют линейной моделью, оптимальный подбор числа членов которой обеспечивает устойчивость решения. Для подбора можно использовать критерии выбора модели (КВМ), построенные на различных принципах [6–8]. Однако разработка критериев, учитывающих специфику методов решения ДНЗ, обеспечивает повышение точности решения.

Так, для уменьшения вычислительной сложности решения ДНЗ предложен метод [9–17], использующий случайное проецирование [18, 19], которое является разновидностью методов формирования нейросетевых распределенных представлений [20–28]. Однако для этого метода решения ДНЗ не имеется специали-

© Е.Г. Ревунова, 2016

зированной критерия выбора модели. Для получения решения ДНЗ на основе усеченного сингулярного разложения в [29] используют методы выбора параметра регуляризации Тихонова, что снижает точность решения.

Данная статья посвящена разработке и исследованию критериев выбора модели для определения оптимального числа ее компонент для решения ДНЗ методом усеченного сингулярного разложения и случайным проецированием.

#### ПОСТРОЕНИЕ КВМ ДЛЯ ДНЗ

Во многих практических приложениях преобразование сигнала описывается линейной моделью вида

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{y}, \quad (1)$$

где известны матрица  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  и вектор измерений  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^N$ , искаженный аддитивным шумом  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^N$ :  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$  (зашумленный вектор измерений),  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — вектор шума, компоненты которого являются реализациями независимых случайных величин с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ ,  $\mathbf{y}_0$  — незашумленный вектор измерений. Требуется оценить вектор сигнала  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ .

Оценку сигнала  $\mathbf{x}$  на основе псевдообращения  $\mathbf{A}$  получают как  $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$ , где  $\mathbf{A}^+$  — псевдообратная матрица [30, 31]. Отметим, что последняя широко используется в исследованиях нейронных сетей [32–34].

В случае, когда  $\mathbf{y}$  содержит шум, ряд сингулярных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  плавно спадает к нулю,  $\mathbf{A}$  имеет большое число обусловленности  $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ , задачу оценки  $\mathbf{x}$  называют дискретной некорректной обратной задачей [4]. Решение  $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$  является неустойчивым и неточным.

Один из подходов к получению устойчивого решения ДНЗ состоит в том, что вектор измерений представляют линейной аддитивной моделью, оптимальный подбор числа  $k < N$  слагаемых которой обеспечивает устойчивость решения [4, 35, 36]. Для получения устойчивого решения (оценки  $\mathbf{x}^*$ ) можно применять такие методы, как усеченное сингулярное разложение [35–37], усеченное QR-разложение [38–40], а также метод с использованием рандомизации [9, 12, 16].

Вектор оценки  $\mathbf{x}$  на основе усеченного сингулярного разложения получают следующей линейной моделью [37]:

$$\mathbf{x}_{k \text{ SVD}}^* = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \lambda_i^{-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{y}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}_i \in \mathfrak{R}^N$  и  $\mathbf{v}_i \in \mathfrak{R}^N$  — соответственно левые и правые сингулярные векторы,  $\lambda_i$  — сингулярные числа.

Вектор оценки  $\mathbf{x}$  на основе случайного проецирования получают линейной моделью вида [12]:

$$\mathbf{x}_{kR}^* = \sum_{i=1}^k \mathbf{b}_i \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{y}, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathfrak{R}^N$  — столбец матрицы  $\boldsymbol{\Omega}_k = [\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_k]$ , являющейся результатом сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{G}$ , элементы которой есть случайные величины с нормальным распределением;  $\mathbf{b}_i \in \mathfrak{R}^N$  — столбец матрицы  $(\boldsymbol{\Omega}_k^T \mathbf{A})^+ = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]$ .

Среднеквадратичную ошибку восстановления  $\mathbf{x}$  будем вычислять как

$$e_x(k) = E \{ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^*\|^2 \} = E \{ \|\mathbf{e}_{xk}\|^2 \}, \quad (4)$$

где  $E\{\cdot\}$  — оператор усреднения по реализациям шума в векторе измерений,

$\mathbf{x}_k^*$  — вектор восстановленного сигнала, т.е. вектор оценки  $\mathbf{x}$  по (2) или (3),  $\mathbf{e}_{xk}$  — вектор ошибки восстановления истинного сигнала  $\mathbf{x}$  с использованием  $k$  компонент модели.

Существует оптимальное число  $k$  компонент линейных моделей (2) и (3), минимизирующее ошибку (4). Наличие оптимального  $k < N$  возможно вследствие того, что ошибка восстановления истинного сигнала представима в виде суммы двух составляющих, одна из которых (детерминированная) убывает с увеличением числа компонент модели, а другая (стохастическая) растет и пропорциональна уровню шума в векторе измерений [12, 16]. Таким образом, при некотором уровне шума глобального минимума ошибки можно достичь при  $1 < k < N$ .

В реальных условиях вычислить ошибку  $e_x(k)$  восстановления  $\mathbf{x}$  невозможно вследствие отсутствия информации об  $\mathbf{x}$ , поэтому нельзя непосредственно определить оптимальное  $k$ . Для выбора  $k$ , близкого к оптимальному, нужно разработать КВМ, т.е. функцию, имеющую экстремум при  $k$ , близком или равном оптимальному, и не включающую неизвестный вектор  $\mathbf{y}_0$ . Для разработки КВМ будем использовать среднюю ошибку восстановления  $\mathbf{y}_0$ :  $e_y(k) = E\{\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_k^*\|^2\} = E\{\|\mathbf{e}_y\|^2\}$ , где  $\mathbf{y}_k^* = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^*$ ;  $\mathbf{e}_y$  — вектор ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$ . Отметим, что, хотя  $\mathbf{y}_0$  неизвестен, его можно оценить с использованием известного вектора измерений  $\mathbf{y}$ . Таким образом, при создании КВМ для решения ДНЗ необходимо:

- показать, что глобальные минимумы зависимости ошибок восстановления  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}_0$  от  $k$  совпадают или близки;
- получить выражение для оценивания ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$  с использованием известного вектора измерений  $\mathbf{y}$ .

Чтобы сравнить положение минимума ошибки восстановления истинного сигнала  $e_x(k)$  и ошибки восстановления незашумленного вектора измерений  $e_y(k)$ , получим выражения (неравенства), характеризующие размерность модели  $k$ , при которой ошибка минимальна. Для этого полные ошибки  $e_x(k)$  и  $e_y(k)$  представим в виде [12, 16]  $e(k) = e_d(k) + e_s(k) = e_d(k) + \sigma^2 e_g(k)$ , где  $e_d(k)$  и  $e_s(k)$  — зависимости детерминированной и стохастической составляющих ошибки от  $k$  соответственно,  $\sigma^2$  — дисперсия шума;  $e_g(k) = e_s(k) / \sigma^2$ .

Условием наличия минимума (локального или глобального) ошибки для модели размерности  $k$  является  $e(k) - e(k-1) < 0$ ,  $e(k+1) - e(k) > 0$ .

Обозначим

$$\Delta e_d(k) = e_d(k-1) - e_d(k), \quad \Delta e_s(k) = e_s(k) - e_s(k-1). \quad (5)$$

Ранее отмечалось, что детерминированная составляющая ошибки уменьшается, а стохастическая увеличивается с ростом  $k$ , поэтому  $\Delta e_d$  и  $\Delta e_s$  положительные (см. далее). (Если  $\Delta e = 0$  для  $k$  и  $k+1$ , в качестве  $k+1$  можно выбрать то значение  $k$ , где  $\Delta e > 0$ .)

Используя начальные значения составляющих ошибки  $e_d(1)$ ,  $e_g(1)$  и значения  $\Delta e_d(k)$ ,  $\Delta e_s(k)$  для моделей размерности от 1 до  $k$ , запишем выражения для значений составляющих ошибки  $e_d(k)$ ,  $e_g(k)$  в виде:

$$\begin{aligned} e_d(k) &= e_d(1) - \Delta e_d(1) - \Delta e_d(2) - \dots - \Delta e_d(k), \\ e_g(k) &= e_g(1) + \Delta e_g(1) + \Delta e_g(2) + \dots + \Delta e_g(k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e(k) - e(k-1) &= -\Delta e_d(k) + \sigma^2 \Delta e_g(k), \\ e(k+1) - e(k) &= -\Delta e_d(k+1) + \sigma^2 \Delta e_g(k+1). \end{aligned}$$

Условие наличия минимума при размерности модели  $k$  перепишем как

$$\sigma^2 \Delta e_g(k) - \Delta e_d(k) < 0, \quad (6)$$

$$\sigma^2 \Delta e_g(k+1) - \Delta e_d(k+1) > 0. \quad (7)$$

Из неравенства (6) следует, что  $\sigma^2 \Delta e_g(k) < \Delta e_d(k)$ , т.е.  $\sigma^2 < \frac{\Delta e_d(k)}{\Delta e_g(k)}$ , а из неравенства (7), — что  $\sigma^2 \Delta e_g(k+1) > \Delta e_d(k+1)$ , т.е.  $\sigma^2 > \frac{\Delta e_d(k+1)}{\Delta e_g(k+1)}$ .

Для того чтобы минимум ошибки соответствовал размерности модели  $k$ , значение дисперсии шума должно находиться в диапазоне

$$\frac{\Delta e_d(k+1)}{\Delta e_g(k+1)} < \sigma^2 < \frac{\Delta e_d(k)}{\Delta e_g(k)}, \quad (8)$$

т.е. если для некоторого  $k$  выполняется неравенство

$$\frac{\Delta e_d(k+1)}{\Delta e_g(k+1)} < \frac{\Delta e_d(k)}{\Delta e_g(k)}, \quad (9)$$

то существует уровень шума  $\sigma$ , обеспечивающий минимум при  $k$ .

Обозначим  $J_x = \frac{\Delta e_{dx}(k)}{\Delta e_{gx}(k)}$  отношение изменений составляющих ошибки  $e_d$  и  $e_g$  в зависимости от  $k$  для ошибки восстановления истинного сигнала, а  $J_y = \frac{\Delta e_{dy}(k)}{\Delta e_{gy}(k)}$  — для ошибки восстановления вектора измерений. Если  $J_x$  и  $J_y$

для ошибок восстановления входа и выхода для некоторого метода совпадают или близки, то и оптимальные значения  $k$  ошибок восстановления входа и выхода совпадают или близки.

Если значение  $J_x$  ( $J_y$ ) для исследуемой задачи монотонно убывает в зависимости от  $k$ , при любом  $\sigma^2$  минимум ошибки восстановления истинного сигнала (как и ошибки восстановления вектора измерений) будет единственным. Действительно, в этом случае любое значение  $\sigma^2$  принадлежит только одному диапазону  $J(k+1) < \sigma^2 < J(k)$  согласно (8), т.е. минимум ошибки достигается при  $k$ . Когда  $\sigma^2$  принадлежит не одному диапазону  $J_x$  или  $J_y$ , зависимости ошибок восстановления истинного сигнала и выхода от  $k$  имеют локальные минимумы.

Разработаем КВМ для решения дискретной некорректной задачи методами сингулярного разложения и случайного проецирования [12, 16]. Для этого для обоих методов исследуем убывание детерминированной составляющей ошибки и возрастание стохастической для  $e_x(k)$  и  $e_y(k)$ , совпадение минимумов  $e_x(k)$  и  $e_y(k)$ , оценку  $y_0$  по  $y$ , а также получим выражение для КВМ.

Вначале проиллюстрируем, как поведение зависимостей  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  определяет единственность либо неединственность минимумов ошибки  $e_x(k)$  и  $e_y(k)$ , совпадение либо несовпадение  $k$ , соответствующих минимумам  $e_x(k)$  и  $e_y(k)$ , а также оптимальное  $k$ .

**Предварительные эксперименты.** Рассмотрим результаты предварительных экспериментов для двух известных дискретных некорректных задач: Carasso и Delves [29], для которых рассчитаны зависимости  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$ , полученные при использовании метода усеченного сингулярного разложения (рис. 1, а и рис. 2, а), а также зависимости ошибок восстановления входа и выхода от  $k$  при заданном уровне гауссова шума  $nl$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  (рис. 1, б и рис. 2, б).

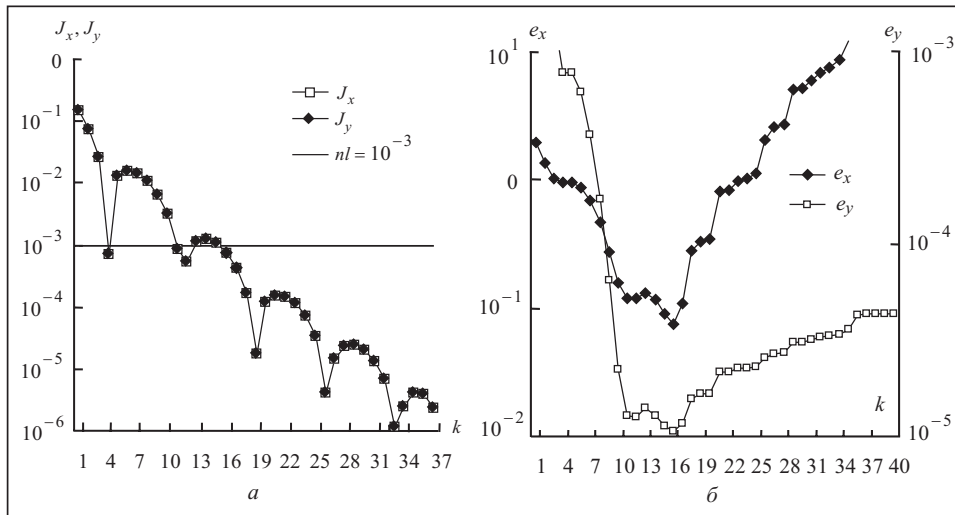


Рис. 1. Решение задачи Carasso методом усеченного сингулярного разложения: зависимость  $J_x$  и  $J_y$  от размерности модели  $k$  (а), зависимость ошибок восстановления входа и выхода от  $k$  при  $nl = 10^{-3}$  (б)

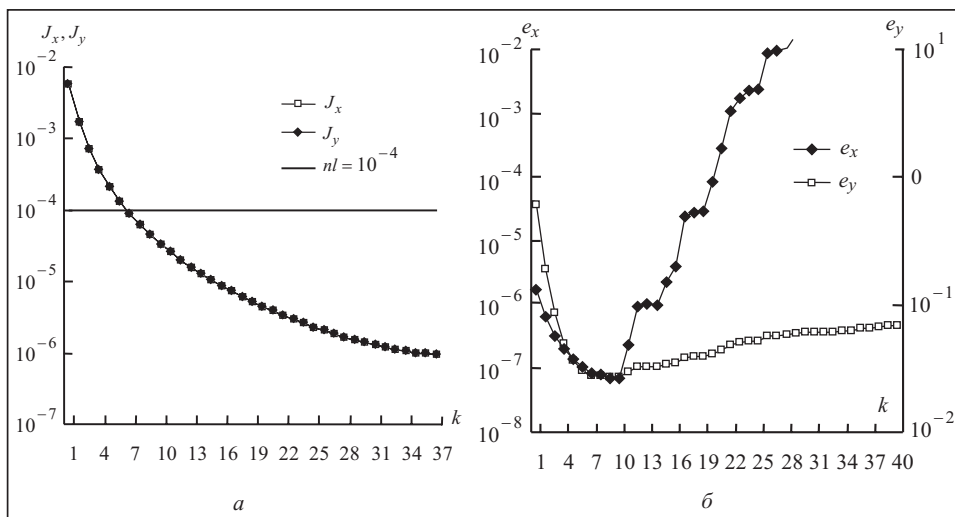


Рис. 2. Решение задачи Delves методом усеченного сингулярного разложения: зависимость  $J_x$  и  $J_y$  от размерности модели  $k$  (а), зависимость ошибок восстановления входа и выхода от  $k$  при  $nl = 10^{-4}$  (б)

Проведенная на графике зависимости  $J_x(k)$  ( $J_y(k)$ ) линия, параллельная оси абсцисс, соответствует определенному уровню шума (см. рис. 1, а и рис. 2, а). Как видно из этих рисунков, для метода усеченного сингулярного разложения зависимости  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  совпадают для обеих задач. Следовательно, и положения минимумов значений ошибки восстановления входа и выхода совпадают.

Для задачи Delves зависимости  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  монотонно убывают. Поэтому зависимости ошибки восстановления входа и выхода имеют единственный минимум.

Поскольку для задачи Carasso характер убывания зависимостей  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  немонотонный, зависимости ошибки восстановления входа и выхода для определенных уровней шума будут иметь как глобальный минимум, так и локальные. Число пересечений линии, соответствующей  $nl = 10^{-3}$  (см. рис. 1, а), с убывающими (в силу (9)) участками графика равно количеству минимумов зависимости ошибки от  $k$  при данном уровне шума, так как каждое пересечение показывает, что значение шума принадлежит определенному интервалу.

При решении задачи Carasso методом усеченного сингулярного разложения графики зависимостей  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  трижды пересекаются линией уровня шума  $nl=10^{-3}$  (см. рис. 1, а). Построенные для этого уровня шума зависимости ошибки входа и выхода от  $k$  (см. рис. 1, б) имеют три минимума при размерностях модели  $k = \{4, 11, 16\}$ .

Перейдем к построению КВМ для метода решения ДНЗ на основе усеченного сингулярного разложения.

#### ПОСТРОЕНИЕ КВМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДНЗ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

**Зависимость составляющих ошибки от числа компонент модели.** Решение ДНЗ на основе сингулярного разложения получают [4, 37] следующим образом:  $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{A}_k^+ = \mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}^T$ . Здесь  $\mathbf{A}_k = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$  — приближение матрицы  $\mathbf{A}$ , полученное по  $k$  ( $k < N$ ) компонентам сингулярного разложения;  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  и  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  — матрицы левых и правых сингулярных векторов с ортонормированными столбцами соответственно;  $\mathbf{S} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  — матрица сингулярных чисел;  $\mathbf{A}^+$  — псевдообращение матрицы  $\mathbf{A}$ .

Учитывая, что  $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \lambda_i \mathbf{v}_i^T$ , записываем рекурсивное выражение для матрицы  $\mathbf{A}_k^+$ :

$$\mathbf{A}_k^+ = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \lambda_i^{-1} \mathbf{u}_i^T, \quad \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_k \lambda_k^{-1} \mathbf{u}_k^T. \quad (10)$$

Преобразуем выражение для вектора ошибки  $\mathbf{e}_{xk}$  (4) так, чтобы вектор шума входил в него в явном виде:

$$\mathbf{e}_{xk} = \mathbf{A}_k^+ (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{x} = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{x} = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (11)$$

Используя (11), запишем выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления  $\mathbf{x}$  (4):

$$e_x(k) = E \{ \|\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} = \\ = \|\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I}\|^2 + E \{ \|\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} - 2E \{ \langle (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \}. \quad (12)$$

Учитывая, что компоненты вектора шума  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — независимые случайные величины,  $E \{ \varepsilon_i \varepsilon_j \} = E \{ \varepsilon_i \} E \{ \varepsilon_j \} = 0$ ,  $E \{ \varepsilon_i \varepsilon_i \} = \sigma^2$ , математическое ожидание второго слагаемого  $e_x(k)$  вычисляем следующим образом:

$$E \{ \|\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} = E \{ \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \} = E \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_i [\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+]_{ij} \varepsilon_j \right\} = \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+]_{ij} E \{ \varepsilon_i \varepsilon_j \} = \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+). \quad (13)$$

Представим третье слагаемое в (12) как

$$E \{ \langle (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \} = E \{ \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})^T \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \} = E \{ \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} \},$$

где  $\mathbf{a} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})^T \mathbf{A}_k^+$ . Так как  $E \{ \varepsilon_i \} = 0$ , то  $E \{ \mathbf{a}^T \boldsymbol{\varepsilon} \} = \sum_{i=1}^N a_i E \{ \varepsilon_i \} = 0$  и

$$E \{ \langle (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \} = 0. \quad (14)$$

С учетом (13) и (14) перепишем  $e_x(k)$  (12) в виде  $e_x(k) = \|\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I}\|^2 + \sigma^2 \text{tr} (\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+)$ . Выделим составляющие ошибки

$$e_{xd}(k) = \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2, \quad e_{xs}(k) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k^{+\top} \mathbf{A}_k^+), \quad (15)$$

где  $e_{xd}$  и  $e_{xs}$  — детерминированная и стохастическая составляющие ошибки восстановления  $\mathbf{x}$  соответственно.

Используя  $\mathbf{e}_y = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}$ , запишем выражение для ошибки восстановления выхода и проведем усреднение по реализациям шума аналогично (13), (14)

$$e_y(k) = \mathbb{E} \{ \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} = \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0\|^2 + \mathbb{E} \{ \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 \} - 2\mathbb{E} \{ \langle \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0, \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \},$$

$$e_y(k) = \|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k^{+\top} \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+).$$

Составляющие ошибки восстановления выхода

$$e_{yd}(k) = \|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2, \quad e_{ys}(k) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k^{+\top} \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+), \quad (16)$$

где  $e_{yd}$  и  $e_{ys}$  — детерминированная и стохастическая составляющие ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$  соответственно.

Для того чтобы показать возрастание и убывание составляющих ошибки  $e_d(k)$ ,  $e_g(k)$  и получить аналитические выражения для  $\Delta e_d(k)$  и  $\Delta e_g(k)$ , рассмотрим поведение составляющих ошибки восстановления истинного сигнала  $\mathbf{x}$  и ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$  от числа компонент сингулярного разложения  $k$ .

Обозначив  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k$ , для  $e_{xd}(k)$  (15) получим:

$$e_{xd}(k) = \|(\mathbf{Z}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{Z}_k \mathbf{x} - \mathbf{x})^\top (\mathbf{Z}_k \mathbf{x} - \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Z}_k^\top \mathbf{Z}_k \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{Z}_k \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{x}.$$

Матрица  $\mathbf{Z}_k$  является ортогональным проектором [31]. Используя свойство проектора  $\mathbf{Z}_k^\top \mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}_k$ , запишем выражение для  $e_{xd}(k)$  следующим образом:

$$e_{xd}(k) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Z}_k \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{Z}_k \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{Z}_k \mathbf{x}.$$

С помощью сингулярного разложения получаем  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k^\top \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^\top$ .

Учитывая, что в силу ортонормированности  $\mathbf{U}_k^\top \mathbf{U}_k = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}_k = \mathbf{I}$ , получаем  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top$ .

Выражение для детерминированной составляющей ошибки принимает вид

$$e_{xd}(k) = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{Z}_k \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top \mathbf{x}. \quad (17)$$

Запишем  $\mathbf{Z}_k$  в виде суммы произведений векторов  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top$ . Тогда

$\mathbf{x}^\top \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}^\top \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{x}$ . Произведение  $\mathbf{x}^\top \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{x}$  является положительным чис-

лом для неортогональных векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{v}_i$ , поэтому значение  $\sum_{i=1}^k \mathbf{x}^\top \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{x}$  увели-

чивается с ростом  $k$ . В силу того, что  $\mathbf{x}^\top \mathbf{x}$  постоянно и  $\sum_{i=1}^k \mathbf{x}^\top \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{x}$  растет, зна-

чение детерминированной составляющей ошибки  $e_{xd}(k)$  убывает с ростом  $k$ .

Теперь запишем рекурсивное выражение для  $e_{xs}(k)$  (15). Рекурсивная запись  $\mathbf{A}_k^{+\top} \mathbf{A}_k^+$  следует из (10):



$$\mathbf{A}_k^{+\top} \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{A}_{k-1}^{+\top} \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{u}_k \lambda_k^{-1} \mathbf{v}_k^\top \mathbf{v}_k \lambda_k^{-1} \mathbf{u}_k^\top = \mathbf{A}_{k-1}^{+\top} \mathbf{A}_{k-1}^+ + \lambda_k^{-2} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top,$$

$$e_{xs}(k) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_{k-1}^{+\top} \mathbf{A}_{k-1}^+) + \sigma^2 \lambda_k^{-2} \operatorname{tr}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top).$$

Поскольку векторы  $\mathbf{u}_k$  имеют единичную длину, след матрицы  $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^\top$  (квадрат нормы  $\mathbf{u}_k$ ) положительный (единичный), значение стохастической составляющей ошибки  $e_{xs}(k)$  увеличивается с ростом  $k$ .

Рассмотрим поведение составляющих ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$ . Обозначив  $\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k$ , для детерминированной составляющей  $e_{yd}(k)$  (16) получим:

$$e_{yd}(k) = \|(\mathbf{P}_k - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 = (\mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0)^\top (\mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0^\top \mathbf{P}_k^\top \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 - 2\mathbf{y}_0^\top \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_0^\top \mathbf{y}_0.$$

Матрица  $\mathbf{P}_k$  является ортогональным проектором [31]. Используя свойство проектора  $\mathbf{P}_k^\top \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k$ , получаем выражение  $e_{yd}(k) = \mathbf{y}_0^\top \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^\top \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0$ . С помощью сингулярного разложения и с учетом того, что  $\mathbf{V}_k^\top \mathbf{V}_k = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}_k = \mathbf{I}$ , имеем

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^\top \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k^\top = \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^\top.$$

Выражение для детерминированной составляющей ошибки принимает вид

$$e_{yd}(k) = \mathbf{y}_0^\top \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^\top \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^\top \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^\top \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^\top \mathbf{y}_0,$$

где  $\mathbf{U}_k^\top \mathbf{y}_0 = [\mathbf{u}_1^\top \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{u}_k^\top \mathbf{y}_0]$  есть вектор размерности, возрастающей с ростом  $k$ , поэтому значение скалярного произведения  $\mathbf{y}_0^\top \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^\top \mathbf{y}_0$  не убывает с ростом  $k$ , а для неортогональных  $\mathbf{y}_0$  и  $\mathbf{u}_k$  возрастает, следовательно, значение  $e_{yd}(k)$  убывает с ростом  $k$ .

Для стохастической составляющей ошибки  $e_{ys}(k)$  (16) по свойству цикличности следа матрицы имеем

$$E\{\|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2\} = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k^{+\top} \mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^{+\top}).$$

Учитывая, что  $\mathbf{U}_k^\top \mathbf{U}_k = \mathbf{I}_k$  и  $\mathbf{S}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1\top} = \mathbf{I}_k$ , получаем  $\mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^{+\top} = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top$ .

Поскольку  $\operatorname{tr}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top) = 1$ , итоговое выражение для стохастической составляющей ошибки восстановления вектора выхода имеет вид

$$e_{ys}(k) = \sigma^2 \operatorname{tr}(\mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^{+\top}) = \sigma^2 \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top\right) = \sigma^2 k, \quad (18)$$

следовательно,  $e_{ys}$  увеличивается с ростом  $k$ .

**Оптимальное число компонент сингулярного разложения для ошибки восстановления истинного сигнала и восстановления вектора выхода.** Вычислим соотношение  $J_x(k) = \frac{\Delta e_{xd}(k)}{\Delta e_{xg}(k)}$  для ошибки восстановления истинного

сигнала. Учитывая, что  $\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top$  в выражении (17) можно представить как  $\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top = \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^\top + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top$ , записываем  $e_{xd}$  в виде:

$$e_{xd} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top \mathbf{x} = e_{xd}(k-1) - \mathbf{x}^\top \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top \mathbf{x}.$$

Поэтому, как следует из (5),  $\Delta e_{xd}(k) = \mathbf{x}^\top \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top \mathbf{x}$ .



Из  $e_{xs}(k) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{A}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{A}_{k-1}^+) + \sigma^2 \lambda_k^{-2} \text{tr}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}})$  следует, что  $\Delta e_{xg}(k) = \lambda_k^{-2} \text{tr}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}}) = \lambda_k^{-2}$ , значит,

$$\frac{\Delta e_{xd}(k)}{\Delta e_{xg}(k)} = \lambda_k^2 \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{x}. \quad (19)$$

Вычислим соотношение  $J_y(k) = \frac{\Delta e_{yd}(k)}{\Delta e_{yg}(k)}$  для ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$ .

Учитывая, что  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^{\text{T}} = \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1}^{\text{T}} + \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}}$ , записываем  $e_{yd}$  в виде:

$$\begin{aligned} e_{yd} &= \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^{\text{T}} \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{y}_0 = \\ &= e_{yd}(k-1) - \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) и (5) следует, что  $\Delta e_{yd}(k) = \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{y}_0$ . Перепишем  $\Delta e_{yd}(k)$  относительно  $\mathbf{x}$ :

$$\Delta e_{yd}(k) = \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{V} \mathbf{S}^{\text{T}} \mathbf{U}^{\text{T}} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{\text{T}} \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^{\text{T}} \mathbf{x}.$$

В силу ортогональности сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{\text{T}} \mathbf{u}_k$  является вектором,  $k$ -я компонента которого равна единице ( $u_k = 1$ ), а остальные — нулю. Поэтому  $\Delta e_{yd}(k) = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{v}_k \lambda_k (\lambda_k \mathbf{v}_k)^{\text{T}} \mathbf{x} = \lambda_k^2 \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{x}$ .

Из (5) и (18) следует, что  $\Delta e_{yg}(k) = \text{tr}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^{\text{T}}) = 1$ , значит,

$$\frac{\Delta e_{yd}(k)}{\Delta e_{yg}(k)} = \lambda_k^2 \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{x}. \quad (21)$$

Сопоставляя выражения (19) и (21), видим, что  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  совпадают, т.е. для усеченного сингулярного разложения положения минимумов ошибки восстановления входа и выхода всегда совпадают. Поэтому зависимость ошибки восстановления вектора измерений  $\mathbf{y}_0$  от  $k$  можно использовать для определения оптимального числа компонент модели. Однако  $\mathbf{y}_0$  неизвестно. Оценим его и получим выражение для КВМ.

**Оценка ошибки восстановления вектора измерений и КВМ для решения ДЗН на основе сингулярного разложения.** Как отмечалось ранее, применять для определения минимума ошибки непосредственно выражение средней ошибки восстановления  $\mathbf{y}_0$  (16) невозможно ввиду наличия в нем неизвестного в реальных условиях вектора  $\mathbf{y}_0$ .

Используя полученный в результате измерений вектор  $\mathbf{y}$  и вектор шума  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , запишем неизвестный вектор  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon}$  и проведем усреднение по реализациям шума

$$\begin{aligned} e_y &= \mathbb{E} \{ \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}\| \mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon} \|^2 \} + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^{\text{T}} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+), \\ e_y &= \mathbb{E} \{ \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}\| \mathbf{y} \|^2 \} + \mathbb{E} \{ \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}\| \boldsymbol{\varepsilon} \|^2 \} - \\ &- 2\mathbb{E} \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^{\text{T}} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогично (13) представим второе слагаемое в (22) в виде

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}\| \boldsymbol{\varepsilon} \|^2 \} = \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^{\text{T}} \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \quad (23)$$

Третье слагаемое  $e_y$  преобразуем следующим образом:

$$\mathbb{E} \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbb{E} \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}), (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= E \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})(\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}), (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \\
&= E \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle + E \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (24)
\end{aligned}$$

Аналогично (14) представим первое слагаемое в (24) в виде

$$E \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0. \quad (25)$$

Согласно рассуждениям, аналогичным (23), для второго слагаемого в (24) имеем

$$E \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})). \quad (26)$$

Учитывая (25) и (26), для третьего слагаемого в (22) получаем

$$2E \langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 2\sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})). \quad (27)$$

Учитывая (25)–(27), получаем выражение для  $e_y$ :

$$\begin{aligned}
e_y &= E \{ \| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y} \|^2 \} + \sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+) - \\
&- 2\sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})) + \sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \quad (28)
\end{aligned}$$

Из (28) следует итоговое выражение для критерия выбора модели

$$\begin{aligned}
CR_{\text{SVD}} &= E \| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y} \|^2 - \sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})) + \\
&+ \sigma^2 \text{tr} ((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+), \quad (29)
\end{aligned}$$

аппроксимирующее ошибку восстановления  $\mathbf{y}_0$ , которое можно использовать на практике для определения числа компонент сингулярного разложения, близкого к оптимальному, т.е. такому, при котором ошибка восстановления истинного сигнала при решении конкретной ДНЗ близка к минимальной. Для оценки дисперсии шума  $\sigma^2$  можно применять известные методы [41–44].

Экспериментальное исследование критерия (29) проведено далее.

#### ПОСТРОЕНИЕ КВМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДНЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Одной из проблем применения SVD-разложения для решения ДНЗ является его большая вычислительная сложность  $O(mn \min \{m, n\})$ . В работах [9, 12, 16] разрабатывается подход, основанный на отыскании минимума ошибки решения ДНЗ с использованием случайного проецирования, обеспечивающий устойчивость решения и позволяющий снизить вычислительную сложность.

Для решения ДНЗ на основе проекционного подхода обе части исходного уравнения (1) умножим на матрицу  $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{k \times N}$  [12], в результате имеем уравнение  $\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{F} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{R}^{k \times N}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^k$ .

В работе [12] предложено получать матрицу  $\mathbf{Q}$  с помощью QR-разложения матрицы  $\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , где  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  — соответственно ортонормированная и верхнетреугольная матрицы. Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  — реализации случайной величины с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией,  $k \leq N$ .

Восстановление сигнала на основе псевдообращения имеет вид

$$\mathbf{x}_Q^* = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y}.$$

**Зависимость составляющих ошибки от числа компонент модели.** Для решения ДНЗ на основе случайного проецирования составляющие ошибки получают следующим образом [12]. Вектор ошибки восстановления истинного сигнала представим как

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x &= \mathbf{x}_Q^* - \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y} - \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{x} = \\
&= ((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} + (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Обозначим  $\mathbf{e}_{xd} = ((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{e}_{xs} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ , где  $\mathbf{e}_{xd}$  и  $\mathbf{e}_{xs}$  — векторы детерминированной и стохастической составляющих ошибки соответственно.

Подобно (13) математическое ожидание  $\mathbf{e}_{xs}$  имеет вид

$$E\{\mathbf{e}_{xs}\} = \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+)^T (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T) = \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \quad (30)$$

Учитывая (30), для среднеквадратичной ошибки восстановления истинного сигнала получаем

$$e_{x\mathbf{Q}} = \|((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \quad (31)$$

Рассмотрим ошибку восстановления вектора измерений в случае, когда для случайного проецирования используется матрица  $\mathbf{Q}$ . Вектор ошибки представим как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= \mathbf{y}_Q^* - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{y}_0 = \\ &= (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathbf{e}_{yd} = (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{e}_{ys} = \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Подобно (13) математическое ожидание  $\mathbf{e}_{ys}$  имеет вид

$$E\{\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}\} = \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T)^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T). \quad (32)$$

С учетом (32) выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления вектора измерений принимает вид

$$e_{y\mathbf{Q}} = \|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 &= \mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_0^T \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_0 - \\ &- 2\mathbf{y}_0^T \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Число столбцов  $N$  матрицы  $\mathbf{Q}_k$  определяется размерностью исходной матрицы  $\mathbf{A}$ , число строк  $k$  априори не фиксировано и может изменяться от 1 до  $N$ . Поведение зависимости составляющих ошибки (31) от числа строк  $k$  матрицы  $\mathbf{Q}_k$  аналитически исследовано в работах [15, 16] на основании представления матрицы  $\mathbf{F}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}$  в виде суммы исходной матрицы и матрицы возмущения.

Псевдообратную матрицу  $\mathbf{F}_k^+ = (\mathbf{Q}_k^T \mathbf{A})^+$ , используемую для оценки истинного сигнала, можно представить в виде возмущения псевдообратной матрицы через возмущение исходной матрицы, предложенного в [45]. На основе такого представления получены рекурсивные выражения для стохастической и детерминированной составляющих ошибки восстановления истинного сигнала. Эти выражения являются инструментом для исследования тенденций поведения (возрастания, убывания) составляющих ошибки в зависимости от  $k$ .

Матрица  $\mathbf{F}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{A}$  ( $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k]^T$ ,  $\mathbf{q}_k$  — строка матрицы) имеет структуру  $\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{k-1} \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix}$ , где  $\mathbf{F}_{k-1} \in \mathfrak{R}^{k-1 \times N}$ , вектор-строка  $\mathbf{f}_k = \mathbf{q}_k \mathbf{A}$  имеет размерность  $k$ .

В качестве возмущения матрицы  $\mathbf{F}_{k-1}$  рассматривается матрица  $\mathbf{E}_k \in \mathfrak{R}^{k \times N}$ , содержащая одну ненулевую  $k$ -ю строку  $\mathbf{f}_k$ , которая добавляется на  $k$ -м шаге:  $\mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{E}_k = \mathbf{F}_k$ , т.е.  $\mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k-1} \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix}$ , где  $\mathbf{O}_{k-1}$  — нулевая подматрица размера  $(k-1) \times N$ .

В работе [16] сформулированы рекурсивные выражения для стохастической и детерминированной составляющих ошибки. Для стохастической составляющей

ошибки восстановления истинного сигнала рекурсивное выражение имеет вид

$$e_{xs}(k) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{F}_k^{+\text{T}} \mathbf{F}_k^+) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{F}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{F}_{k-1}^+) + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{M}_{k-1}) + \sigma^2 d_k,$$

$$e_{xs}(k) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{F}_k^{+\text{T}} \mathbf{F}_k^+) = e_{xs}(k-1) + \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{M}_{k-1}) + \sigma^2 d_k, \quad (34)$$

$$\Delta e_s(k) = \sigma^2 \text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{M}_{k-1}) + \sigma^2 d_k,$$

где  $\mathbf{M}_{k-1} = \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+$ ,  $d_k = \mathbf{f}_k^{+\text{T}} \mathbf{f}_k^+$ .

Если  $\mathbf{f}_k$  ненулевой, то  $d_k = \mathbf{f}_k^{+\text{T}} \mathbf{f}_k^+ > 0$ . Для ненулевой  $\mathbf{M}_{k-1}$  след  $\text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{M}_{k-1}) > 0$ . Поэтому значение стохастической составляющей ошибки увеличивается с ростом  $k$ .

Для детерминированной составляющей ошибки восстановления истинного сигнала рекурсивное выражение имеет вид

$$e_{xd}(k) = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{x} - (\mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x}),$$

$$e_{xd}(k) = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k \mathbf{x} = e_{xd}(k-1) - \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x}, \quad (35)$$

$$\Delta e_d(k) = \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x}.$$

Как показано в [16], матрицу  $\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1})$  можно получить тензорным произведением вектора-столбца  $(\mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}))^{\text{T}}$  на этот же (нетранспонированный) вектор-строку, деленным на квадрат его нормы. Поэтому для неортогональных  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1})$  значение  $\Delta e_d(k)$  положительно и значение детерминированной составляющей ошибки восстановления истинного сигнала уменьшается с ростом  $k$ .

Рекурсивные выражения для стохастической и детерминированной составляющих ошибки восстановления вектора измерений  $\mathbf{y}_0$  имеют вид

$$e_{yg}(k) = \text{tr}(\mathbf{F}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{F}_{k-1}^+) + \text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} + \mathbf{f}_k^{+\text{T}} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A}) -$$

$$- 2 \text{tr}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{f}_k^{\text{T}} \mathbf{f}_k \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A}), \quad (36)$$

$$e_{yd}(k) = \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{Q}_{k-1}^{\text{T}} \mathbf{y}_0 - 2 \mathbf{y}_0^{\text{T}} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{y}_0 +$$

$$+ 2 \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{K} \mathbf{x} =$$

$$= e_{yd}(k-1) + 2 \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\text{T}} \mathbf{K} \mathbf{x}, \quad (37)$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{q}_k \mathbf{F}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{q}_k^{\text{T}} \mathbf{A} - 2 \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} (\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{q}_k \mathbf{A} + \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{q}_k \mathbf{A}) +$$

$$+ (\mathbf{f}_k^{\text{T}} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} + \mathbf{F}_k^{\text{T}} \mathbf{F}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{f}_k^{\text{T}} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A}) (\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k + \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_k) +$$

$$+ \mathbf{F}_k^{\text{T}} \mathbf{F}_{k-1}^{+\text{T}} \mathbf{A}^{\text{T}} \mathbf{A} (\mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_k).$$

Экспериментально показана [13] положительность  $\Delta e_d(k)$  и  $\Delta e_s(k)$  для ошибки восстановления незашумленного вектора измерений при усреднении по реализациям случайных матриц.

**Оптимальное число компонент модели для ошибки восстановления истинного сигнала и восстановления вектора выхода методом случайного проектирования.** Из рекурсивных выражений (34), (35) следует, что для ошибки вос-

становления истинного сигнала

$$\Delta e_{xd}(k) = \mathbf{x}^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x}, \quad \Delta e_{xg}(k) = \text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+),$$

значит,

$$J_x(k) = \frac{\Delta e_{xd}(k)}{\Delta e_{xg}(k)} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x}}{\text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+)}. \quad (38)$$

Из рекурсивных выражений (36), (37) следует, что для ошибки восстановления вектора измерений

$$\Delta e_{yg}(k) = \text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}) - 2 \text{tr}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A}),$$

$$\Delta e_{yd}(k) = 2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x},$$

значит,

$$J_y(k) = \frac{\Delta e_{yd}(k)}{\Delta e_{yg}(k)} = \frac{2 \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{f}_k (\mathbf{I} - \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\text{tr}(\mathbf{M}_{k-1}^T \mathbf{M}_{k-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{f}_k^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}) - 2 \text{tr}(\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^T \mathbf{f}_k^T \mathbf{f}_k^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A})}. \quad (39)$$

Сопоставляя выражения (38) и (39), видим, что в отличие от метода на основе сингулярного разложения оптимальное значение  $k$  для ошибки решения ДНЗ с использованием случайного проецирования не совпадает с оптимальным значением  $k$  для ошибки восстановления вектора измерений. Экспериментальное исследование зависимостей  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  показало их близость для метода случайного проецирования. Поскольку зависимости  $J_x(k)$  и  $J_y(k)$  и положения минимумов ошибки близки, используем этот факт для разработки КВМ.

**Оценка ошибки восстановления вектора измерений и получение КВМ для решения ДНЗ методом случайного проецирования.** Получим КВМ для решения ДНЗ на основе случайного проецирования. Представим в (33) неизвестный вектор  $\mathbf{y}_0$  как  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon}$  и усредним по реализациям шума

$$e_{y\mathbf{Q}} = \mathbb{E} \{ \| (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\varepsilon}) \|^2 \} + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})),$$

$$e_{y\mathbf{Q}} = \mathbb{E} \| (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) \mathbf{y} \|^2 + \mathbb{E} \| (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \|^2 -$$

$$- 2 \mathbb{E} \langle (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) \mathbf{y}, (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})).$$

Проводя преобразования, аналогичные (22)–(24), получаем аппроксимацию ошибки восстановления вектора измерений (33)

$$CR_{\mathbf{Q}} = \mathbb{E} \| (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) \mathbf{y} \|^2 - \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})) + \sigma^2 \text{tr}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^{+T} \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})). \quad (40)$$

Вместо неизвестного вектора  $\mathbf{y}_0$  в выражение (40) входит известный вектор измерений  $\mathbf{y}$ , поэтому  $CR_{\mathbf{Q}}$  можно использовать для определения близкой к оптимальной размерности матрицы  $\mathbf{Q}$ .

#### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Исследования проводились на примере известных дискретных некорректных задач Phillips, Carasso и Delves [29].

**Таблица 1.** Результаты решения ДНЗ с использованием метода случайного проецирования при размере матриц ядра  $40 \times 40$

Задача	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
Phillips	$nl = 10^{-3}$				$nl = 10^{-4}$				$nl = 10^{-5}$			
$e_Q$	0.0014	0.0005	11.64	1.14	0.00031	0.00005	17.05	1.59	0.00026	0.00003	18.29	1.50
$CR_Q$	0.0017	0.0008	9.90	0.88	0.00035	0.00007	14.25	1.19	0.00034	0.00059	15.54	1.20
$Cp_Q$	0.0043	0.0017	8.27	0.85	0.00056	0.00018	12.26	1.31	0.00037	0.00009	13.99	1.46
$AIC_Q$	0.0017	0.0007	10.72	1.04	0.00036	0.00007	14.91	1.28	0.00030	0.00004	15.90	1.37
$MDL_Q$	0.0042	0.0017	8.31	0.89	0.00070	0.00028	11.59	1.19	0.00058	0.00024	12.12	1.46
Carasso	$nl = 10^{-3}$				$nl = 10^{-4}$				$nl = 10^{-5}$			
$e_Q$	0.1014	0.0314	15.25	1.91	0.0162	0.0058	22.10	2.07	0.0087	0.0029	25.10	2.36
$CR_Q$	0.1344	0.1545	11.81	1.24	0.0321	0.0223	19.59	1.64	0.0137	0.0064	22.36	1.76
$Cp_Q$	0.2307	0.1012	9.93	1.61	0.0371	0.0198	16.74	2.20	0.0187	0.0081	19.26	1.94
$AIC_Q$	0.1351	0.0432	12.46	1.49	0.0220	0.0084	19.34	1.76	0.0142	0.0064	20.82	1.97
$MDL_Q$	0.1743	0.0637	11.01	1.44	0.0623	0.0410	14.72	2.65	0.0493	0.0385	15.72	2.92
Delves	$nl = 10^{-5}$				$nl = 10^{-6}$				$nl = 10^{-7}$			
$e_Q$	0.0260	0.0038	8.632	1.90	0.0127	0.0020	16.20	2.29	0.0028	0.0003	38.06	2.58
$CR_Q$	0.0341	0.0136	8.368	1.13	0.0201	0.0217	12.74	1.53	0.0032	0.0006	27.22	2.46
$Cp_Q$	0.0365	0.0071	4.79	0.99	0.0202	0.0033	8.78	1.56	0.0087	0.0017	17.60	2.42
$AIC_Q$	0.0320	0.0073	9.55	1.38	0.0148	0.0031	12.89	1.97	0.0079	0.0018	18.88	2.54
$MDL_Q$	0.0335	0.0066	5.332	1.21	0.0214	0.0045	8.19	1.77	0.0177	0.0047	9.73	2.37

Задача Phillips [29] — решение уравнения Фредгольма первого рода  $\int_a^b K(s,t)f(t)dt = g(s)$ , где  $f$  — решение,  $f(t) = 1 + \cos(\pi t/3)$  при  $|t| < 3$ ,  $f(t) = 0$  при  $|t| \geq 0$ ;  $K$  — ядро,  $K(s,t) = f(s-t)$ ; правая часть  $g$  имеет вид  $g(s) = (6 - |s|) \times (1 + 0.5 \cos(\pi s/3)) + (9/2\pi) \sin(\pi |s|/3)$ . Интервал интегрирования  $[-6, 6]$ . Дискретизация осуществляется методом Галёркина. Размер матрицы  $A$  кратен 4. В этой задаче вектор  $Ax$  не точно равен  $y_0$ .

Задача Carasso [29] — реконструкция временного профиля источника тепла на основе измерения температуры с фиксированного расстояния, в которой обратное уравнение теплового потока — интегральное уравнение Вольтерры первого рода  $\int_a^x K(x,t)f(t)dt = g(x)$  с интервалом интегрирования  $[0, 1]$ ,  $K(s,t) = f(s-t)$ ,  $t^{3/2} / (2\pi^{1/2} \exp(-1/4t))$ , — ядро. Интегральное уравнение дискретизируется методом квадратур с использованием простой коллокации и правила средней точки с  $N$  точками. Конструируется точное решение  $x$ , затем вычисляется  $y_0 = Ax$ , т.е. в этой задаче  $Ax$  точно равно  $y_0$ .

Задача Delves [29] — вычисление второй производной. Проводится дискретизация аналитически заданного уравнения Фредгольма первого рода с ядром  $K$ ,  $K(s,t) = s(t-1)$  при  $s < t$ ,  $K(s,t) = t(s-1)$  при  $s \geq t$ , которое является функцией Грина второй производной, с правой частью  $g$ ,  $g(s) = (s^3 - s)/6$ , решением  $f$ ,  $f(t) = t$ . В этой задаче вектор  $Ax$  точно равен  $y_0$ .

**Исследование критерия  $CR_Q$ .** В табл. 1 приведены результаты ( $M(e)$  и  $M(k)$  — средние значения соответственно ошибки решения и оптимальной размерности модели, с.к.о. — стандартное отклонение этих значений) решения ДНЗ Phillips, Carasso, Delves с использованием метода случайного проецирования, где размерность матрицы  $Q$  определялась по критериям выбора модели и предложенному критерию  $CR_Q$ . Значения дисперсии шума в векторе  $y$  выбирались в диапа-

**Таблица 2.** Результаты решения ДНЗ с использованием метода усеченного сингулярного разложения

Задача	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
Phillips	$nl = 10^{-3}$				$nl = 10^{-4}$				$nl = 10^{-5}$			
$\epsilon_{SVD}$	0.00175	0.00065	11.59	1.62	0.00039	$8.62 \cdot 10^{-5}$	16.81	0.83	0.00022	$8.61 \cdot 10^{-6}$	22.03	1.29
$CR_{SVD}$	0.00304	0.00251	12.89	1.84	0.00051	0.000248	17.84	1.62	0.00023	$2.81 \cdot 10^{-5}$	23.46	2.15
$Cp_{SVD}$	0.00395	0.00136	8.54	0.54	0.00060	$7.74 \cdot 10^{-5}$	12.87	0.34	0.00024	$2.11 \cdot 10^{-6}$	17.00	0.00
$AIC_{SVD}$	0.00360	0.00385	12.13	1.06	0.00050	0.000253	16.64	0.99	0.00024	$1.45 \cdot 10^{-5}$	19.21	2.14
$MDL_{SVD}$	0.00442	0.00125	8.37	0.54	0.00073	$8.93 \cdot 10^{-5}$	12.27	0.45	0.00024	$2.11 \cdot 10^{-6}$	17.00	0.00
Carasso	$nl = 10^{-3}$				$nl = 10^{-4}$				$nl = 10^{-5}$			
$\epsilon_{SVD}$	0.1551	0.0443	15.28	1.77	0.022632	$5.58 \cdot 10^{-3}$	24.25	2.68	0.001468	$5.46 \cdot 10^{-4}$	36.75	2.54
$CR_{SVD}$	0.2261	0.1766	16.18	2.73	0.03248	0.017817	26.08	2.86	0.002684	$3.76 \cdot 10^{-4}$	29.06	0.28
$Cp_{SVD}$	0.3645	0.0515	9.50	0.79	0.038571	0.00802	17.74	0.49	0.001591	$6.18 \cdot 10^{-4}$	37.48	1.97
$AIC_{SVD}$	0.2019	0.0749	13.55	1.23	0.031491	0.005523	19.64	1.45	0.012797	$5.36 \cdot 10^{-3}$	23.55	2.19
$MDL_{SVD}$	0.2345	0.0716	11.94	1.31	0.072886	$4.53 \cdot 10^{-2}$	16.02	2.18	0.031828	$1.4 \cdot 10^{-5}$	18.00	0.00
Delves	$nl = 10^{-4}$				$nl = 10^{-5}$				$nl = 10^{-6}$			
$\epsilon_{SVD}$	0.02992	0.0019	5.98	1.5	0.013953	$2.44 \cdot 10^{-3}$	15.99	1.89	0.002524	$9.47 \cdot 10^{-4}$	34.03	1.98
$CR_{SVD}$	0.03441	0.010	6.27	2.54	0.016716	0.006089	17.24	2.61	0.002954	$1.28 \cdot 10^{-3}$	34.14	3.30
$Cp_{SVD}$	0.03155	0.0011	4.00	0	0.028479	0.003093	5.65	2.36	0.007518	$4.46 \cdot 10^{-4}$	19.24	1.28
$AIC_{SVD}$	0.03702	0.0246	4.81	1.43	0.016903	0.003051	14.36	1.65	0.007001	$4.14 \cdot 10^{-4}$	20.57	0.92
$MDL_{SVD}$	0.03155	0.0011	4.00	0.00	0.030635	$1.09 \cdot 10^{-5}$	4.00	0.00	0.030626	$1.09 \cdot 10^{-7}$	4.00	0.00

зоне  $J_y \min < \sigma^2 < J_y \max$ , что обеспечивало  $1 < k_{opt} < N$ . Усреднение проводилось по 100 реализациям уровня шума  $nl$ .

При вычислении среднего значения  $M(e)$  и с.к.о. ошибки решения размерность матрицы  $\mathbf{Q}$  определялась по известным критериям выбора модели (Маллоуза  $Cp_{\mathbf{Q}}$ , Акаике  $AIC_{\mathbf{Q}}$ , минимальной длины описания  $MDL_{\mathbf{Q}}$ ) и по предложенному критерию  $CR_{\mathbf{Q}}$ . Анализ результатов показывает, что наименьшее значение ошибки решения обеспечивается, в основном, при использовании критериев  $AIC_{\mathbf{Q}}$  и  $CR_{\mathbf{Q}}$ .

**Исследование критерия  $CR_{SVD}$ .** Для исследования эффективности предложенного критерия выбора модели для решения ДНЗ методом усеченного сингулярного разложения проведено вычисление среднего значения  $M(e)$  и с.к.о. ошибки решения для случаев определения оптимального числа компонент сингулярного разложения по предложенному критерию  $CR_{SVD}$  и по критериям выбора модели (Маллоуза  $Cp_{SVD}$  [7], Акаике  $AIC_{SVD}$  [6], минимальной длины описания  $MDL_{SVD}$  [8]). Анализ результатов в табл. 2 показывает, что наименьшее значение ошибки решения обеспечивается при использовании критерия  $CR_{SVD}$ .

Сравнивая результаты решения ДНЗ методом на основе сингулярного разложения и случайным проецированием, видим, что при использовании критериев  $CR_{SVD}$  и  $CR_{\mathbf{Q}}$  метод на основе сингулярного разложения обеспечивает более высокую точность.

**Исследование зависимостей  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  для метода случайного проецирования.** Графики зависимостей  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  для ошибки восстановления истинного сигнала и вектора измерений при решении дискретной некорректной задачи методом случайного проецирования приведены на рис. 3. При их построении проводилось усреднение по 500 реализациям матрицы  $\mathbf{Q}$ .

Из рис. 3 видно, что при решении ДНЗ методом случайного проецирования близки зависимости  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  для ошибки восстановления истинного сигнала



и ошибки восстановления выхода, а значит, близки и положения (т.е.  $k$ ) минимумов зависимостей ошибки восстановления истинного сигнала и восстановления вектора измерений от  $k$ . Это позволяет использовать ошибку восстановления выхода и соответствующий критерий выбора оптимальной размерности матрицы  $\mathbf{Q}$  для определения минимума ошибки восстановления истинного сигнала.

Отметим, что, как следует из анализа зависимостей  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$ , для метода на основе случайного проецирования графики зависимостей  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  для исследованных задач являются существенно более гладкими.

Для задачи Carasso (см. рис. 3, б) наличие локальных минимумов возможно только при уровнях шума 0.03–0.01. В остальном диапазоне шумов зависимости  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  для данной задачи не имеют возрастающих участков, а значит, минимум зависимости ошибки от  $k$  единственный. Минимум зависимости ошибки от  $k$  для задачи Phillips (см. рис. 3, а) единственный при любом уровне шума в силу невозрастания зависимостей  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$ . Исследование причин такого поведения зависимостей  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  после усреднения по случайным матрицам в методе случайного проецирования является направлением дальнейших исследований.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработаны методы регуляризации ДНЗ, основанные на представлении решения линейной моделью, оптимальный подбор числа членов которой обеспечивает устойчивость решения.

Для разработки критерия выбора оптимальной размерности модели получены неравенства, характеризующие размерность модели  $k$ , при которой ошибка минимальна. С помощью неравенств можно сравнить оптимальную размерность модели  $k$  для ошибки восстановления истинного сигнала и ошибки восстановления незашумленного вектора измерений, используя отношение изменений детерминированной и стохастической составляющих этих ошибок в зависимости от  $k$ .

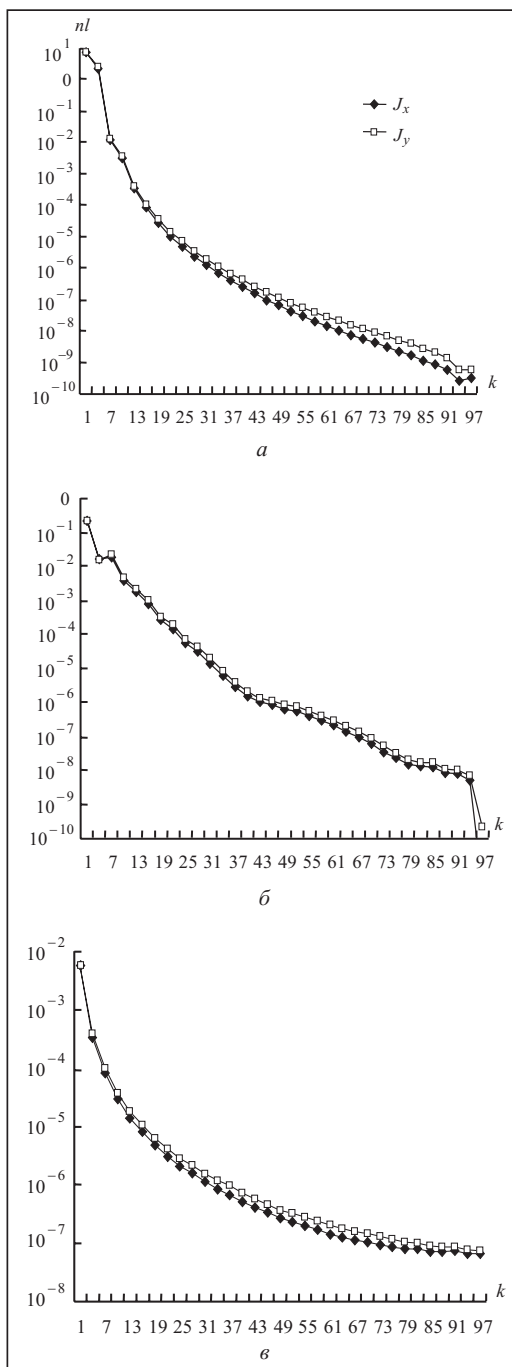


Рис. 3. Зависимости  $J_x(k)$ ,  $J_y(k)$  при решении ДНЗ методом случайного проецирования для задач Phillips (а), Carasso (б), Delves (в)

Для усеченного сингулярного разложения аналитическое исследование показало, что оптимальная размерность модели для ошибок восстановления истинного сигнала и незашумленного вектора измерений всегда совпадает. Поэтому зависимость ошибки восстановления незашумленного вектора измерений от размерности модели можно использовать для определения оптимальной размерности модели.

Разработаны критерии для определения оптимального числа компонент модели при решении дискретной некорректной задачи методом усеченного сингулярного разложения  $CR_{SVD}$  и методом случайного проецирования  $CR_Q$ . Результаты экспериментального исследования показали, что для метода случайного проецирования наименьшее значение ошибки решения (в основном) обеспечивается при использовании критериев  $AIC_Q$  и  $CR_Q$ . Для метода усеченного сингулярного разложения наименьшее значение ошибки решения (по сравнению с критериями Маллоуза, Акаике, минимальной длины описания) обеспечивается при использовании критерия  $CR_{SVD}$ . Преимущество применения метода случайного проецирования по сравнению с методом на основе сингулярного разложения состоит в меньшей вычислительной сложности [12] вследствие уменьшения размера результирующей матрицы ( $n \times k$ ) после проецирования относительно исходной матрицы ( $n \times n$ ) и соответствующих затрат на выполнение SVD.

Перспективными направлениями исследований является дальнейшее снижение вычислительной сложности получения решения ДНЗ и усреднение по реализациям случайной матрицы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хмелевский В.К., Бондаренко В.М. Электроразведка. — М.: Недра, 1999. — 438 с.
2. Забулонов Ю.Л., Коростиль Ю.М., Ревунова Е.Г. Оптимизация решения обратной задачи по восстановлению функции плотности распределения поверхностных загрязнений // Сб. науч. тр. ИПМЭ НАН Украины «Моделирование и информационные технологии». — 2006. — С. 77–83.
3. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Intelligent gamma-ray data processing for environmental monitoring // Intelligent Data Analysis in Global Monitoring for Environmental and Security. — 2009. — P. 124–145.
4. Hansen P.C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical Aspects of linear inversion. — Philadelphia: SIAM, 1998. — 247 p.
5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solution of ill-posed problems. — Washington: V.H. Winston, 1977. — 231 p.
6. Akaike H. A new look at the statistical model identification // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — **19**, N 6. — P. 716–723.
7. Mallows C.L. Some comments on  $C_p$  // Technometrics. — 1973. — **15**, N 4. — P. 661–675.
8. Hansen M., Yu B. Model selection and minimum description length principle // J. Amer. Statist. Assoc. — 2001. — **96**. — P. 746–774.
9. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems // International Journal Information Theories and Applications. — 2009. — **16**, N 2. — P. 176–192.
10. Revunova E.G. Study of error components for solution of the inverse problem using random projections // Mathematical Machines and Systems. — 2010. — N 4. — P. 33–42.
11. Revunova E.G. Using model selection criteria for solving discrete ill-posed problems by randomized algorithms // The 4th International Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2011) Kyiv. — 2011. — P. 89–97.
12. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Randomized method for solving discrete ill-posed problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — **48**, N 4. — P. 621–635.
13. Ревунова Е.Г. Подход рандомизации в задачах восстановления сигналов по результатам непрямых измерений // Кибернетика и вычислительная техника. — 2013. — Вып. 173. — С. 35–46.

14. Revunova E.G. Randomization approach to the reconstruction of signals resulted from indirect measurements // The 4th International Conference on Inductive Modelling (ICIM'2013) Kyiv. — 2013. — P. 203–208.
15. Ревунова Е.Г. Исследование метода решения дискретных некорректных задач на основе случайного проецирования // Управляющие системы и машины. — 2014. — № 4 (252). — С. 41–47.
16. Revunova E.G. Analytical study of the error components for the solution of discrete ill-posed problems using random projections // Cybernetics and Systems Analysis — 2015 — **51**, N 6 — P. 978–991.
17. Revunova E.G., Tyshchuk A.V. A model selection criterion for solution of discrete ill-posed problems based on the singular value decomposition // The 7th International Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2015), Kyiv–Zhukyn. July 20–24, 2015. — P. 43–47.
18. Rachkovskij D.A., Misuno I.S., Slipchenko S.V. Randomized projective methods for construction of binary sparse vector representations // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — **48**, N 1. — P. 146–156.
19. Rachkovskij D.A. Vector data transformation using random binary matrices // Cybernetics and Systems Analysis. — 2014. — **50**, N 6. — P. 960–968.
20. Kussul E.M., Baidyk T.N., Lukovich V.V., Rachkovskij D.A. Adaptive neural network classifier with multfloat input coding // 6th Intern. Conf. “Neural Networks and their Industrial and Cognitive Applications”, Neuro-Nimes'93. — 1993. — P. 209–216.
21. Lukovich V.V., Goltsev A.D., Rachkovskij D.A. Neural network classifiers for micromechanical equipment diagnostics and micromechanical product quality inspection // 5th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing EUFIT'97. — 1997 — **1**. — P. 534–536.
22. Kussul E.M., Kasatkina L.M., Rachkovskij D.A., Wunsch D.C. Application of random threshold neural networks for diagnostics of micro machine tool condition // Neural Networks Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence. — 1998. — **1**. — P. 241–244.
23. Markman A.B., Rachkovskij D.A., Misuno I.S., Revunova E.G. Analogical reasoning techniques in intelligent counterterrorism systems // International Journal Information Theories and Applications. — 2003. — **10**, N 2. — P. 139–146.
24. Dedieu J.-P., Novitsky D. Symplectic methods for the approximation of the exponential map and the newton iteration on Riemannian submanifolds // Journal of Complexity. — 2005. — **21**. — P. 487–501.
25. Reznik A.M., Galinskaya A.A., Dekhtyarenko O.K., Nowicki D.W. Preprocessing of matrix QCM sensors data for the classification by means of neural network // Sensors and Actuators B. — 2005. — **106**. — P. 158–163.
26. Nowicki D.W., Dekhtyarenko O.K. Averaging on Riemannian manifolds and unsupervised learning using neural associative memory // Proc. ESANN 2005, Bruges, Belgium, April. — 2005. — **1**. — P. 27–29.
27. Rachkovskij D.A., Slipchenko S.V. Similarity-based retrieval with structure-sensitive sparse binary distributed representations // Computational Intelligence. — 2012. — **28**, N 1. — P. 106–129.
28. Нейросетевые распределенные представления для интеллектуальных информационных технологий и моделирования мышления / В.И. Гриценко, Д.А. Рачковский, А.Д. Гольцев, В.В. Лукович, И.С. Мисуно, Е.Г. Ревунова, С.В. Слипенко, А.М. Соколов, С.А. Талаев // Кибернетика и вычислительная техника. — 2013. — Вып. 173. — С. 7–24.
29. Hansen P.C. Regularization tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms. — 1994. — **6**. — P. 1–35.
30. Demmel J.W. Applied numerical linear algebra. — Philadelphia: SIAM, 1997. — 419 p.
31. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
32. Nowicki D., Verga P., Siegelmann H. Modeling reconsolidation in kernel associative memory // PLoS ONE 8(8): e68189. — 2013. — DOI:10.1371/journal.pone.0068189.
33. Nowicki D., Siegelmann H. Flexible kernel memory // PLoS ONE. — 2010. 5(6): e10955. doi:10.1371/journal.pone.0010955.
34. Кириченко Н.Ф., Резник А.М., Щетинюк С.П. Псевдообращение матриц в проблеме проектирования ассоциативной памяти // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — № 3. — С. 18–27.

35. Fierro R.D., Golub G.H., Hansen P.C., O'Leary D.P. Regularization by truncated total least squares // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1997. — **18**, N 1. — P. 1223–1241.
36. Reichel L., Rodriguez G. Old and new parameter choice rules for discrete ill-posed problems // Numerical Algorithms. — 2013. — **63**, N 1. — P. 65–87.
37. Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization // BIT. — 1987. — **27**. — P. 534–553.
38. Fierro R.D., Hansen P.C. Low-rank revealing two-sided orthogonal decompositions // Numer. Algorithms. — 1997. — **15**. — P. 37–55.
39. Chan T.F., Hansen P.C. Some applications of the rank revealing QR factorization // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1992. — **13**. — P. 727–741.
40. Chan T.F., Hansen P.C. Low-rank revealing QR factorizations // Numer. Linear Algebra Appl. — 1994. — **1**. — P. 33–44.
41. Belloni A., Chernozhukov V. Least squares after model selection in high-dimensional sparse models // Bernoulli. — 2013. — **19**, N 2. — P. 521–547.
42. Bayati M., Erdogdu M.A., Montanari A. Estimating LASSO risk and noise level // NIPS 2013, Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems. — P. 944–952.
43. Fan J., Guo S., Hao N. Variance estimation using refitted cross-validation in ultrahigh dimensional regression // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology). — 2012. — **74**. — P. 1467–9868.
44. Fedorov V.V. Theory of optimal experiments. — New York: Academic Press, 1972. — 292 p.
45. Stewart G.W. On the perturbation of pseudo-inverses, projections and linear least squares problems // SIAM Review. — 1977. — **19**, N 4. — P. 634–662.

*Надійшла до редакції 11.02.2015*

**О.Г. Ревунова**

**КРИТЕРІЙ ВИБОРУ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
ДИСКРЕТНИХ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ СИНГУЛЯРНОГО  
РОЗКЛАДАННЯ ТА ВИПАДКОВОГО ПРОЕЦІЮВАННЯ**

**Анотація.** Розроблено критерії для визначення оптимального числа компонент лінійної моделі для розв'язання дискретної некоректної задачі методом зрізаного сингулярного розкладання і методами випадкового проєціювання. Для цього досліджено поведінку залежностей похибки вектора розв'язку і похибки відновлення вектора правої частини від розмірності моделі та їхніх мінімумів. Проведено також експериментальне дослідження розроблених критеріїв.

**Ключові слова:** дискретна некоректна задача, зрізане сингулярне розкладання, випадкове проєціювання, критерії вибору моделі.

**E.G. Revunova**

**LINEAR MODEL SELECTION CRITERIA FOR THE SOLUTION  
OF DISCRETE ILL-POSED PROBLEMS ON THE BASIS OF SINGULAR VALUE  
DECOMPOSITION AND RANDOM PROJECTION**

**Abstract.** The criteria are developed to determine the optimal number of linear model components for the solution of discrete ill-posed problem by truncated singular value decomposition and the method of random projection. To develop the model selection criteria, we studied the behavior of solution vector error and recovered right side vector error versus the dimension of the model and their minima. The results of the experimental investigation of the developed criteria are also provided.

**Keywords:** discrete ill-posed problem, truncated singular value decomposition, random projection, model selection criteria.

**Ревунова Елена Георгиевна,**

канд. техн. наук, старший научный сотрудник Международного научно-учебного центра информационных технологий и систем НАН Украины и МОН Украины, Киев,  
e-mail: egrevunova@gmail.com.