

17. Wheeler L. T. Stress minimum forms for elastic solids / L. T. Wheeler // ASME. Appl. Mech. Rev. – 1992. – Vol. 45, Issue 1. – P. 1–12.
18. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic solids with infinite branches / G. P. Cherepanov // J. Appl. Mech. ASME. – 1995. – Vol. 62, Issue 2. – P. 419–422.
19. Savruk M. P. Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates / M. P. Savruk, V. S. Kravets // Materials Sci. – 2002. – Vol. 38, Issue 1. – P. 34–46.
20. Мир-Салим-заде М. В. Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 10–14.
21. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 5. – С. 114–123.
22. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
23. Баренблатт Г. И. О хрупких трещинах продольного сдвига / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // Прикл. математика и механика – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1110–1119.

Поступила в редакцию 19.10.17

¹ Ю. Д. Ковалев, канд. физ.-мат. наук
² Е. А. Стрельникова, д-р техн. наук
¹ Д. В. Кушнир, канд. физ.-мат. наук
¹ Ю. В. Шрамко, канд. физ.-мат. наук

¹ Сумский государственный университет, г. Сумы,
 e-mail: dmytro.kushnir@gmail.com

² Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков

УДК 539.3

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ, С ТОРЦАМИ, ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ (СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

Розв'язано задачу щодо гармонічних пружних коливань шару з двома наскрізними отворами, на поверхнях яких діє нормальний пульсуючий тиск. Граничну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, що розв'язана чисельно. Наведено приклади, в яких досліджено особливості розподілу окружного напруження за частотою залежно від відстані між отворами та коефіцієнта Пуассона.

Ключові слова: гармонічні коливання, шар з двома отворами, інтегральні рівняння.

Введение

В трехмерных элементах конструкций дефекты и разрушения часто возникают и распространяются в местах наибольшей концентрации напряжений (отверстия, трещины, углы, включения). Наличие отверстий в структурах может быть обусловлено конструкционными требованиями либо технологическими особенностями (даже при тщательном проектировании). Частный случай граничных условий типа «плоской диафрагмы» на основаниях плиты может приобрести значительный интерес в условиях современных технологий напыления пленок, различных покрытий с помощью углеродных нанотрубок [1]. Это связано с тем, что модуль Юнга подобных покрытий достигает значений нескольких ГПа. Расчет пространственных полей перемещений и напряжений вблизи криволинейной границы отверстия является сложной задачей, особенно в условиях динамических нагрузок, и в литературе имеется немного аналитических решений задач теории упругости для многосвязных цилиндрических тел с нетривиальной геометрией и частными случаями граничных условий.

В настоящее время метод однородных решений представляет собой один из основных подходов к решению граничных задач для тел конечных размеров. Он нашел применение в теории тонких и толстых плит, при исследовании деформации конечных, толстостенных, многосвязных цилиндров и в ряде других случаев. Решение задачи находится с помощью однородных решений, которые являются интегралами основных уравнений теории упругости и удовлетворяют нулевым граничным услови-

© Ю. Д. Ковалев, Е. А. Стрельникова, Д. В. Кушнир, Ю. В. Шрамко, 2017

ям на части поверхности тела, совпадающей с одной из координатных поверхностей. Этот метод применительно к статическим задачам для слоя был развит А. И. Лурье в работе [2].

На основе данного метода было решено множество статических задач для тел с отверстиями разных конфигураций, а также для многосвязных цилиндров [3, 4]. Осесимметричная задача о равновесии упругого слоя с цилиндрической полостью решена в работе [5]. Многосвязные области также исследовались на основе метода однородных решений в [6, 7, 8]. В статьях [9, 10] решены задачи о колебаниях изотропных и ортотропных пластин с граничными условиями типа плоского торца или диафрагмы.

Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим упругий слой $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$ (рис. 1), ослабленный сквозными вдоль оси Ox_3 полостями-отверстиями, поперечные сечения которых представляют собой непересекающиеся достаточно гладкие контуры L_n ($n = 1, 2$) ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$).

Для определенности под контуром L_1 будем понимать направляющий контур правого отверстия, а под контуром L_2 – левого отверстия.

На цилиндрических поверхностях отверстий действует пульсирующее давление $N = \text{Re}(N_0 e^{-i\omega t})$, $N_0 = C(h^2 - x_3^2)$, $C = \text{const}$.

Пусть механические величины имеют вид

$$u_i = \text{Re}(U_i e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{ij} = \text{Re}(\sigma_{ij}^0 e^{-i\omega t}) \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (1)$$

амплитуды компонентов заданной нагрузки раскладываются в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$, а на торце слоя выполняется условие

$$u_1(x_1, x_2, \pm h, t) = u_2(x_1, x_2, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0. \quad (2)$$

Запишем амплитудные компоненты вектора перемещения в виде

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3 \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

$$U_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3$$

где $\gamma_k = (2k+1)\pi/2h$.

Представления амплитудных компонентов вектора перемещения (3) автоматически удовлетворяют условиям (2) на торцах слоя. Для описания стационарного волнового процесса в изотропном слое будем исходить из уравнений движения

$$\sigma \text{grad} \theta + \Delta \vec{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе.

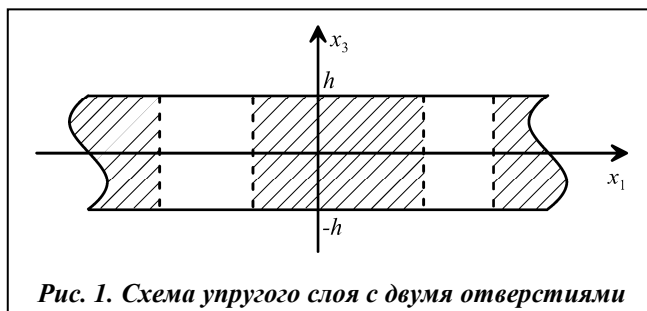


Рис. 1. Схема упругого слоя с двумя отверстиями

Подставляя (1) и выражения (3), (4) для амплитуд перемещений в уравнения движения, приходим к системе

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_k^{(2)}U_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k &= 0 \quad (i=1,2) \\ \mathfrak{x}_k^{(2)}U_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_k^{(2)} &= \nabla^2 - \beta_k^2, \quad (\beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \omega/C_2), \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ \theta_k &= \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} + \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i. \end{aligned}$$

Непосредственно из системы (5) находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_k^{(1)}\theta_k &= 0, \\ \mathfrak{x}_k^{(1)} &= \nabla^2 - (\gamma_k^2 - \alpha_1^2) \quad (\alpha_1 = \omega/C_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Введём функцию Ψ_k соотношением $\theta_k = \mathfrak{x}_k^{(2)}\Psi_k$. Из (6) вытекает, что $\mathfrak{x}_k^{(2)}\mathfrak{x}_k^{(1)}\Psi_k = 0$. С учётом связи между θ_k и Ψ_k интегрирование системы (5) даёт

$$\begin{aligned} u_{ik} &= -\sigma \partial_i \Psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \partial_k \Psi_k + \omega_{3k} \\ \mathfrak{x}_k^{(2)}\omega_{ik} &= 0 \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (7)$$

Потребовав, чтобы соотношения $\theta_k = \mathfrak{x}_k^{(2)}\Psi_k$ выполнялись фактически, приходим к равенствам

$$\omega_{ik} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k, \quad \omega_{3k} = -\frac{1}{\gamma_k}(1 + \sigma)\mathfrak{x}_k^{(1)}\Psi_k, \quad (8)$$

где Ω_k – произвольное решение уравнения $\mathfrak{x}_k^{(2)}\Omega_k = 0$.

Учитывая (7), (8), окончательно получаем

$$\begin{aligned} U_{1k} - iU_{2k} &= 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ U_{3k} &= -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[\gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] \Omega_k^{(1)}, \\ \theta_k &= (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\Omega_k^{(i)}$ – произвольное решение уравнения $\mathfrak{x}_k^{(i)}\Omega_k = 0$; функции Ω_k определяют поворот элемента вокруг оси Ox_3 ; u_{ik} – амплитуды соответствующих величин.

Интегральные представления функций, которые входят в (9), представим в виде

$$\begin{aligned} \Omega_k^{(1)} &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} K_0(\lambda_k r_j) ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\lambda_k r_j) d\zeta_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\lambda_k r_j) d\bar{\zeta}_j, \\ \Omega_k^{(2)} &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} q_{1k}^{(j)} K_0(\beta_k r_j) ds_j + \int_{L_j} q_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\beta_k r_j) d\zeta_j + \int_{L_j} q_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\beta_k r_j) d\bar{\zeta}_j, \\ \Omega_k &= \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} f_{1k}^{(j)} K_0(\beta_k r_j) ds_j + \int_{L_j} f_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\beta_k r_j) d\zeta_j + \int_{L_j} f_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\beta_k r_j) d\bar{\zeta}_j \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\lambda_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_1^2, \quad r_j = |\zeta_j - z|, \quad \zeta_j = \xi_1^{(j)} + i\xi_2^{(j)} \in L = \bigcup L_j, \quad z = x_1 + ix_2,$$

$K_0(\gamma r)$ – функция Макдональда нулевого порядка; ds_j – элемент дуги контура L_j ; плотности $p_{ik}^{(j)}$, $q_{ik}^{(j)}$, $f_{ik}^{(j)}$ ($i = \overline{1,3}, j = 1, 2$) пока что неизвестны.

Граничные условия на L запишем в форме

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT) \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) &= 2(N + iT) \\ (\sigma_{13} - \sigma_{23}) e^{i\psi} + (\sigma_{13} + i\sigma_{23}) e^{-i\psi} &= 2Z \end{aligned} \quad (11)$$

где ψ – угол между внешней нормалью к контуру L и осью Ox_1 .

Используя закон Гука и формулы (9), запишем условия (11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(N_k - iT_k) &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2] \Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + 4\sigma e^{2i\psi} \partial_{zz}^2 (i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu}(N_k + iT_k) &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2] \Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2 \Omega_k^{(2)} + 4\sigma e^{-2i\psi} \partial_{zz}^2 (-i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu}Z_k &= e^{i\psi} \partial_z (\tilde{a}_k \Omega_k^{(1)} + \tilde{b}_k \Omega_k^{(2)} + i\tilde{c}_k \Omega_k) + e^{-i\psi} \partial_z (\tilde{a}_k \Omega_k^{(1)} + \tilde{b}_k \Omega_k^{(2)} - i\tilde{c}_k \Omega_k), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \quad \tilde{a}_k = a_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{b}_k = b_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{c}_k = \sigma\gamma_k, \quad a_k = \sigma\gamma_k, \\ b_k &= \sigma \left[\gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma\gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right]. \end{aligned}$$

Система сингулярных интегральных уравнений

Краевая задача (12) с учетом соотношений (10) сводится с помощью обычной процедуры к системе, состоящей из шести сингулярных интегральных уравнений (для каждого фиксированного k).

Для её компактной записи введём в (12) дополнительный индекс “ n ” ($n = 1, 2$), соответствующий двум направляющим замкнутым контурам L_1 и L_2 . С учетом этого системы сингулярных интегральных уравнений запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(N_k^{(n)} - iT_k^{(n)}) &= -p_{2k}^{(n)} r_{2kn}^* - p_{3k}^{(n)} r_{2kn}^* + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} G_{1kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} G_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} G_{3kjn}^* ds_j \right\} \\ \frac{1}{\mu}(N_k^{(n)} + iT_k^{(n)}) &= -p_{2k}^{(n)} \tilde{r}_{1kn} - p_{3k}^{(n)} \tilde{r}_{2kn} + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} \tilde{G}_{1kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \tilde{G}_{2kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \tilde{G}_{3kjn} ds_j \right\}; \\ \frac{1}{\mu}Z_k^{(n)} &= -p_{2k}^{(n)} \tilde{r}_{1kn}^* + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} \tilde{G}_{1kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \tilde{G}_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \tilde{G}_{3kjn}^* ds_j \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} if_{1k}^{(j)} - p_{1k}^{(j)} - q_{1k}^{(j)} &= 0, \quad if_{1k}^{(j)} + p_{1k}^{(j)} + q_{1k}^{(j)} = 0, \quad \tilde{a}_{k-2k} p_{1k}^{(j)} - \tilde{b}_j q_{2k}^{(j)} + i\tilde{c}_k f_{2k}^{(j)} = 0, \\ -p_{2k}^{(j)} - q_{2k}^{(j)} + if_{2k}^{(j)} &= 0, \quad \tilde{a}_k p_{3k}^{(j)} + \tilde{b}_k q_{3k}^{(j)} - i\tilde{c}_k f_{3k}^{(j)} = 0, \quad p_{3k}^{(j)} + q_{3k}^{(j)} + if_{3k}^{(j)} = 0; \end{aligned}$$

$$f_{1k}^{(j)} = 0, \quad q_{1k}^{(j)} = -p_{1k}^{(j)}, \quad f_{2k}^{(j)} = d_{1k}^* p_{2k}^{(j)}, \quad q_{2k}^{(j)} = d_{1k}^* p_{2k}^{(j)}, \quad f_{3k}^{(j)} = \bar{d}_{1k}^* p_{3k}^{(j)}, \quad q_{3k}^{(j)} = \bar{d}_{1k}^* p_{3k}^{(j)};$$

$$d_{1k}^* = -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad \tilde{d}_{1k} = -\frac{d_{1k}}{d_{2k}}, \quad d_{1k} = \tilde{a}_k + \tilde{c}_k, \quad d_{2k} = \tilde{b}_k + \tilde{c}_k; \quad \sigma_{n0} = e^{2i\Psi_{n0}},$$

$$r_{1kn}^* = r_{1k} - \sigma_{n0} r_{1kn}, \quad r_{2kn}^* = r_{2k} - \sigma_{n0} r_{2kn},$$

$$\tilde{r}_{1kn} = r_{1k} - \bar{\sigma}_{n0} r_{3kn}, \quad \tilde{r}_{2kn} = r_{2k} - \bar{\sigma}_{n0} r_{4kn}$$

$$\tilde{r}_{1kn}^* = e^{i\Psi_{n0}} r_{5kn} + e^{-i\Psi_{n0}} r_{6kn},$$

$$r_{1k} = -(l_{1k} - l_{2k} \tilde{d}_{1k}) l^*, \quad r_{2k} = -r_{1k},$$

$$r_{1kn} = 4\sigma \{l_{1kn}(\beta_k) - l_{1kn}(\lambda_k)\}, \quad r_{2kn} = 4\sigma \{(1 + 2\tilde{d}_{1k}) l_{1kn}(\beta_k) + l_{1kn}(\lambda_k)\},$$

$$r_{3kn} = 4\sigma \{(1 + 2\tilde{d}_{1k}) \bar{l}_{1kn}(\beta_k) - \bar{l}_{1kn}(\lambda_k)\}, \quad r_{4kn} = 4\sigma \{\bar{l}_{1kn}(\beta_k) - \bar{l}_{1kn}(\lambda_k)\},$$

$$r_{5kn} = (\tilde{a}_k + \tilde{b}_k) l_n^*, \quad r_{6kn} = \bar{r}_{5kn};$$

$$l_{1k} = -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma \lambda_k^2], \quad l_{2k} = -\sigma \beta_k^2, \quad l^* = \frac{i\pi}{2}, \quad l_n^* = \frac{\pi}{2} e^{-i\Psi_{n0}},$$

$$l_{1kn}(\lambda_k) = \frac{i\pi \lambda_k^2}{8} e^{-2i\Psi_{n0}}, \quad l_{1kn}(\beta_k) = \frac{i\pi \beta_k^2}{8} e^{-2i\Psi_{n0}};$$

$$G_{1kjn}^* = G_{1kjn} - \sigma_{n0} G_{4kjn}, \quad G_{2kjn}^* = G_{2kjn} - \sigma_{n0} G_{5kjn},$$

$$G_{3kjn}^* = G_{3kjn} - \sigma_{n0} G_{6kjn}, \quad \tilde{G}_{1kjn} = G_{1kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{7kjn},$$

$$\tilde{G}_{2kjn} = G_{2kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{8kjn}, \quad \tilde{G}_{3kjn} = G_{3kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{9kjn},$$

$$\tilde{G}_{3kjn}^* = e^{i\Psi_{n0}} G_{12kjn} + e^{-i\Psi_{n0}} G_{13kjn}, \quad \tilde{G}_{2kjn}^* = e^{i\Psi_{n0}} G_{11kjn} + e^{-i\Psi_{n0}} G_{14kjn},$$

$$\tilde{G}_{3kjn}^* = e^{i\Psi_{n0}} G_{12kjn} + e^{-i\Psi_{n0}} G_{15kjn},$$

$$G_{1kjn} = l_{1k} k_0 (\lambda_k r_{jn0}) - l_{2k} k_0 (\beta_k r_{jn0}),$$

$$G_{2kjn} = -\frac{i}{2} \{l_{1k} \lambda_k k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + l_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k k_0 (\beta_k r_{jn0})\} e^{i(\Psi_j - \alpha_{jn0})},$$

$$G_{3kjn} = \frac{i}{2} \{l_{1k} \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + l_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0})\} e^{-i(\Psi_j - \alpha_{jn0})},$$

$$G_{4kjn} = \sigma \{\lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0})\} e^{-2i\alpha_{jn0}},$$

$$G_{5kjn} = 4i\sigma \{k_3^{**} (\lambda_k r_{jn0}) - k_3^{**} (\beta_k r_{jn0})\} e^{i(\Psi_j - 3\alpha_{jn0})},$$

$$G_{6kjn} = \frac{i\sigma}{2} \{\lambda_k^3 k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 k_1 (\beta_k r_{jn0})\} e^{-i(\Psi_j + \alpha_{jn0})},$$

$$G_{7kjn} = \sigma \{\lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0})\} e^{2i\alpha_{jn0}},$$

$$\begin{aligned}
G_{8k_{jn}} &= -\frac{i\sigma}{2} \left\{ \lambda_k^3 k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\
G_{9k_{jn}} &= -4i\sigma \left\{ k_3^{**} (\lambda_k r_{jn0}) - k_3^{**} (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})}, \\
G_{10k_{jn}} &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) - \tilde{b}_k \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i\alpha_{jn0}}, \\
G_{11k_{jn}} &= \frac{1}{4} \left\{ -\tilde{a}_k \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \tilde{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i(\psi_j - 2\alpha_{jn0})}, \\
G_{12k_{jn}} &= \frac{i}{4} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \tilde{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i\psi_j}, \\
G_{13k_{jn}} &= \frac{1}{2} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) - \tilde{b}_k \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i\alpha_{jn0}}, \\
G_{14k_{jn}} &= -\frac{i}{4} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \tilde{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_0 (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{i\psi_j}, \\
G_{15k_{jn}} &= \frac{i}{4} \left\{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \tilde{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \right\} e^{-i(\psi_j - 2\alpha_{jn0})}, \\
d_{1k}^* &= -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad K_3^{**}(\gamma r) = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 K_3(\gamma r) + \frac{1}{r^3}, \\
K_2^*(\gamma r) &= K_2(\gamma r) - \frac{2}{\gamma^2 r^2}, \quad \zeta_j - \zeta_{jn0} = r_{jn0} e^{i\alpha_{jn0}}.
\end{aligned}$$

Результаты численных расчётов

В качестве примера рассмотрим изотропный слой, ослабленный двумя отверстиями, направляющие цилиндрических поверхностей которых L_1 и L_2 представляют собой эллипсы

$$L_1: \xi_{11} = R_{11} \cos \varphi_1, \quad \xi_{12} = R_{12} \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi;$$

$$L_2: \xi_{21} = R_{21} \cos \varphi_2 + d, \quad \xi_{22} = R_{22} \sin \varphi_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi,$$

либо квадраты (квадрат со скруглёнными углами)

$$L_1: \xi_{11} = a_0^{(1)} (\cos \varphi_1 + C_0 \cos 3\varphi_1), \quad \xi_{12} = a_0^{(1)} (\sin \varphi_1 - C_0 \sin 3\varphi_1), \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi,$$

$$L_2: \xi_{21} = a_0^{(2)} (\cos \varphi_2 + C_0 \cos 3\varphi_2) + d_1, \quad \xi_{22} = a_0^{(2)} (\sin \varphi_2 - C_0 \sin 3\varphi_2), \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi, \quad C_0 = 0,14036.$$

Для характеристики напряженного состояния слоя на цилиндрических поверхностях отверстий рассчитывались амплитудные значения величин

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \quad \theta = \psi - \pi, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{33} \quad (13)$$

в точке контура L_2 : $\varphi_2 = 0, x_3 / h = 0$.

При численной реализации алгоритма систему интегральных уравнений методом механических квадратур сводим к линейной системе алгебраических уравнений. Последовательность вычислений такова: сначала численно решали систему интегральных уравнений краевой задачи (12), далее определяли коэффициенты Фурье $\sigma_{ij}^{(k)}$ тензора напряжений, затем по формулам (13) рассчитывали напряжения в вышеозначенной точке.

Коэффициенты Фурье искомых величин (13) с учетом формул (9), (10), операции предельного перехода и уравнений относительно плотностей запишутся в виде

$$\frac{1}{\mu} \sigma_{\theta\theta}^{(kn)} = -p_{2k}^{(n)} m_{1k} - p_{3k}^{(n)} m_{2k} + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} H_{1kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} H_{2kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} H_{3kjn} ds_j \right\} - \frac{1}{\mu} N_k^{(n)}$$

$$\frac{1}{\mu} \sigma_{zz}^{(kn)} = -p_{2k}^{(n)} m_{1k}^* - p_{3k}^{(n)} m_{2k}^* + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} H_{1kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} H_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} H_{3kjn}^* ds_j \right\},$$

где

$$m_{1k} = 2r_{1k}, \quad m_{2k} = 2r_{2k},$$

$$H_{1kjn} = 2G_{1kjn}, \quad H_{2kjn} = 2G_{2kjn}, \quad H_{3kjn} = 2G_{3kjn},$$

$$m_{1k}^* = -(a_k^* + b_k^* \tilde{d}_{1k}) l^*, \quad m_{2k}^* = -m_{1k}^*,$$

$$H_{1kjn}^* = a_k^* k_0 (\lambda_k r_{jn0}) - b_k^* k_0 (\beta_k r_{jn0}),$$

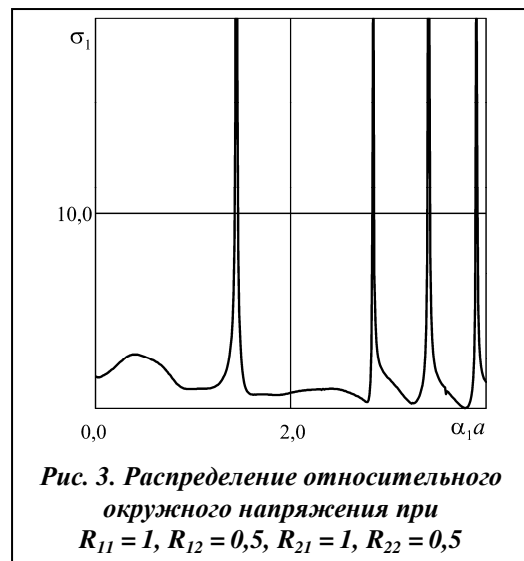
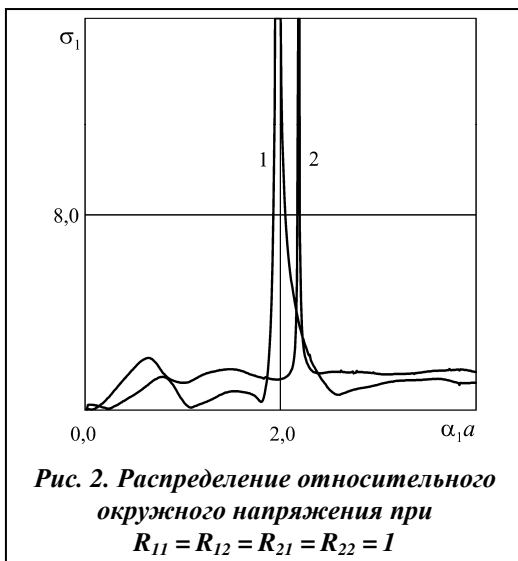
$$H_{2kjn}^* = -\frac{i}{2} \{ a_k^* \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + b_k^* \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i(\psi_j - \alpha_{jn0})},$$

$$H_{3kjn}^* = \frac{i}{2} \{ a_k^* \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + b_k^* \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i(\psi_j - \alpha_{jn0})},$$

$$a_k^* = (\sigma - 1) \Lambda - 2\gamma_k a_k, \quad b_k^* = -2\gamma_k b_k.$$

Пусть на цилиндрических поверхностях слоя действует пульсирующее давление, амплитудное значение которого определяется выражением $N_0 = C \cos \gamma_0 x_3$ ($C = \text{const}$).

На рис. 2–4 приведены распределения относительного амплитудного значения окружного напряжения $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ в зависимости от изменения безразмерного волнового числа $\alpha_1 a$ (a – характерный линейный размер) при различных геометрических и механических параметрах слоя с отверстиями и $a = 1$. Все кривые построены при $h = 90$.



Кривые 1, 2 (рис. 2) построены при $d = 2$, $R_{11} = R_{12} = R_{21} = R_{22} = 1$ и значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0,15$ и $\nu = 0,35$ соответственно. Кривая (рис. 3) построена при $d = 2$, $R_{11} = 1, R_{12} = 0,5, R_{21} = 1, R_{22} = 0,5$ и значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0,35$. Кривая (рис. 4) построена при $d = 2$, $R_{11} = 1, R_{12} = 0,4, R_{21} = 1, R_{22} = 0,4$ и значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0,35$.

Выводы

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- при уменьшении коэффициента Пуассона наблюдается смещение основания первого резонанса в сторону начала координат;
- при уменьшении коэффициента Пуассона наблюдается расширение основания первого резонанса;
- взаимодействие двух полостей эллиптического поперечного сечения $R_{11} = 1, R_{12} = 0,5, R_{21} = 1, R_{22} = 0,5$ приводит к появлению четырех резонансных ситуаций при $0 \leq \alpha_1 a \leq 4$;
- взаимодействие двух полостей эллиптического поперечного сечения $R_{11} = 1, R_{12} = 0,4, R_{21} = 1, R_{22} = 0,4$ приводит к появлению двух резонансных ситуаций при $0 \leq \alpha_1 a \leq 4$.

Литература

1. Dawe D. J. Use of the finite strip method in predicting the behaviour of composite laminated structures / D. J. Dawe // Compos. Struct. – 2002. – Vol. 57. – P. 11–36.
2. Лурье А. И. К теории толстых плит / А. И. Лурье // Прикл. математика и механика. – 1942. – Т. 6, вып. 2/3. – С. 151–168.
3. Космодамианский А. С. Толстые многосвязные пластины / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
4. Шалдырван В. А. О методе Лурье-Воровича в смешанных задачах изгиба цилиндрических тел / В. А. Шалдырван, Т. А. Васильев // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 58–65.
5. Алтухов Е. В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах / Е. В. Алтухов // Теорет. и прикл. механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3–7.
6. Космодамианский А. С. Концентрация напряжений при изгибе толстой плиты с бесконечным рядом полостей / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван, Г. Г. Шалдырван // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11, вып. 4. – С. 15–19.
7. Фильштинский Л. А. Смешанная кососимметричная задача об упругом слое, ослабленном сквозными полосами / Л. А. Фильштинский, Ю. Д. Ковалев // Физико-хим. механика материалов. – 2001. – № 5. – С. 114–116.
8. Фильштинский Л. А. Гармоническое возбуждение упругого слоя с полостью / Л. А. Фильштинский, Ю. Д. Ковалёв, Д. В. Кушнир // Материалы XIV междунар. науч. шк. им. акад. С. А. Христиановича. – Симферополь, 2004. – С. 151–153.
9. Vokov I. P. Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. / I. P. Vokov, E. A. Strelnikova // Intern. J. Innovative Research in Eng. & Management. – 2015. – Vol. 2, Issue 6. – P. 56–62.
10. Алтухов С. В. Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагми / С. В. Алтухов, Ю. В. Панченко, А. Ю. Богатчук // Вісн. Донець. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.

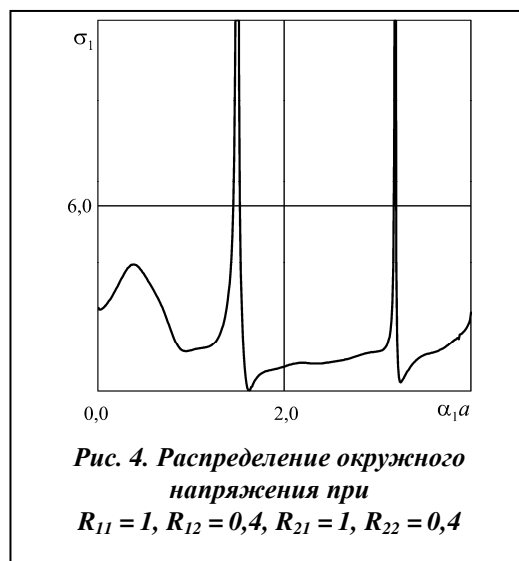


Рис. 4. Распределение окружного напряжения при $R_{11} = 1, R_{12} = 0,4, R_{21} = 1, R_{22} = 0,4$

Поступила в редакцию 09.11.17