

**Н. М. Калантарлы**, д-р физ.-мат. наук

Институт математики и механики  
НАН Азербайджана, г. Баку,  
e-mail: nailyak1975@gmail.com

УДК 539.375

## РАВНОПРОЧНАЯ ФОРМА ОТВЕРСТИЯ ДЛЯ ТОРМОЖЕНИЯ РОСТА ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

**Ключові слова:** тріщина, поздовжній зсув, оптимальний отвір, принцип рівномірності.

*Розглянуто задачу про відшукування рівномірної форми отвору в кінчику тріщини та її вплив на розвиток тріщини. Запропоновано критерій та метод розв'язування задачі з запобігання крихкому руйнуванню тіла, ослабленого тріщиною поздовжнього зсуву. Отримано умову крихкого руйнування.*

### Введение

Как известно, одним из распространенных методов торможения медленно растущих трещин является засверловка отверстия в их вершинах [1]. В работах [2, 3] рассмотрены задачи о влиянии кругового и эллиптического отверстия в кончике трещины на ее развитие. Надежность в эксплуатации, экономичность, а также другие механические свойства конструкции в значительной мере зависят от формы отверстия, имеющегося в конструкции. Поэтому задачи отыскания в некотором смысле оптимальной формы отверстия имеют несомненное прикладное значение. Задачи отыскания оптимальных форм отверстий в общем случае сводятся к решению вариационных задач с неизвестными границами. В некоторых случаях для определения формы отверстия, на которых технологически неизбежная концентрация была бы сведена к минимуму по сравнению со всеми другими возможными формами отверстий, приходим к задаче теории упругости с неизвестной границей. Задачи теории упругости и упругопластичности с неизвестными границами были рассмотрены в работах [4–20]. Обзор работ по определению равнопрочных отверстий приведен в статье Г. П. Черепанова [21]. Для торможения медленно растущей трещины целесообразно провести засверловку отверстия равнопрочной формы в ее кончике. Таким образом, снижение концентрации напряжений на контуре отверстия в кончике трещины является актуальной проблемой.

**Цель работы** состоит в разработке математической модели для торможения трещины путем засверловки отверстия в ее вершине, позволяющей рассчитать равнопрочную форму отверстия при заданных режимах нагружения.

### Постановка задачи

Рассмотрим сплошное упругое деформированное тело, ослабленное прямолинейными трещинами. Деформации тела приняты малыми величинами. Введем систему прямолинейных декартовых координат  $x, y, z$  с центром  $O$  в конце трещины. При этом ось  $y$  направим по нормали к поверхности трещины, ось  $z$  вдоль контура трещины, а ось  $x$  вглубь тела.

Будем считать выполненным условие локальной симметрии, согласно которому в малой окрестности каждой точки контура прямолинейной трещины имеет место симметрия относительно касательной плоскости к поверхности трещины в этой точке. Считаем, что для торможения роста трещины в ее кончике высверлено отверстие. Функция геометрии формы отверстия в кончике трещины заранее неизвестна и подлежит определению.

Ограничимся наиболее типичным и общим случаем, когда характерный линейный размер отверстия мал сравнительно с характерным линейным размером тела  $L$ . Итак, считается выполненным условие  $L \gg R \gg \rho$ . Здесь  $L$  – характерный линейный размер тела;  $R$  – характерный линейный размер искомого отверстия в кончике трещины;  $\rho$  – радиус кривизны конца трещины. Заметим, что в качестве  $L$  можно брать линейный размер трещины, расстояние конца трещины от границы тела, радиус кривизны контура трещины.

Рассмотрим окрестность конца трещины продольного сдвига, малую сравнительно с характерным линейным размером тела, но большую по сравнению с размером отверстия в вершине трещины. Рассматриваемая малая окрестность представится на плоскости  $Oxy$  бесконечной областью, за-

нимающей внешность контура  $D$  (рис. 1). Параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние тела в этой малой окрестности, не зависят от координаты  $z$ . Считается, что упругое тело находится в условиях антиплоской деформации.

Представляет интерес постановка и решение следующей задачи теории упругости с неизвестной границей:

$$\begin{aligned} &\text{при } y = 0, -\infty < x < -a \quad \tau_{yz} = 0, \\ &\text{на неизвестном контуре отверстия } r = \rho(\theta) \\ \tau_{zn} = 0, & \\ &\text{при } y = 0, x \rightarrow \infty \quad \lim(\tau_{yz} \sqrt{z}) = K_{III}. \end{aligned}$$

Здесь  $K_{III}$  – коэффициент интенсивности напряжений (параметр нагружения) считается известным;  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zn}$  – напряжения.

Напомним, что коэффициент интенсивности напряжений определяется только из решения задачи в целом и зависит от геометрии тела и внешней нагрузки.

В условиях антиплоской деформации поле упругих смещений в рассматриваемом теле описывается следующим образом:

$$u = 0, v = 0, w = w(x, y).$$

Напряжения на основании закона Гука представляются в виде

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0; \quad \tau_{xy} = 0;$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Здесь  $\mu = E/2(1 + \nu)$  – модуль сдвига;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В условиях антиплоской деформации напряжения и перемещения можно представить [22] через одну аналитическую функцию  $f(z)$

$$w = \operatorname{Re} f(z), \quad \tau_{xz} + i\tau_{yz} = \mu \overline{f'(z)}, \quad z = x + iy. \quad (1)$$

Требуется определить форму отверстия (функцию  $\rho(\theta)$ , где  $\theta$  – полярный угол).

Для этого постановку задачи необходимо дополнить критерием выбора формы отверстия. В качестве критерия выбора отверстия используем принцип равнопрочности.

Таким образом, в случае отыскания формы отверстия в упругом теле в кончике трещины, обладающей минимальной концентрацией напряжения, приходим к обратной задаче теории упругости с дополнительным условием

$$\tau_{z\theta} = \tau^* = \text{const на } r = \rho(\theta), \quad (2)$$

где  $\tau_{z\theta}$  – окружное тангенциальное напряжение. Для упругого материала  $\tau^*$  подлежит определению в процессе решения. Такой контур называется равнопрочным.

Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию  $\rho(\theta)$  формы отверстия.

### Метод решения

Ищем неизвестный заранее контур отверстия в кончике трещины в классе контуров, близких к круговым. Представим неизвестный контур отверстия в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon h(\theta),$$

в котором функция  $h(\theta)$  подлежит определению в процессе решения задачи.

Здесь  $\varepsilon = R^0/R$  – малый параметр;  $R^0$  – наибольшая высота отклонения (неровности) профиля контура отверстия от окружности  $r = R$ .

Без уменьшения общности рассматриваемой задачи считается, что искомая функция  $h(\theta)$  может быть представлена в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье

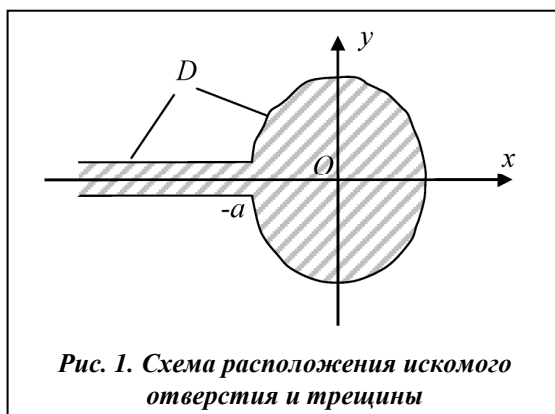


Рис. 1. Схема расположения искомого отверстия и трещины

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta).$$

Искомые функции (напряжения и перемещения) ищутся в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xz}^{(1)} + \dots, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(0)} + \varepsilon \tau_{yz}^{(1)} + \dots, \quad w = w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \dots,$$

в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими  $\varepsilon$  в степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет дифференциальным уравнениям плоской задачи теории упругости в условиях антиплоской деформации.

Значения компонент тензора напряжений при  $r = \rho(\theta)$  получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $r = R$ . Используя известные формулы для компонент напряжений, граничные условия задачи на контуре  $r = R$  (рис. 2) примут следующий вид:

для нулевого приближения

$$\tau_{zn}^{(0)} = 0; \quad (3)$$

для первого приближения

$$\tau_{zn}^{(1)} = T(\theta), \quad (4)$$

где функция  $T(\theta)$  зависит от напряженного состояния в нулевом приближении и функции  $h(\theta)$ .

На берегах трещины имеем граничные условия

для нулевого приближения

$$\text{при } y = 0, -\infty < x < -R, \tau_{yz}^{(0)} = 0; \quad (5)$$

для первого приближения

$$\text{при } y = 0, -\infty < x < -R, \tau_{yz}^{(1)} = 0.$$

С помощью представлений (1) и вспомогательной аналитической функции  $\varphi(z) = z f'(z)$  искомая задача (3)–(5) в нулевом приближении сводится к граничной задаче для аналитической функции  $\varphi(z)$

$$\text{при } y = 0, -\infty < x < -R, \text{Im}[\varphi(z)] = 0; \quad (6)$$

$$\text{при } |z| = R, \text{Re}[\varphi(z)] = 0;$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty, \lim \varphi(z) = -\frac{2iK_{III}}{\mu} \sqrt{z}. \quad (7)$$

Вначале найдем функцию  $z = \omega(\zeta)$ , которая осуществляет отображение верхней полуплоскости комплексного переменного  $\zeta$  на внешность контура  $D_0$  в физической плоскости  $z = x + iy$ . С помощью преобразования  $z_1 = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$  отобразим верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на верхнюю полуплоскость  $z_1$  с выброшенным полукругом единичного радиуса. Затем, применяя функцию  $z_2 = -i z_1$ , переведем полуплоскость  $z_1$  в правую полуплоскость с выброшенным полукругом единичного радиуса. Преобразование  $z_3 = z_2^2$  отобразит правую полуплоскость  $z_2$  на внешность контура  $D_1$ , представляющего собой разрез вдоль  $y = 0, -\infty < x_3 < -1$  и единичной окружности с центром в начале координат  $x_3 y_3$ . Далее, применяя преобразование  $z = R z_3$ , отобразим внешность контура  $D_1$  на внешность контура  $D_0$  в физической плоскости  $z = x + iy$ . Запишем теперь функцию  $z = \omega(\zeta)$  в раскрытом виде

$$z = R z_3 = R z_2^2 = R (-z_1^2) = R \left[ -\left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)^2 \right].$$

Таким образом, аналитическая функция  $z = \omega(\zeta)$

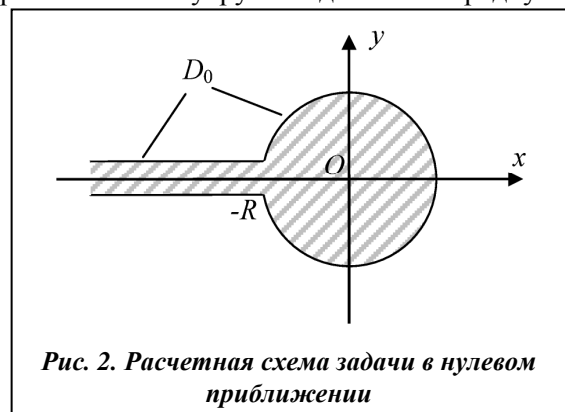


Рис. 2. Расчетная схема задачи в нулевом приближении

осуществляет отображение верхней полуплоскости  $\zeta$  на внешность контура  $D$  в физической плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  (рис. 1).

Перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного  $\zeta$  при помощи преобразования  $z = \omega(\zeta)$ .

Обозначим

$$\Phi(\zeta) = \varphi[\omega(\zeta)].$$

В принятых обозначениях на основании граничного условия (6) получаем на вспомогательной плоскости  $\zeta = \eta + i\xi$  смешанную краевую задачу для определения аналитической функции  $\Phi(\zeta)$

$$\begin{aligned} \text{при } \zeta = 0, -\infty < \eta < -1 \quad \text{Im}\Phi(\zeta) &= 0; \\ \text{при } \zeta = 0, -1 < \eta < 1 \quad \text{Re}\Phi(\zeta) &= 0; \\ \text{при } \zeta = 0, 1 < \eta < \infty \quad \text{Im}\Phi(\zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В бесконечно удаленной точке на основании (7) и принятого обозначения функция  $\Phi(\zeta)$  ведет себя следующим образом:

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2K_{III}\sqrt{R}\zeta}{\mu}. \quad (9)$$

Решение краевой задачи (8), (9) в классе всюду ограниченных функций имеет следующий вид:

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2K_{III}\sqrt{R}}{\mu} \sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Окончательно, для аналитической функции  $f(z)$  имеем

$$f'(z) = -\frac{iK_{III}}{\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{R}{z^{3/2}} \right). \quad (10)$$

С помощью полученных соотношений (10) и представления (1), находим напряжения в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^0 &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{r}} \left( \sin \frac{1}{2}\theta + \frac{R}{r} \sin \frac{3}{2}\theta \right), \quad \tau_{yz}^0 = \frac{K_{III}}{\sqrt{r}} \left( \cos \frac{1}{2}\theta + \frac{R}{r} \cos \frac{3}{2}\theta \right), \\ \tau_{z\theta}^0 &= \frac{K_{III}}{\sqrt{r}} \left( 1 + \frac{R}{r} \right) \cos \frac{1}{2}\theta, \quad \tau_{zr}^0 = \frac{K_{III}}{\sqrt{r}} \left( 1 - \frac{R}{r} \right) \sin \frac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

Здесь  $r, \theta$  – полярные координаты с центром в точке  $O$  ( $\theta = 0$  соответствует продолжению трещины).

Зная напряженное состояние в нулевом приближении, находим формально функцию  $T(\theta)$ .

После нахождения решения задачи в нулевом приближении можно перейти к решению рассматриваемой задачи в первом приближении.

Граничные условия задачи для первого приближения запишутся для вспомогательной аналитической функции  $\varphi_1(z) = z f_1'(z)$  в следующем виде:

$$\text{при } y = 0, -\infty < \eta < -R \quad \text{Im}\varphi_1(z) = 0, \quad (11)$$

$$\text{при } |z| = R \quad \text{Re}[\varphi_1(z)] = T,$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \lim \varphi_1(z) = 0. \quad (12)$$

Для решения краевой задачи (11) перейдем на параметрическую плоскость комплексного переменного  $\zeta$  с помощью преобразования  $z = \omega(\zeta)$ .

Обозначим

$$\Phi_1(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]. \quad (13)$$

В принятых обозначениях из граничного условия (11) приходим на параметрической плоскости  $\zeta = \eta + i\xi$  к смешанной краевой задаче для нахождения аналитической функции  $\Phi_1(\zeta)$

$$\begin{aligned} \text{при } \zeta = 0, -\infty < \eta < -1 \quad \text{Im}\Phi_1(\zeta) &= 0, \\ \text{при } \zeta = 0, -1 < \eta < 1 \quad \text{Re}\Phi_1(\zeta) &= T, \end{aligned} \quad (14)$$

при  $\zeta = 0$ ,  $1 < \eta < \infty$   $\text{Im}\Phi_1(\zeta) = 0$ .

В бесконечно удаленной точке на основании (12) и (13) функция  $\Phi_1(\zeta)$  стремится к нулю. Решение краевой задачи (14) в классе всюду ограниченных функций имеет вид

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{T(\eta) d\eta}{\eta - \zeta}.$$

Согласно поведению функции  $\Phi_1(\zeta)$  на бесконечности условие разрешимости краевой задачи выглядит так:

$$\int_{-1}^1 \frac{T(\eta) d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = 0.$$

Это соотношение служит для определения размера  $a$ . С помощью полученных соотношений и представления (1), как и в нулевом приближении, находим напряжения в первом приближении.

В случае заданной функции  $h(\theta)$  формы отверстия полученные соотношения являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние тела в условиях антиплоской плоскости.

Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить искомые коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , надо найти окружное тангенциальное напряжение  $\tau_{z\theta}$  на контуре отверстия. С помощью полученного решения находим  $\tau_{z\theta}$  в поверхностном контуре  $L$  ( $r = \rho(\theta)$ ) с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра  $\varepsilon$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{z\theta}^{(0)} \Big|_{r=R} + \varepsilon \left[ h(\theta) \frac{\partial \tau_{z\theta}^{(0)}}{\partial r} + \tau_{z\theta}^{(1)}(\theta) \right] \Big|_{r=R}.$$

Напряжения  $\tau_{z\theta}$  зависит от коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  ряда Фурье искомой функции  $h(\theta)$ . Для построения недостающих уравнений, позволяющих найти коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , требуем, чтобы обеспечивалось распределение напряжений на контуре отверстия согласно условию (2) равнопрочности. Снижение концентрации напряжений на контуре отверстия осуществляем путем минимизации критерия

$$U = \sum_{i=1}^M [\tau_{z\theta}(\theta_i) - \tau^*]^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $\tau^*$  – оптимальное значение окружного тангенциального напряжения в поверхностном слое отверстия; для упругого материала подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. В случае упругопластического материала тела  $\tau^*$  – заданная величина.

Используя необходимое условие экстремума нескольких переменных, получаем бесконечную линейную систему уравнений для определения величин  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  и  $\tau^*$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \frac{\partial U}{\partial \tau^*} = 0. \quad (15)$$

Так как функция  $\tau_{z\theta}(\alpha_k, \beta_k, \theta)$  линейна относительно неизвестных параметров, то составление и решение системы уравнений (15) значительно упрощается. Отрезок  $[0, 2\pi]$  изменения переменной  $\theta$  разбивается на  $M$  равных частей, где  $M > 2m + 1$ ,  $m$  – число оставленных коэффициентов для практических расчетов.

Система уравнений (15) совместно с полученными соотношениями задачи теории упругости в нулевом и первом приближении позволяет определить форму равнопрочного контура, напряженно-деформированное состояние тела, а также оптимальное значение окружного тангенциального напряжения  $\tau^*$  для случая упругого материала.

Развитие трещины продольного сдвига происходит по направлению максимального касательного напряжения  $\tau_{z\theta}$  [23]. Таким направлением является продолжение трещины ( $\theta = 0$ ). Следовательно, как только напряжение  $\tau_{z\theta} = \tau^*$  окажется равным некоторой предельной величине  $\tau_c$ , характерной для данного материала, трещина продольного сдвига будет расти. Таким образом, условием хрупкого

разрушения будет

$$\tau^*(K_{III}) = \tau_c. \quad (16)$$

Согласно условию (16) рост трещины начинается, как только коэффициент интенсивности напряжений (параметр нагружения) достигает некоторой критической величины, при которой оптимальное значение напряжения  $\tau^*$  оказывается равным предельной величине  $\tau_c$ , характерной для данного материала и зависящей от характерного размера отверстия в кончике трещины и прочности материала.

При выполнении расчетов полученные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента. Для упрощения задачи было принято, что искомый контур отверстия симметричен относительно координатных осей. В расчетах было принято  $M = 72$ . Результаты расчетов коэффициентов  $a_{2k}$  разложения функции  $h(\theta)$  приведены в таблице.

*Значение коэффициентов Фурье для равнопрочного контура отверстия в кончике трещины*

$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$a_8$	$a_{10}$	$a_{12}$
0,0769	-0,0921	0,0095	0,0083	0,0057	0,0034	0,0015

## Выводы

Таким образом, построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи по предотвращению разрушения тела с трещиной продольного сдвига путем засверловки равнопрочного отверстия в кончике трещины на пути ее роста. Получено условие хрупкого разрушения. Решение задачи оптимального проектирования по определению формы отверстия позволяет на стадии проектирования выбрать оптимальные геометрические параметры тела, обеспечивающие эффективное торможение трещины.

## Литература

1. *Финкель В. М.* Физические основы торможения разрушения / В. М. Финкель. – М.: Металлургия, 1977. – 360 с.
2. *Мирсалимов В. М.* Влияние разгружающих отверстий на развитие трещины / В. М. Мирсалимов // Пробл. прочности. – 1971. – Т. 3, № 4. – С. 18–19.
3. *Мирсалимов В. М.* Об одном способе торможения растущих трещин / В. М. Мирсалимов // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1972. – № 1. – С. 34–38.
4. *Черепанов Г. П.* Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации / Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1963. – № 2. – С. 57–60.
5. *Куриши Л. М.* Определение форм двухсвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости / Л. М. Куршин, П. Н. Оноприенко // Прикл. математика. и механика. – 1976. – Т. 40, вып. 6. – С. 1078–1084.
6. *Черепанов Г. П.* Обратная задача теории упругости / Г. П. Черепанов // Прикл. математика. и механика. – 1974. – Т. 38, вып. 6. – С. 963–979.
7. *Мирсалимов В. М.* Об оптимальной форме отверстия для перфорированной пластины при изгибе / В. М. Мирсалимов // Прикл. механика. и техн. физика. – 1974. – Т. 15, № 6. – С. 133–136.
8. *Мирсалимов В. М.* Обратная задача теории упругости для анизотропной среды / В. М. Мирсалимов // Прикл. механика. и техн. физика. – 1975. – Т. 16, № 4. – С. 190–193.
9. *Баничук Н. В.* Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах / Н. В. Баничук // Прикл. математика. и механика. – 1977. – Т. 41, вып. 5. – С. 920–925.
10. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел / Н. В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
11. *Мирсалимов В. М.* Обратная дwoякопериодическая задача термоупругости / В. М. Мирсалимов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – Т. 12, № 4. – С. 147–154.
12. *Vigdergauz S. B.* Integral equations of the inverse problem of the theory of elasticity / S. B. Vigdergauz // J. Appl. Math. Mech. – 1976. – Vol. 40, Issue 3. – P. 518–522.
13. *Wheeler L. T.* On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration / L. T. Wheeler // Int. J. of Solids and Structures. – 1976. – Vol. 12, Issue 11. – P. 779–789.
14. *Vigdergauz S. B.* On a case of the inverse problem of two-dimensional theory of elasticity / S. B. Vigdergauz // J. Appl. Math. and Mech. – 1977. – Vol. 41, Issue 5. – P. 902–908.
15. *Мирсалимов В. М.* Равнопрочная выработка в горном массиве / В. М. Мирсалимов // Физико-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. – 1979. – Т. 15, № 4. – С. 24–28.
16. *Wheeler L. T.* On optimum profiles for the minimization of elastic stress concentration / L. T. Wheeler // ZAMM. – 1978. – Vol. 58, Issue 6. – P. 235–236.

17. Wheeler L. T. Stress minimum forms for elastic solids / L. T. Wheeler // ASME. Appl. Mech. Rev. – 1992. – Vol. 45, Issue 1. – P. 1–12.
18. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic solids with infinite branches / G. P. Cherepanov // J. Appl. Mech. ASME. – 1995. – Vol. 62, Issue 2. – P. 419–422.
19. Savruk M. P. Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates / M. P. Savruk, V. S. Kravets // Materials Sci. – 2002. – Vol. 38, Issue 1. – P. 34–46.
20. Мир-Салим-заде М. В. Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярированной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // Материалы, технологии, инструменты. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 10–14.
21. Cherepanov G. P. Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels // Физ. мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 5. – С. 114–123.
22. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
23. Баренблатт Г. И. О хрупких трещинах продольного сдвига / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // Прикл. математика и механика – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1110–1119.

Поступила в редакцию 19.10.17

<sup>1</sup> Ю. Д. Ковалев, канд. физ.-мат. наук  
<sup>2</sup> Е. А. Стрельникова, д-р техн. наук  
<sup>1</sup> Д. В. Кушнир, канд. физ.-мат. наук  
<sup>1</sup> Ю. В. Шрамко, канд. физ.-мат. наук

<sup>1</sup> Сумский государственный университет, г. Сумы,  
 e-mail: dmytro.kushnir@gmail.com

<sup>2</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков

**Ключові слова:** гармонічні коливання, шар з двома отворами, інтегральні рівняння.

УДК 539.3

## УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СЛОЯ, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ, С ТОРЦАМИ, ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ (СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

*Розв'язано задачу щодо гармонічних пружних коливань шару з двома наскрізними отворами, на поверхнях яких діє нормальний пульсуючий тиск. Граничну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, що розв'язана чисельно. Наведено приклади, в яких досліджено особливості розподілу окружного напруження за частотою залежно від відстані між отворами та коефіцієнта Пуассона.*

### Введение

В трехмерных элементах конструкций дефекты и разрушения часто возникают и распространяются в местах наибольшей концентрации напряжений (отверстия, трещины, углы, включения). Наличие отверстий в структурах может быть обусловлено конструкционными требованиями либо технологическими особенностями (даже при тщательном проектировании). Частный случай граничных условий типа «плоской диафрагмы» на основаниях плиты может приобрести значительный интерес в условиях современных технологий напыления пленок, различных покрытий с помощью углеродных нанотрубок [1]. Это связано с тем, что модуль Юнга подобных покрытий достигает значений нескольких ГПа. Расчет пространственных полей перемещений и напряжений вблизи криволинейной границы отверстия является сложной задачей, особенно в условиях динамических нагрузок, и в литературе имеется немного аналитических решений задач теории упругости для многосвязных цилиндрических тел с нетривиальной геометрией и частными случаями граничных условий.

В настоящее время метод однородных решений представляет собой один из основных подходов к решению граничных задач для тел конечных размеров. Он нашел применение в теории тонких и толстых плит, при исследовании деформации конечных, толстостенных, многосвязных цилиндров и в ряде других случаев. Решение задачи находится с помощью однородных решений, которые являются интегралами основных уравнений теории упругости и удовлетворяют нулевым граничным услови-

© Ю. Д. Ковалев, Е. А. Стрельникова, Д. В. Кушнир, Ю. В. Шрамко, 2017