

Ю. М. Мацевитый, акад. НАН України  
 А. О. Костиков, д-р техн. наук  
 Н. А. Сафонов, канд. физ.-мат. наук  
 В. В. Ганчин

Институт проблем машиностроения  
 им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
 г. Харьков,  
 e-mail: matsevit@ipmach.kharkov.ua

УДК 536.24

## К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для розв'язання нелінійної оберненої граничної задачі теплопроводності застосовується метод регуляризації А. М. Тихонова з ефективним алгоритмом пошуку регуляризуючого параметра. Шуканий тепловий потік на границі по часовій координаті апроксимується сплайнами Шьонберга. Застосовується метод функцій впливу, для чого нелінійна задача зводиться до послідовності лінійних обернених задач.

**Ключові слова:** обернена гранична задача теплопроводності, тепловий потік, метод регуляризації А. М. Тихонова, функціонал, стабілізатор, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, сплайни Шьонберга.

### Введение

Для идентификации параметров математических моделей решение обратных задач теплопроводности (ОЗТ) имеет особое значение как важный этап обеспечения адекватности этих моделей при наличии экспериментальной информации об исследуемом тепловом процессе. В данной работе нелинейная граничная обратная задача теплопроводности сводится к определению зависимостей тепловых потоков на поверхности по данным измерений температур в одной или нескольких внутренних точках.

Обратная задача теплопроводности может быть формализована следующим образом:

$$A[f(T, M, \tau)] = T^{\text{экс}},$$

где  $A$  – оператор, который связывает искомые зависимости с исходными данными  $T^{\text{экс}}$ ;  $f(T, M, \tau)$  – искомая функция, которая в общем случае может зависеть от температуры  $T$ , пространственных координат  $M$  и временной координаты  $\tau$ ;  $T^{\text{экс}}$  – заданная температура, которая имеет вид  $T^{\text{экс}} = T(M, \tau)$  и в большинстве случаев известна из эксперимента.

Такая задача, как и любая ОЗТ, ввиду нарушения причинно-следственной связи является некорректной по Адамару, что проявляется, в частности, в неустойчивости получаемого решения. Для решения такой некорректной задачи ее либо сводят к условно-корректной, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации [1–6]. При решении обратных задач теплопроводности большое значение имеет вычислительный эксперимент, в котором важную роль играют предварительные решения модельной задачи, когда «измерения»  $T^{\text{экс}}$  получают из решения соответствующей прямой задачи с добавлением некоторой случайной величины.

### Постановка задачи

Рассмотрим тепловой процесс в двухслойной пластине с реальным контактом между слоями [7], описывающийся следующими уравнениями:

$$C_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L_1, \quad C_2 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad L_1 < x < L, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = Q(\tau), \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = \frac{1}{R(\tau)} (T|_{L_1-0} - T|_{L_1+0}) = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0}, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (4)$$

$$T(x_i, \tau_k) = T_{i,k}^{\text{экc}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tau_k = k\Delta\tau, \quad k = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где  $Q(\tau)$  и  $R(\tau)$  – искомые тепловой поток и термическое контактное сопротивление соответственно;  $x$  – пространственная координата;  $\tau$  – время;  $\lambda_i, C_i, i = 1, 2$  – теплопроводность и массовая теплоёмкость материалов контактирующих слоев;  $L$  – общая толщина двухслойной пластины (композитной среды);  $L_1$  – толщина первого слоя;  $T_0$  – начальная температура;  $x_i, i = \overline{1, n}$  – пространственные координаты точек термометрирования;  $\Delta\tau$  – интервал времени между измерениями;  $m$  – количество измерений за время исследования в каждой точке;  $n$  – количество точек термометрирования;  $T_{jk}^{\text{экc}}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$  – температуры, полученные в результате теплофизического эксперимента с погрешностью, которая характеризуется случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

### Регуляризирующий алгоритм решения обратной задачи теплопроводности

Рассмотрим обратную нестационарную краевую задачу теплопроводности (1) – (5), в которой по данным теплофизического эксперимента необходимо определить тепловой поток  $Q(\tau)$  и термическое контактное сопротивление  $R(\tau)$ . Так как точки термометрирования присутствуют в обеих средах, то можно эту обратную краевую задачу по определению  $Q(\tau)$  и  $R(\tau)$  разбить на две связанные внешние обратные краевые задачи для первого и второго слоев композитной среды. Тогда граничное условие на границе контакта для первого слоя будет иметь вид

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_1-0} = Q_R(\tau),$$

где  $Q_R(\tau)$  – искомый поток, а граничные условия для второго слоя могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_1+0} = -Q_R(\tau), \quad \lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = Q(\tau),$$

где  $Q_R(\tau)$  и  $Q(\tau)$  – соответствующие искомые тепловые потоки на границе контакта и на внешней границе.

Для решения обратной задачи теплопроводности (1) – (5) используем принцип регуляризации А. Н. Тихонова, который сводится к минимизации такого функционала:

$$J = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (T(x_j, \tau_k) - T_{jk}^{\text{экc}})^2 + \alpha \Omega[Q_R(\tau), Q(\tau)] \quad (6)$$

где  $T$  – моделируемая температура;  $T_{jk}^{\text{экc}}$  – температура из теплофизического эксперимента;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\Omega[Q_R(\tau), Q(\tau)]$  – стабилизирующий функционал.

Неизвестные функции  $Q_R(\tau)$  и  $Q(\tau)$  представим в виде линейной комбинации сплайнов Шёнберга третьей степени  $B_3(\tau)$  с искомыми коэффициентами  $d_{R,i}, i = \overline{1, n_R}$  и  $d_{Q,i}, i = \overline{1, n_Q}$  для определения потока  $Q_R(\tau)$  на границе контакта и теплового потока  $Q(\tau)$  на внешней границе соответственно. Тогда моделируемая температура будет зависеть только от этих коэффициентов.

Минимизацию функционала (6) проведём итерационным методом. Обозначим через  $\mathbf{g} = (d_{R,1}^{p+1}, \dots, d_{R,n_R}^{p+1}, d_{Q,1}^{p+1}, \dots, d_{Q,n_Q}^{p+1}) = (g_1^{p+1}, \dots, g_{n_{RQ}}^{p+1})$  вектор искомых параметров на  $(p+1)$ -й итерации, где  $n_{RQ} = n_R + n_Q$ . Представим моделируемую температуру на  $(p+1)$ -й итерации в виде двух членов ряда Тейлора, а именно

$$T(x, \tau, \bar{g}^{p+1}) \approx T(x, \tau, \bar{g}^p) + \sum_{k=1}^{n_{RQ}} \frac{\partial T}{\partial g_k} \Delta g_k^{p+1}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

где  $\mathbf{g}^{p+1} = \mathbf{g}^p + \Delta\mathbf{g}^{p+1}$ ,  $\Delta\mathbf{g}^{p+1} = (\Delta g_1^{p+1}, \dots, \Delta g_{n_{RQ}}^{p+1})$ .

На  $(p + 1)$ -й итерации стабилизирующий функционал запишем как

$$\begin{aligned} \Omega[Q_R, Q] = & \int_0^{\tau_0} \left( \omega_{R,0} \left[ \sum_{j=1}^{n_R} d_{R,j}^{p+1} \varphi_{R,j}(\tau) \right]^2 + \omega_{R,1} \left[ \sum_{j=1}^{n_R} d_{R,j}^{p+1} \varphi'_{R,j}(\tau) \right]^2 + \omega_{R,2} \left[ \sum_{j=1}^{n_R} d_{R,j}^{p+1} \varphi''_{R,j}(\tau) \right]^2 \right) d\tau + \\ & + \int_0^{\tau_0} \left( \omega_{Q,0} \left[ \sum_{j=1}^{n_Q} d_{Q,j}^{p+1} \varphi_{Q,j}(\tau) \right]^2 + \omega_{Q,1} \left[ \sum_{j=1}^{n_Q} d_{Q,j}^{p+1} \varphi'_{Q,j}(\tau) \right]^2 + \omega_{Q,2} \left[ \sum_{j=1}^{n_Q} d_{Q,j}^{p+1} \varphi''_{Q,j}(\tau) \right]^2 \right) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\tau_0$  – временной интервал исследуемого процесса;  $\omega_{R,0}, \omega_{R,1}, \omega_{R,2}, \omega_{Q,0}, \omega_{Q,1}, \omega_{Q,2}$  – некоторые константы, которые выбираются, исходя из требований на поведение искомым решений.

Подставив выражение (7) и (8) в функционал (6) и используя условие минимума функционала, получим систему линейных уравнений относительно  $\Delta g_k^{p+1}$ ,  $k = \overline{1, n_{RQ}}$  на  $(p + 1)$ -й итерации

$$(A + \alpha B)\Delta\mathbf{g}^{p+1} = \bar{C} - \alpha B\mathbf{g}^p, \quad (9)$$

где  $A$  – симметричная матрица с элементами

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial T(x_h, \tau_k, \mathbf{g}^p)}{\partial g_i} \frac{\partial T(x_h, \tau_k, \mathbf{g}^p)}{\partial g_j}$$

$B$  – симметричная матрица с элементами

$$b_{ij} = \omega_{R,0} \int_0^{\tau_0} \varphi_{R,i}(\tau) \varphi_{R,j}(\tau) d\tau + \omega_{R,1} \int_0^{\tau_0} \varphi'_{R,i}(\tau) \varphi'_{R,j}(\tau) d\tau + \omega_{R,2} \int_0^{\tau_0} \varphi''_{R,i}(\tau) \varphi''_{R,j}(\tau) d\tau,$$

для  $i = \overline{1, n_R}$ ,

$$b_{ij} = \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \varphi_{Q,i}(\tau) \varphi_{Q,j}(\tau) d\tau + \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \varphi'_{Q,i}(\tau) \varphi'_{Q,j}(\tau) d\tau + \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \varphi''_{Q,i}(\tau) \varphi''_{Q,j}(\tau) d\tau,$$

для  $i = \overline{(1 + n_R), n_{RQ}}$ ,

а  $C$  – вектор правой части системы линейных уравнений (9) с элементами

$$c_j = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m (T_{hk}^{экс} - T(x_h, \tau_k, \mathbf{g}^p)) \frac{\partial T(x_h, \tau_k, \mathbf{g}^p)}{\partial g_j}, \quad j = \overline{1, n_{RQ}}.$$

Такой подход, который часто называют регуляризирующим методом М. М. Лаврентьева, к решению нелинейной внутренней обратной задачи теплопроводности был использован в работах [8, 9], в которых всё сводилось на  $(p + 1)$ -й итерации к решению системы линейных уравнений вида

$$(A + \alpha E)\Delta\mathbf{g}^{p+1} = \mathbf{C},$$

где  $E$  – единичная матрица.

В систему линейных уравнений (9) входит параметр регуляризации  $\alpha$ , методика определения которого изложена в работах [1, 10–13].

Будем считать, что параметр регуляризации выбран правильно, если для полученного решения по предложенной выше итерационной схеме выполняется такое двухстороннее неравенство [1]:

$$(1 - \sqrt{2/N})\sigma^2 \leq \delta^2 \leq (1 + \sqrt{2/N})\sigma^2, \quad (10)$$

где  $N$  – общее количество термометрических измерений;  $\delta^2$  – среднее квадратичное отклонение модельного решения от экспериментальных данных. Алгоритм поиска параметра регуляризации  $\alpha$ , удовлетворяющий неравенству (10), подобен любому итерационному процессу поиска корня нелинейного уравнения.

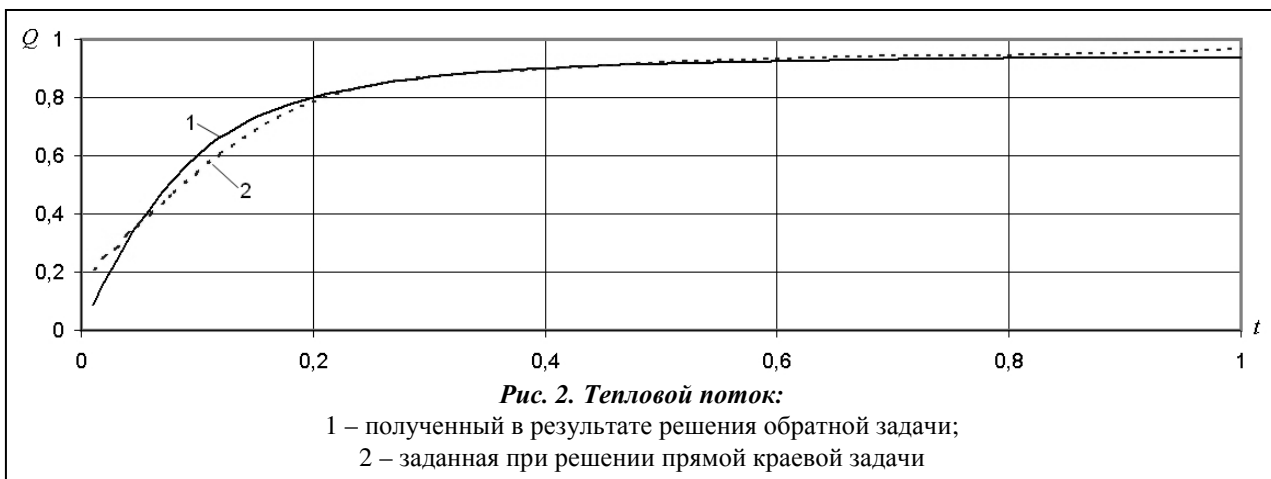
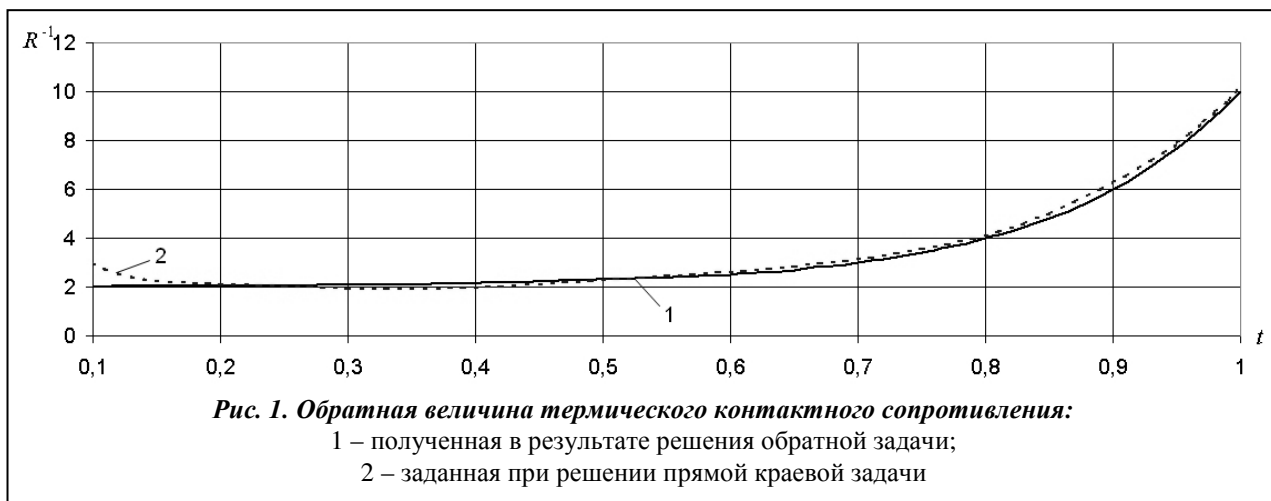
**Вычислительный эксперимент**

Из представленных на рис. 1, 2 результатов идентификации обратной величины термического контактного сопротивления и теплового потока видно удовлетворительное совпадение идентифицированных зависимостей с заданными зависимостями при решении прямой задачи. Процесс идентификации выполнен для таких безразмерных параметров:

$$C_1 = 1, C_2 = 1, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, L = 1, L_1 = 0.5, T_0 = 1, n_R = 23, n_Q = 23, m = 100, \sigma = 0.02,$$

$$x_1 = 0, x_2 = L_1 - 0, x_3 = L_1 + 0, x_4 = L.$$

Все прямые задачи решались с помощью метода конечных элементов по пространственным координатам в сочетании с неявной разностной схемой первого порядка по времени.



**Использование метода функций влияния для задач с подвижными границами**

Для решения граничных обратных нестационарных задач теплопроводности целесообразно применять метод функций влияния [2]. В работе [11] этот подход был использован при решении нелинейных граничных обратных задач теплопроводности. В данной статье этот метод применяется к нелинейной граничной обратной задаче с подвижной границей (прямые задачи с подвижными границами рассматриваются в работах [14–16]).

Граничная обратная задача с подвижной границей формализуется следующим образом:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L(\tau), \quad \tau > 0, \tag{11}$$

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \tau > 0; \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L(\tau)} = Q(\tau), \quad \tau > 0, \quad (12)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (13)$$

$$T(x_i, \tau_k) = T_{i,k}^{\text{экс}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tau_k = k\Delta\tau, \quad k = \overline{1, m}, \quad (14)$$

где  $Q(\tau)$  – искомый тепловой поток;  $x$  – пространственная координата;  $\tau$  – время;  $\lambda(T)$ ,  $C(T)$  – нелинейные теплопроводность и массовая теплоёмкость соответственно;  $L(\tau)$  – непрерывная функция от временной координаты, характеризующая толщину пластины;  $T$  – температура;  $T_0$  – начальная температура;  $x_i, i = \overline{1, n}$  – пространственные координаты точек термометрирования;  $n$  – количество точек термометрирования;  $\Delta\tau$  – интервал времени между измерениями;  $m$  – количество измерений за время исследования;  $T_{jk}^{\text{экс}}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$  – температуры, полученные в результате теплофизического эксперимента с погрешностью, которая характеризуется случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Для решения задачи (11) – (14) методом функций влияния [2] проведём её линеаризацию следующим образом:

$$C(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial \tau} = \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} \quad (15)$$

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad \lambda(T_{s-1}) \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=L(\tau)} = Q_s(\tau), \quad (16)$$

$$T_s(x, 0) = T_0, \quad (17)$$

$$T_s(x_i, \tau_k) = T_{i,k}^{\text{экс}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tau_k = k\Delta\tau, \quad k = \overline{1, m}. \quad (18)$$

Здесь и везде далее в статье индекс  $s$  – номер итерации.

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова для решения линейной обратной задачи (15) – (18) сводится к минимизации функционала [5]

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [T_s(x_i, \tau_k) - T_{i,k}^{\text{экс}}]^2 + \alpha_s \Omega[Q_s], \quad (19)$$

где  $\alpha_s$  – параметр регуляризации;  $\Omega[Q_s]$  – стабилизирующий функционал;  $T_s(x_i, \tau_k)$  и  $T_{i,k}^{\text{экс}}$  – моделируемая температура, и температура из теплофизического эксперимента соответственно в точках термометрирования в моменты времени  $\tau_k$ .

Представим искомую функцию  $Q_s(\tau)$  в виде

$$Q_s(\tau) = \sum_{j=0}^{n_Q} q_{s,j} \varphi_j(\tau),$$

где  $\varphi_j(\tau)$  – некоторый финитный базис на всем интервале измерения температур, а  $q_{s,j}$  – искомые коэффициенты. Тогда, используя принцип суперпозиции, решение  $T_s(x, \tau)$  можно записать так:

$$T_s(x, \tau) = \bar{T}_s(x, \tau) + \sum_{j=0}^{n_Q} q_{s,j} T_{s,j}(x, \tau), \quad (20)$$

где  $\bar{T}_s(x, \tau)$  – решение краевой задачи (15) – (18) с неоднородным начальным условием (17) и однородным граничным условием (16), а  $T_{s,j}(x, \tau)$  – решение краевой задачи (15) – (18) с однородным начальным условием и неоднородным граничным условием вида

$$\lambda(T_{s-1}) \frac{\partial T_{s,j}}{\partial x} = \varphi_j(\tau), \quad x = L(\tau).$$

Подставляя выражение (20) в функционал (19) и взяв в качестве стабилизирующего функционала

$$\Omega[Q_s] = \int_0^{\tau_0} \left[ \sum_{j=0}^{n_Q} q_{s,j} \varphi_j(\tau) \right]^2 d\tau, \tag{21}$$

где  $\tau_0$  – временной интервал исследуемого процесса, и продифференцировав по искомым коэффициентам  $q_{s,j}$ , получим систему линейных уравнений относительно искомым коэффициентов

$$(A_s + \alpha_s B_s) \mathbf{q}_s = \mathbf{C}_s,$$

где  $A_s$  – симметричная матрица с элементами

$$a_{ij}^s = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m T_{s,i}(x_l, \tau_k) T_{s,j}(x_l, \tau_k);$$

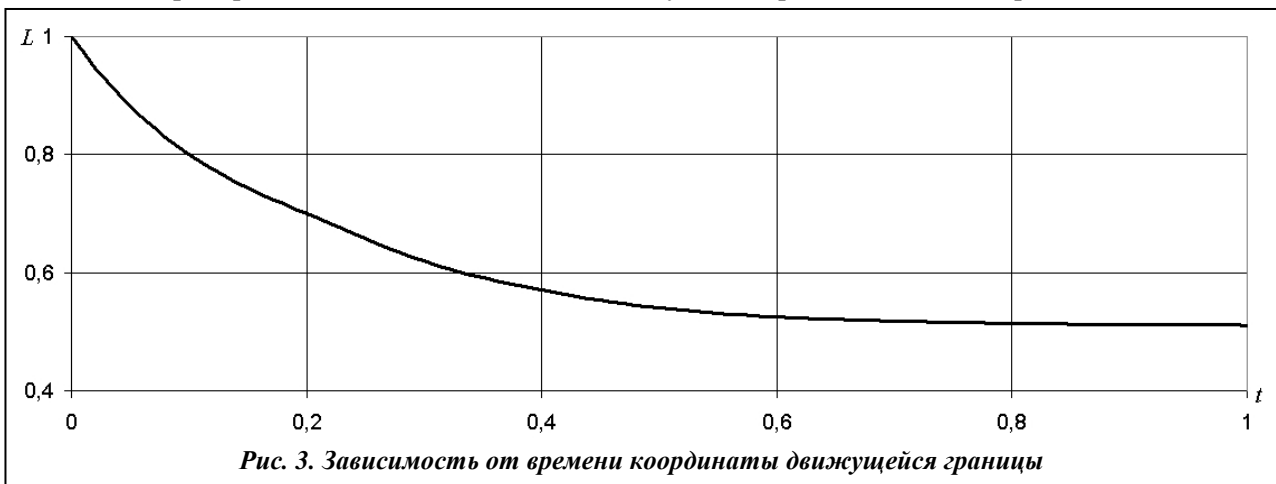
$B_s$  – симметричная матрица с элементами

$$b_{ij} = \int_0^{\tau_0} \varphi_i(\tau) \varphi_j(\tau) d\tau;$$

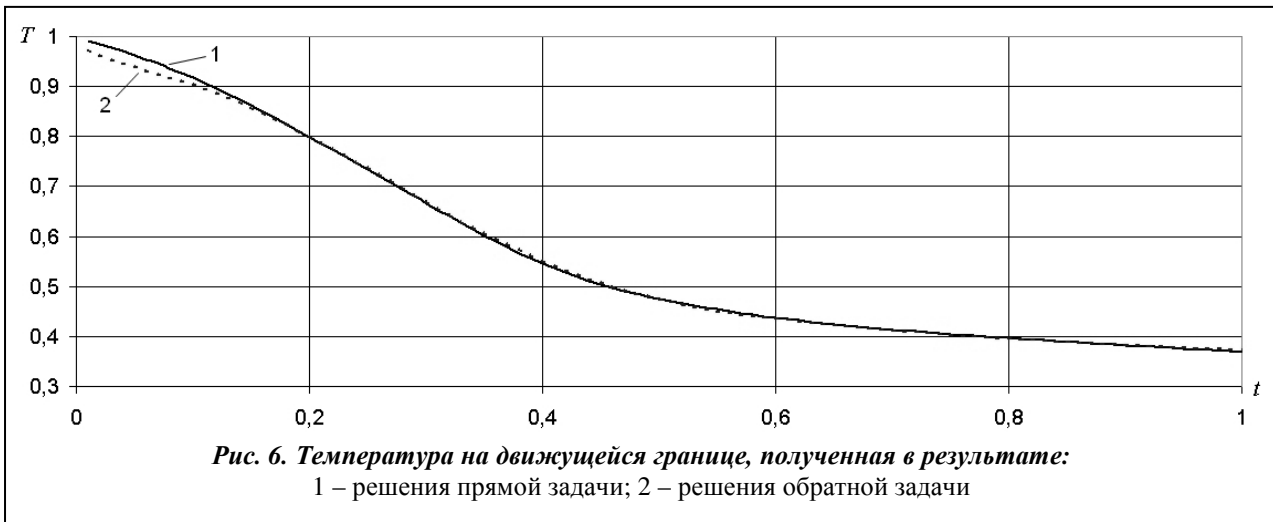
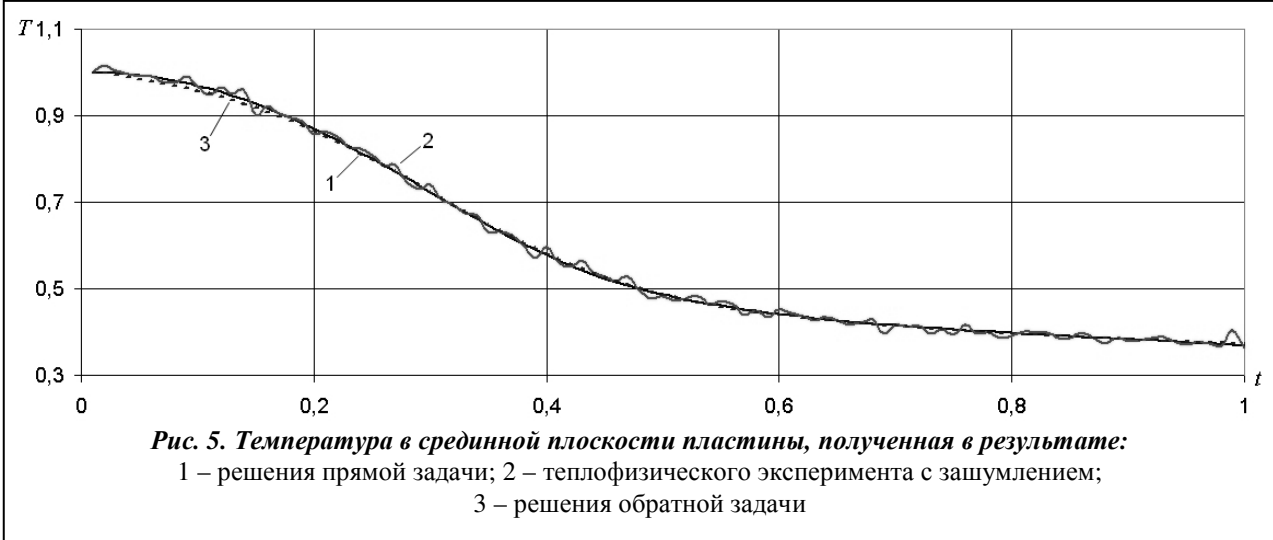
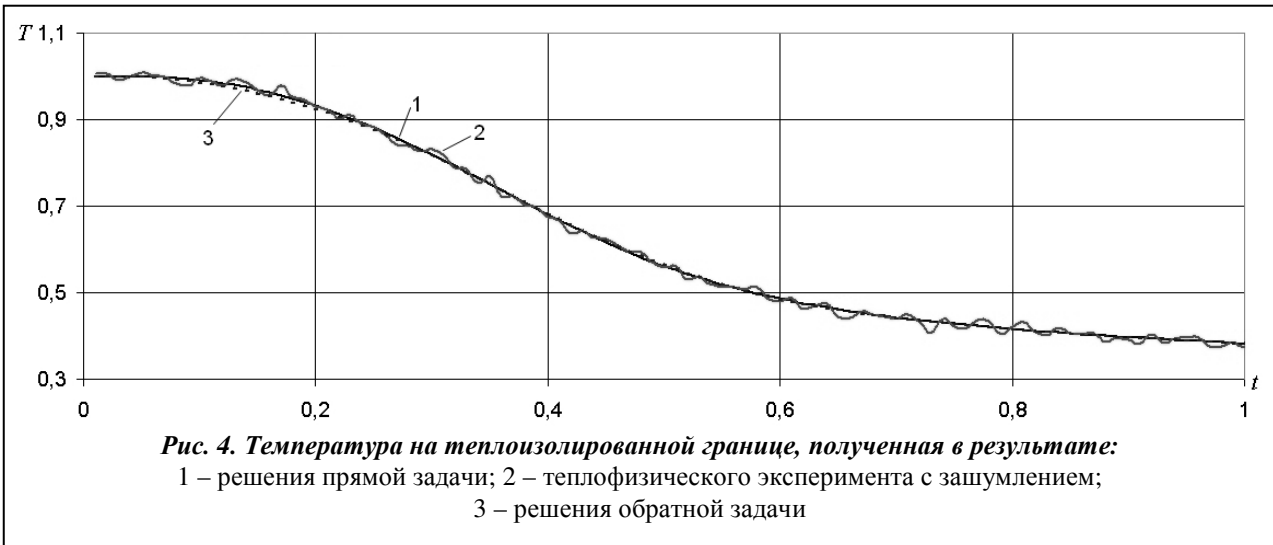
$C_s$  – вектор правой части системы линейных уравнений

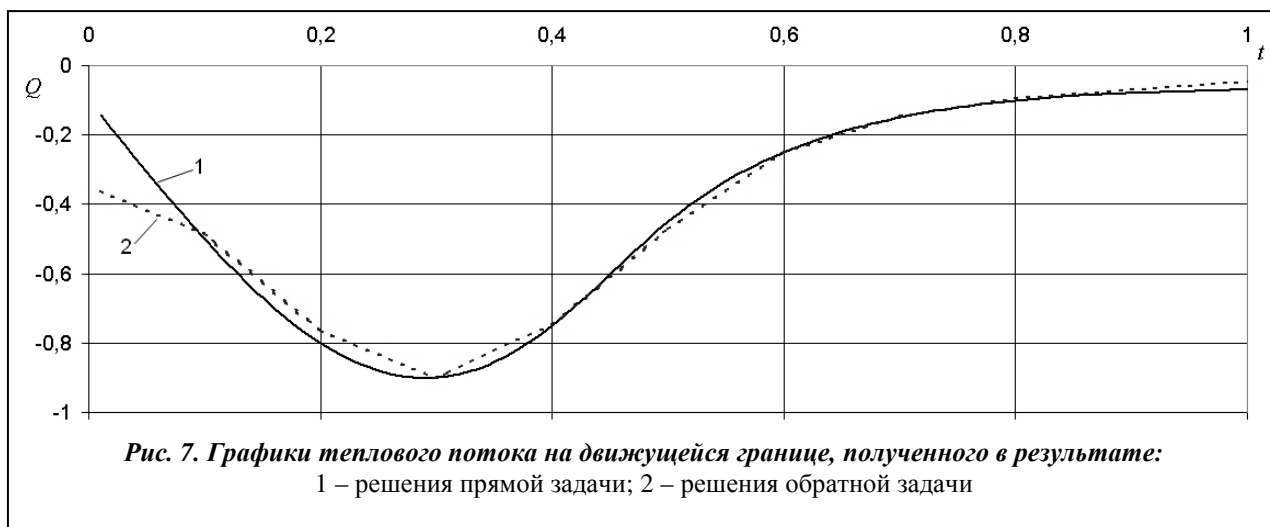
$$c_i^s = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m T_{s,i}(x_l, \tau_k) (T_{l,k}^{\text{ЭКС}} - \bar{T}_s(x_l, \tau_k)).$$

Решения выполнены для таких безразмерных параметров:  $c = 1, \lambda = 1 + T, T_0 = 1, n_Q = 11, m = 100, n = 2, \sigma = 0,01$ , а характер движения границы показан на рис. 3. На рис. 4, 5 представлены сравнения температур в точках термометрирования, а на рис. 6 – на движущейся границе. Идентифицированный тепловой поток на движущейся границе показан на рис. 7.



Из рис. 6, 7 видно хорошее общее совпадение решения обратной задачи теплопроводности с результатами решения прямой задачи, на начальном временном участке такого совпадения нет. Это происходит из-за того, что точки термометрирования находились достаточно далеко от поверхности, на которой определялся поток. Для исправления такой ситуации можно вносить априорную информацию относительно искомого потока до начала термометрических исследований. Такая априорная информация поможет значительно улучшить результаты решения обратной задачи теплопроводности и на начальном временном интервале.





### Выводы

Рассмотренные подходы к решению граничных обратных нелинейных нестационарных задач позволяют идентифицировать сложные зависимости тепловых потоков, когда данные теплофизического эксперимента представлены с некоторыми погрешностями, а устойчивые решения без регуляризации получить невозможно.

Первый подход сильно ограничен в количестве искомых параметров из-за больших вычислительных затрат, тогда как во втором подходе такого ограничения на количество искомых параметров нет, так как минимум функционала находится из решения системы линейных уравнений. Поэтому для сложных обратных задач с искомыми теплофизическими характеристиками, зависящими от температуры, следует совмещать эти два подхода, особенно когда граничная обратная задача – многопараметрическая.

### Литература

1. Бек Дж. Некорректные обратные задачи теплопроводности / Дж. Бек, Б. Блакуэлл, Ч. Сент-Клэр (мл.) – М.: Мир, 1989. – 312 с.
2. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002-2003. Т. 1: Методология. – 408 с.; Т. 2: Приложения. – 392 с.
3. Коздоба Л. А. Методы решения обратных задач теплопереноса / Л. А. Коздоба., П. Г. Круковский. – Киев: Наук. думка, 1982. – 360 с.
4. Алифанов О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев.– М.: Наука, 1988. – 288 с.
5. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
6. Мацевитый Ю. М. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко. – Киев.: Наук. думка, 2014. – 292 с.
7. Шлыков Ю. П. Контактное термическое сопротивление / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин, С. Н. Царевский. – М.: Энергия, 1977. – 328 с.
8. Круковский П. Г. Обратные задачи тепломассопереноса (общий инженерный подход) / П. Г. Круковский. – Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 1998. – 224 с.
9. Новые огнезащитные покрытия по металлу и идентификация их теплофизических свойств / Р. Я. Яковлева, С. Л. Фомин, Н. А. Сафонов, А. М. Безуглый // Наук. вісн. буд-ва. Харків. техн. ун-т буд-тва та архіт.. – 2008. Вип. 48. – С. 250 – 268.
10. Мацевитый Ю. М. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко, В. В. Ганчин // Пробл. машиностроения. – 1999. – Т. 2, № 1–2. – С. 34 – 42.
11. Мацевитый Ю. М. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности / Ю. М. Мацевитый, Н. А. Сафонов, В. В. Ганчин // Пробл. машиностроения. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 28 – 36.



12. *Graham N. Y.* Smoothing with Periodic Cubic Splines / N. Y. Graham // Bell System Tech. J. – 1983. – Vol. 62. – P. 101 – 110.
13. *Reinsch C. H. J.* Smoothing by Spline Function / C. H. J. Reinsch // Numerische Mathematik. – 1967. – Vol. 10. – P. 177 – 183.
14. *Карташов Э. М.* Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами: Обзор / Э. М. Карташов, Б. Я. Любов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83 – 111.
15. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 553 с.
16. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики. Учеб. пособие. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.

*Поступила в редакцию 18.10.17*