УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук
Ю. І. Першина, канд. фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: academ@kharkov.ua)

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ РОЗРИВНИМИ СПЛАЙНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРАПЕЦЕВИДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Запропонований метод побудови розривних інтерполяційних сплайнів, які наближують розривні функції двох змінних з розривами першого роду на лініях прямокутної трапеціїї. Побудовані сплайни як частинний випадок включають в себе розривні та неперервні сплайни.

Предложен метод построения разрывных интерполяционных сплайнов, которые приближают разрывные функции двух переменных с разрывами первого рода на линиях прямоугольной трапеции. Построенные сплайны как частный случай включают в себя разрывные и непрерывные сплайны.

Вступ

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами від однієї та декількох змінних з достатньою повнотою описана в багатьох роботах вітчзняних та зарубіжних дослідників (див. наприклад, [1-4]). На практиці використання кусково-аналітичних наближень, заданих різними формулами (поліномами відповідного степеня) в точках кожного елемента розбиття області наближення, призводить іноді до знаходження великої кількості невідомих параметрів, зокрема до появи неконфорних елементів в методі скінченних елементів [5].

Аналогічна задача досліджувалась в працях Попова Б. А. [6] та інших авторів, де розглядалися наближення неперервних та непервно-диференційовних функцій за допомогою розривних сплайнів в чебишевській нормі (рівномірне наближення).

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких як частинний випадок включає множину неперервних та неперевно-диференційовних до заданого порядку сплайнів, що можуть мати розриви першого роду, або їх частинні похідні в заданих точках або на заданій множині ліній – границь елементів.

Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на цей час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин тощо); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкта. Наприклад, в роботі [6] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структуру тіла.

Таким чином, актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

В статті [7] авторами були побудовані розривні лінійні інтерполяційні сплайни для наближення функцій однієї змінної, що може мати розриви першого роду. В роботі [8] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [9] – інтерлінаційними розривними сплайнами. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [10].

В даній роботі будуються та досліджуються інтерполяційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на прямокутні трапеції та прямокутні трикутники.

Постановка задачі

Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області $D = [0, 1]^2$. Будемо вважати, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається похилою лінією на прямокутну трапецію та прямокутний трикутник. Трапеції та трикутники не вкладаються один в одного, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою роботи є побудова та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції, таких, які в кожній трапеції є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Метод побудови наближуючого розривного сплайн-інтерполянта

Якщо (x_i, y_i) – вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутної трапеції, то може зустрітися чотири типи трапецій (рис. 1)

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\right\}, \qquad \mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\right\},$$
$$\mathrm{TP}_{ij}^{(2)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\right\}, \qquad \mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \left\{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\right\},$$
$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\right\}, \qquad \mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \left\{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\right\},$$
$$\mathrm{TP}_{ij}^{(4)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\right\}, \qquad \mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(x), y_{j-1} < y < y_j\right\}.$$

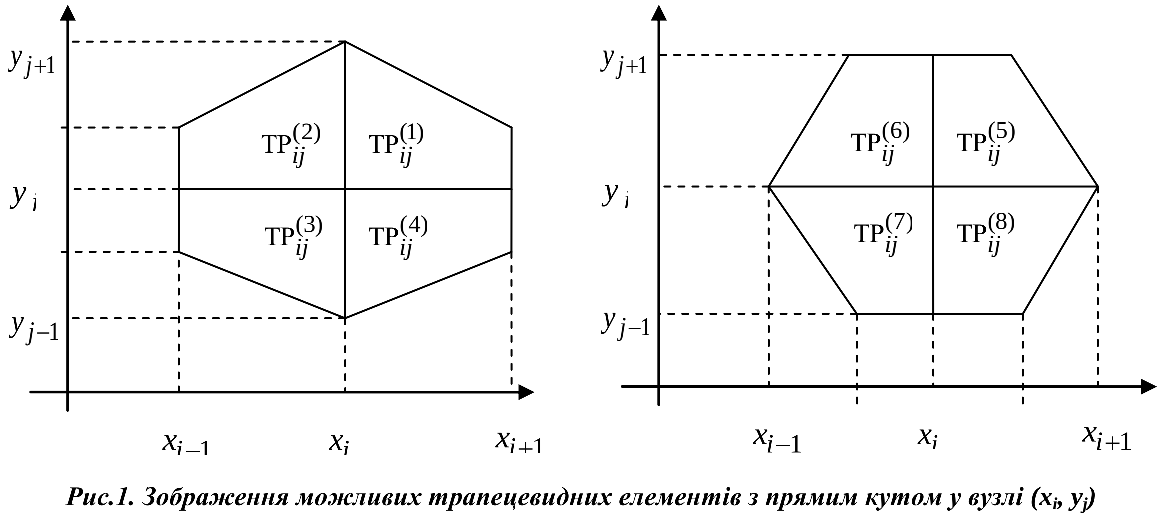

Рис.1. Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває таких значень:

$$
\begin{array}{lll}
C_1^{(1)} = f(x_i+0, y_j+0), & C_1^{(2)} = f(x_i-0, y_j+0), & C_1^{(3)} = f(x_i-0, y_j-0),\\
C_2^{(1)} = f(x_{i+1}-0, y_j+0), & C_2^{(2)} = f(x_{i-1}+0, y_j+0), & C_2^{(3)} = f(x_{i-1}+0, y_j-0),\\
C_3^{(1)} = f(x_i+0, g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0), & C_3^{(2)} = f(x_i-0, g_{j+1}^{(2)}(x_i)-0), & C_3^{(3)} = f(x_i-0, g_{j-1}^{(3)}(x_i)+0),\\
C_4^{(1)} = f(x_{i+1}-0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0), & C_4^{(2)} = f(x_{i-1}+0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1})-0), & C_4^{(3)} = f(x_{i+1}-0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i+1}-0)),\\
C_1^{(4)} = f(x_i+0, y_j-0), & C_1^{(5)} = f(x_i+0, y_j+0), & C_1^{(6)} = f(x_i-0, y_j+0),\\
C_2^{(4)} = f(x_{i+1}-0, y_j-0), & C_2^{(5)} = f(q_{i+1}^{(5)}(y_j)-0, y_j+0), & C_2^{(6)} = f(q_{i-1}^{(6)}(y_j)+0, y_j+0),\\
C_3^{(4)} = f(x_i+0, g_{j-1}^{(4)}(x_i)+0), & C_3^{(5)} = f(x_i+0, y_{j+1}-0), & C_3^{(6)} = f(q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1})+0, y_{j+1}-0),\\
C_4^{(4)} = f(x_{i+1}-0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1})+0), & C_4^{(5)} = f(q_{i+1}^{(5)}(y_{i+1})-0, y_{j+1}-0), & C_4^{(6)} = f(x_i-0, y_{j+1}-0),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
C_1^{(7)} = f(x_i-0, y_j-0), & C_1^{(8)} = f(x_i+0, y_j-0),\\
C_2^{(7)} = f(q_{i-1}^{(7)}(y_j)+0, y_j-0), & C_2^{(8)} = f(q_{i+1}^{(8)}(y_j)-0, y_j-0),\\
C_3^{(7)} = f(q_{i-1}^{(7)}(y_{j+1})+0, y_{j+1}-0), & C_3^{(8)} = f(x_i+0, y_{j-1}+0),\\
C_4^{(7)} = f(x_i-0, y_{j+1}-0), & C_4^{(8)} = f(q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1})-0, y_{j-1}+0).
\end{array}
$$

Визначення: Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{TP}_{ij}^{(k)} \subset D$, k = 1, 2, …, 8 таку функцію

$$
S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(1)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} +
$$

$$
+ C_3^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} + C_4^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})}, (x,y) \in \mathrm{TP}_{ij}^{(k)}, \qquad k = 1,2,\ldots 8, \tag{1}
$$

де $\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j$, $\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i$, $\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y) = \begin{cases} y - g^{(k)}(x), & k = \overline{1,4} \\ y - y_{j+1}, & k = \overline{5,8}, \end{cases}$

$$
\omega 4_{ij}^{(k)}(x,y) = \begin{cases} x - x_{i+1}, & k = \overline{1,4} \\ x - q^{(k)}(y), & k = \overline{5,8}, \end{cases} \quad A_1^{(k)} = (x_i, y_j),
$$

$$
A_2^{(k)} = \begin{cases}
(x_{i+1}-0, y_j+0), & k=1\\
(x_{i-1}-0, y_j+0), & k=2\\
(x_{i-1}-0, y_j-0), & k=3\\
(x_{i+1}-0, y_j-0), & k=4\\
(q_{i+1}^{(5)}(y_j)-0, y_j+0), & k=5\\
(q_{i-1}^{(6)}(y_j)+0, y_j+0), & k=6\\
(q_{i-1}^{(7)}(y_j)-0, y_j-0), & k=7\\
(q_{i+1}^{(8)}(y_j)-0, y_j-0), & k=8,
\end{cases}
\quad
A_3^{(k)} = \begin{cases}
(x_i+0, g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0, & k=1\\
(x_i-0, g_{j+1}^{(2)}(x_i)-0), & k=2\\
(x_i-0, g_{j-1}^{(3)}(x_i)+0), & k=3\\
(x_i+0, g_{j-1}^{(4)}(x_i)+0), & k=4\\
(x_i+0, y_{j+1}-0), & k=5\\
(x_i-0, y_{j+1}-0), & k=6\\
(x_i-0, y_{j-1}+0), & k=7\\
(x_i+0, y_{j-1}+0), & k=8,
\end{cases},
$$

$$A_4^{(k)}=\begin{cases}(x_{i+1}-0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0, & k=1\\ (x_{i-1}+0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1})-0), & k=2\\ (x_{i-1}+0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1})+0), & k=3\\ (x_{i+1}-0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1})+0), & k=4\\ (q_{i+1}^{(5)}(y_{j+1})-0, y_{j+1}-0), & k=5\\ (q_{i-1}^{(6)}(y_{j+1})+0, y_{j+1}-0), & k=6\\ (q_{i-1}^{(7)}(y_{j-1})+0, y_{j-1}+0), & k=7\\ (q_{i+1}^{(8)}(y_{j-1})-0, y_{j-1}+0), & k=8.\end{cases}$$

Теорема 1. Функція $S(x,y)=s_{ij}^{(k)}(x,y), (x,y)\in \text{ТР}_{ij}^{(k)}\subset D$, $k = 1, 2, \ldots, 8$ задовольняє інтерполяційні властивості.

Доведення. Розглянемо трапецевидний елемент $\text{ТР}_{ij}^{(1)}$. Тоді формула (1) перетвориться в такий вираз:

$$S(x,y)=s_{ij}^{(1)}(x,y)=C_1^{(1)}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+C_2^{(1)}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$

$$+C_3^{(1)}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+C_4^{(1)}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}.$$

Перевіримо виконання інтерполяційних властивостей

$$S(x_i+0,y_j+0)=C_1^{(1)}\frac{x_i-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}=C_1^{(1)}=f(x_i+0,y_j+0),$$

$$S(x_{i+1}-0,y_j+0)=C_2^{(1)}\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}=C_2^{(1)}=f(x_{i+1}-0,y_j+0),$$

$$S(x_i+0,g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0)=C_3^{(1)}\frac{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\frac{x_i-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}=C_3^{(1)}=f(x_i+0,g_{j+1}^{(1)}(x_i)-0),$$

$$S(x_{i+1}-0,g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0)=C_4^{(1)}\frac{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_i}=C_4^{(1)}=f(x_{i+1}-0,g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-0).$$

;

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо $f(x, y)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i, y_j) та $f(x,y)\in C^{(r,r)}(\text{ТР}_{ij}^{(1)})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $r = 1, 2$, то залишок наближення функції $f(x, y)$ сплайном вигляду (1) на кожній трапеції буде мати вигляд

$$RS(x,y)=R_1R_2f(x,y)+\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}R_1f(x_i,y)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}R_1f(x_{i+1},y)+$$

$$+\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}R_2f(x,y_j)+\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}R_2f(x,g_{j+1}^{(1)}(x)),$$

де $R_1f(x,y)=\int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}f^{(0,r)}(x,\eta)G1(x,y,\eta)d\eta,\quad x\in[x_i,x_{i+1}],$

$$R_2 f(x,y)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi,y)G2(x,\xi)d\xi,\ y\in[y_j,g_{j+1}^{(1)}(x)],$$

$$G1(x,y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\dfrac{(y_j-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j\le\xi\le y\le g_{j+1}^{(1)}(x)\\ -\dfrac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\dfrac{(g_{j+1}^{(1)}(x)-\eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j\le y\le\xi\le g_{j+1}^{(1)}(x),\end{cases}$$

$$G2(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\dfrac{(x_i-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le\xi\le x\le x_{i+1}\\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i\le x\le\xi\le x_{i+1}.\end{cases}$$

Доведення. Запишемо оператор інтерлінації на лініях $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ (див. [9]) $S_1 f(x,y)=f(x_i,y)\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},y)\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$ та на лініях $y=y_j$, $y=g_{j+1}^{(1)}(x)$:

$$S_2 f(x,y)=f(x,y_j)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+f(x,g_{j+1}(x))\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}.$$

Замінимо в операторах $S_1 f(x,y)$ та $S_2 f(x,y)$ сліди $f(x_i,y), f(x_{i+1},y)$, $f(x,y_j)$, $f(x,g_{j+1}^{(1)}(x))$ операторами інтерполяції

$$\tilde{S}_1 f(x,y)=\left(f(x_i,y_j)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_i)}+f(x_i,g_{j+1}(x_i)\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i)-y_j}\right)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+$$
$$+\left(f(x_{i+1},y_j)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}+f(x_{i+1},g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\right)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i};$$

$$\tilde{S}_2 f(x,y)=\left(f(x_i,y_j)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},y_j)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$
$$+\left(f(x_i,g_{j+1}^{(1)}(x_i))\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1},g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}.$$

Легко побачити, що $S(x,y)=S_2S_1 f(x,y)=\left(\tilde{S}_1+\tilde{S}_2-S_1S_2\right)f(x,y)$, причому перестановність операторів відсутня, тобто $S_1S_2\ne S_2S_1$.

Тепер розглянемо похибку оператора інтерполяції $S(x, y)$

$$RS(x,y)=\left(I-S\right)f(x,y)=\left(I-\tilde{S}_1-\tilde{S}_2+S_1S_2\right)f(x,y)=$$
$$=\left(I-\tilde{S}_1-\tilde{S}_2+S_1S_2\right)f(x,y)+\left(S_1+S_2-S_1S_2\right)f(x,y)-\left(S_1+S_2-S_1S_2\right)f(x,y)=$$
$$=\left(I-S_1-S_2+S_1S_2\right)f(x,y)+\left(S_1-\tilde{S}_1\right)f(x,y)+\left(S_2-\tilde{S}_2\right)f(x,y).$$

Доданок $\left(I-S_1-S_2+S_1S_2\right)f(x,y)$ є залишком наближення функції $f(x,y)$ оператором інтерлінації. Згідно з теоремою 3.2.1 роботи [5] залишок наближення формулами інтерлінації виражається як операторний добуток залишків наближення функції $f(x,y)$ операторами $S1f(x,y)$ та $S2f(x,y)$, тобто

$$\left(I-S_1-S_2+S_1S_2\right)f(x,y)=(f(x,y)-S_1 f(x,y))(f(x,y)-S_2 f(x,y))=R_1 f(x,y)R_2 f(x,y),$$

де

$$R_1 f(x,y) = \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(0,r)}(x,\eta) G1(x,y,\eta) d\eta, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$R_2 f(x,y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi, y) G2(x,\xi) d\xi, \ y \in [y_j, g_{j+1}^{(1)}(x)],$$

$$G1(x,y,\eta) = \begin{cases} \dfrac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \dfrac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \le \xi \le y \le g_{j+1}^{(1)}(x) \\ -\dfrac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \dfrac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \le y \le \xi \le g_{j+1}^{(1)}(x), \end{cases}$$

$$G2(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dfrac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \le \xi \le x \le x_{i+1} \\ -\dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \dfrac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \le x \le \xi \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$$(S_1 - \tilde{S}_1) f(x,y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \left(f(x_i, y) - f(x_i, y_j) \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x_i)} + f(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i)) \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i) - y_j} \right) +$$

$$+ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \left(f(x_{i+1}, y) - f(x_{i+1}, y_j) \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})} + f(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - y_j} \right) =$$

$$= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y),$$

$$\left(S_2 - \tilde{S}_2\right) f(x,y) = \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \left(f(x, y_j) - f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}, y_j) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) +$$

$$+ \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \left(f(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) - f(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) =$$

$$= \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} R_2 f(x, g_{j+1}^{(1)}(x)).$$

Теорема 2 доведена.

Зауваження. Якщо значення функції у вузлах трапецевидної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_p^{(k)}$, $p = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \ldots, 8$ в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J^{(k)}(C) = \sum_{\mathrm{TP}_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{\mathrm{TP}_{ij}^{(k)}} \left[f(x,y) - s_{ij}^{(k)}(x,y,C) \right]^2 dxdy \to \min_C .$$

И тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

<u>Приклад 1.</u> Нехай функція $f(x, y)$ задана в одиничному квадраті $[0, 1]^2$ таким чином (рис. 2):

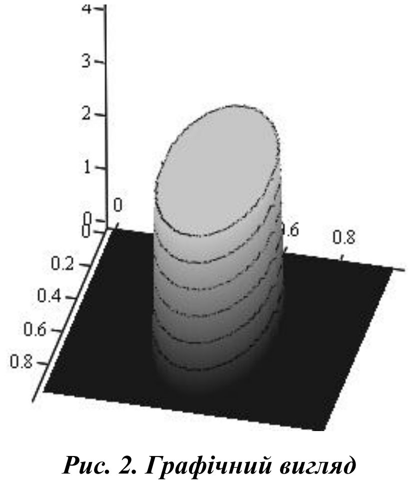

Рис. 2. Графічний вигляд наближуваної функції

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & \dfrac{(x-0.5)^2}{0.16}+\dfrac{(y-0.5)^2}{0.04}\le 1\\ 0, & \text{в інших випадках}.\end{cases}$$

Тобто на лінії еліпса функція має розриви першого роду. Нехай задані вузли $x_1 = 0$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.5$, $y_4 = 0.7$, $y_5 = 1$. Вони розбивають одиничний квадрат на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в одиного, а сторони трикутників не перетинаються.

Для побудови розривного наближуючого сплайна на цих вузлах скористаємося результатами роботи [10], в якій авторами був побудований та досліджений оператор розривної поліноміальної інтерполяції для наближення розривних функцій двох змінних, що має триангульовану область визначення. Зобразимо отриманий розривний сплайн та наближувану функцію покажемо на рис. 3.

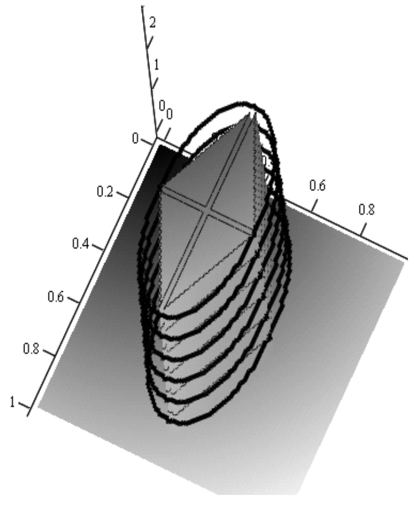

Рис. 3. Зображення наближуваної функції f(x, y) (чорні контури) та наближуючого сплайна (сірий колір) з використанням трикутних елементів

Тепер розіб'ємо одиничний квадрат на прямокутні трапеції та прямокутні трикутники та побудуємо на цій сітці вузлів розривний поліноміальний сплайн вигляду (1) та зобразимо цей сплайн і наближуючу функцію $f(x, y)$ на рис. 4.

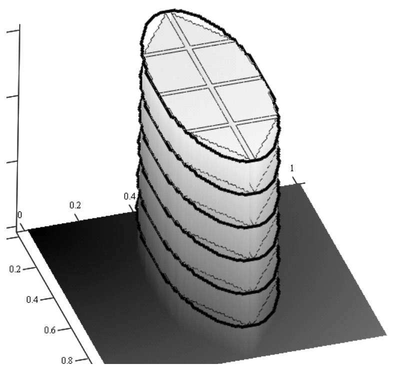

Рис.4. Зображення наближуваної функції f(x, y) (чорні контури) та наближуючого сплайна (сірий колір) з використанням трапецевидних та трикутних елементів

Як бачимо, наближений сплайн, побудований на трапеціях та трикутниках, наближує краще, ніж тільки на трикутниках.

Висновки

В роботі пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайна для наближення функції з розривами першого роду. Область визначення цих функцій розбита на прямокутні трапеції та прямокутні трикутники. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе як частинний випадок класичні неперервні сплайни першого степеня на заданій сітці вузлів.

В подальшому авторами планується знайти оцінку похибки наближення побудованої розривної конструкції та застосувати розроблені методи до відновлення фантома Шепа–Логана в комп'ютерній томографії.

Література

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Стечкин С. Б.* Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
3. *Завьялов Ю. С.* Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченкою. – М.: Наука. 1976. – 352 с.
4. *De Vore R. A.* A method of grid optimization for finite element methods / R. A. De Vore – Computer Method Appl. Mech. and Eng. – 1983. – Vol. 41. – P. 29–45.
5. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
6. *Литвин О. М.* Наближення розривної функції однієї змінної, використовуючи метод мінімакса / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: Пр. наук.-техн. конф. (7–8 жовтня 2010р.). – Львів. – 2010. – С. 52–55.

7. *Литвин О. М.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. пр. – Кам'янець-Поділь. нац. Ун-т ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип. 3. – С. 122 – 131.
8. *Литвин О. М.* Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Таврій. вісн. інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – № 1. – С. 63–72.
9. *Литвин О. Н.* Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Компьютерная математика. – Киев, 2011. – № 1. – С. 96–105.
10. *Литвин О. М.* Наближення розривних функцій двох змінних з розривами на лініях тріангуляції двовимірної області за допомогою операторів сплайн-інтерлінації / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): Матеріали ІІ Всеукраїн. наук.-практ. конф., 17–19 березня 2011 р. – Полтава, 2011р. – С. 178–181.

Надійшла до редакції
09.11.11

УДК 519.63

О. Ю. Лисина

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: lisina_korovina@mail.ru)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ ИЗДЕЛИЯХ НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Представляется бессеточный метод решения нестационарной трехмерной задачи теплопроводности в сложной области. Предлагается алгоритм численной реализации на основе использования атомарных радиальных базисных функций.

Подається безсітковий метод роз'язання нестаціонарної тривимірної задачі теплопровідності в складній області. Пропонується алгоритм чисельної реалізації на основі використання атомарних радіальних базисних функцій.

Введение

Исследуется явление переноса тепла теплопроводностью и конвекцией в сложных 3D областях, представляющих объекты реальных машиностроительных изделий. Математическая модель, описывающая такое явление, задается начально-краевой задачей для дифференциального уравнения параболического типа с соответствующими краевыми условиями.

Рассматривается случай, когда теплофизические свойства среды остаются постоянными, то есть область исследования является изотропной и коэффициенты, входящие в дифференциальное уравнение, не зависят от температуры.

При таких ограничениях математическая постановка трехмерной краевой задачи нестационарной теплопроводности имеет вид

$$L[u(t,\, x)] \equiv \rho c \frac{\partial u(t,\, x)}{\partial t} - k\Delta u(t,\, x) = f(t,\, x), \qquad 0 < t \le T < \infty, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$u(0,\, x) = \varphi(x),\; x \in (\Omega + \partial\Omega) = \bar{\Omega}; \tag{2}$$

$$B[u(x)]\big|_{\partial\Omega} \equiv \alpha\phi(t,\, x) + \beta\upsilon(t,\, x) = g(t,\, x),\; t > 0, \tag{3}$$

где Ω – ограниченная область из E_3, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\partial\Omega$ – граница области.

Приближенное решение данной краевой задачи выполняется по бессеточной схеме. Обзор по применению бессеточных алгоритмов при решении краевых задач осуществлен в работах [1–2].