

3. *Jameson A.* Transonic flow calculations for aircraft / A. Jameson // Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics / F. Brezzi, ed. – Springer Verlag. – 1985. – P. 156–242.
4. *Yao J.* Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows / J. Yao, A. Jameson, J. J. Alonso, F. Liu // 38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 10–13, 2000. – Reno, NV. – AIAA Paper. – 2000. – № 00-0882. – 23 p.
5. *Mavriplis D. J.* An Assessment of Linear Versus Non-linear Multigrid Methods for Unstructured Mesh Solvers / D. J. Mavriplis // NASA CR-2001-210870. ICASE Report. – 2001. – № 2001-12. – 22 p.
6. *Nejat A.* A High-Order Accurate Unstructured GMRES Algorithm for Inviscid Compressible Flows / A. Nejat, C. Ollivier-Gooch // AIAA Pap. – 2005. – № 2005-5341. – 12 p.
7. *Jameson A.* The Present Status, Challenges, and Future Developments in Computational Fluid Dynamics / A. Jameson // Proc. 7th AGARD Fluid Dynamics Panel Symposium, Seville, October 1995. – AGARD CP578. – 1996. – 38 p.
8. *Chakravarthy S. R.* Development of Upwind Schemes for the Euler Equations / S. R. Chakravarthy // NASA Contractor Report. – 1987. – № 4043. – 139 p.
9. *Daude F.* Low cost method for LES of complex flows via a new implicit time integration scheme / F. Daude, I. Mary, P. Comte // 7th ONERA-DLR Aerospace Symposium, Toulouse, France, 2006, October 4-6. – 2006. – № TP-2006-166. – 11 p.
10. *Ершов С. В.* Решение уравнений газовой динамики с помощью неявной итерационной схемы / С. В. Ершов // Вестн. Харьк. нац. ун-та. – 2006. – № 775. Сер. Мат. моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы, вып. 7. – С. 159–173.
11. *Beam R. M.* An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations / R. M. Beam, R. F. Warming / Proc. AIAA 3rd Comput. Fluid Dyn. Conf. – Albuquerque, 1977. – P. 645–649.
12. *Ершов С. В.* Квазилинейная схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса / С. В. Ершов // Мат. моделирование. – 1994. – Т. 6, № 11. – С. 63–75.
13. *Harten A.* Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes / A. Harten, S. Osher // SIAM J. Num. Analysis. – 1987. – Vol. 24, № 2. – P. 279–309.
14. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
15. *Sod G. A.* A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws / G. A. Sod // J. Comp. Phys. – 1978. – Vol. 27, № 1. – P. 1–31.
16. *Lax P.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation / P. Lax // Commun Pure Appl. Math. – 1954. – Vol. 7, № 1. – P. 159–201.

Поступила в редакцию
06.11.09

УДК 517.95: 518.517

К. В. Максименко-Шейко, канд. физ.-мат. наук

Т. И. Шейко, д-р техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
(г. Харьков, E-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ ФРАКТАЛЬНОЙ ПРИРОДЫ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

При описании объектов фрактальной геометрии используются следующие конструктивные средства теории R-функций: R-операции системы $\{R_0\}$; суперпозиции функции $\omega(x, y)$ с периодическими функциями, позволяющие транслировать заданную функцию $\omega(x, y)$ вдоль осей и вдоль окружности; свойство подобия фигур; рекурсивные процедуры. Рассмотрены задачи нахождения E- и H-волн в регулярном волноводе с поперечным сечением в виде предфракталов – снежинок Коха, построенных на правильном треугольнике и квадрате. Достоверность полученных решений исследовалась с использованием метода мажорирующих областей.

При описанні об'єктів фрактальної геометрії використовуються такі конструктивні засоби теорії R-функцій: R-операції системи $\{R_0\}$; суперпозиції функції $\omega(x, y)$ з періодичними функціями, що дозволяють транслювати задану функцію $\omega(x, y)$ уздовж осей і уздовж окружності; властивість подоби фігур; рекурсивні процедури. Розглянуто задачі знаходження E- та H-хвиль у регулярному хвилеводі з поперечним перерізом у вигляді предфракталів – сніжинок Коха, побудованих на правильному трикутнику і квадраті. Вірогідність отриманих розв'язків досліджувалася з використанням методу мажоруючих областей.

Введение

В настоящее время фракталы широко применяются в радиотехнике при проектировании антенных устройств и волноводов. Наиболее распространенным типом последних являются регулярные продольно-однородные волноводы [1]. Пусть среда, заполняющая волновод, характеризуется нулевой проводимостью σ , диэлектрической постоянной ϵ_0 и магнитной проницаемостью μ_0 , а внутри волновода отсутствуют источники поля. Волновод предполагается бесконечно протяженным по оси распространения электромагнитных волн Oz . В литературе чаще всего рассматриваются случаи регулярных волноводов, границы поперечных сечений которых образованы координатными линиями одной из ортогональных систем (П-, Н-, Г-, Т-, О- и крестообразные волноводы), т.е. когда можно использовать методы разделения переменных или частичных подобластей. Применение волноводов сложных сечений в широкополосных системах дает значительный экономический эффект за счет того, что, например, комплект оборудования на П- и Н-образных волноводах позволяет работать в диапазоне волн, для перекрытия которого требуется три-пять комплектов на стандартных прямоугольных волноводах [2]. Волноводы с поперечным сечением сложной формы дают большие возможности по управлению их параметрами. Для поперечного сечения произвольной формы возможно лишь численное решение поставленных задач. При этом одним из наиболее удобных и эффективных методов решения такого класса внутренних задач электродинамики является метод R-функций [3,4]. Следует отметить, что экспериментальная отработка СВЧ-узлов на волноводах сложных сечений является дорогостоящей и трудоемкой. Проведение же предварительного численного эксперимента не только упрощает разработку этих СВЧ-узлов, но зачастую является определяющим при их проектировании.

Целью данной работы является построение уравнений границ поперечных сечений волноводов фрактальной природы и исследование в них ТЕ- и ТН-волн.

Основная часть

Математическая модель для продольной составляющей электрического поля $E_z \equiv u^e$; $H_z = 0$ (волны E-типа, или ТН-волны) имеет вид [5, 6]

$$\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^e}{\partial y^2} + g^2 u^e = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (1)$$

$$u^e|_{\partial\Omega} = 0.$$

Математическая модель для продольной составляющей магнитного поля $H_z \equiv u^m$; $E_z = 0$ (волны Н-типа, или ТЕ-волны) записывается как [2, 3]

$$\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^m}{\partial y^2} + g^2 u^m = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u^m}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь $g = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$ — поперечное волновое число; $k = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$; γ — продольное волновое число.

Пусть конечная область $\Omega \subset R^2$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$. Численное решение основано на минимизации функционала по методу Ритца [7]

$$I = -\frac{\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega}{\int_{\Omega} u^2 d\Omega} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}.$$

Решение задачи Дирихле должно принадлежать гильбертову пространству $W_2^0(\Omega)$, состоящему из функций, принадлежащих $W_2^1(\Omega)$ и равных нулю на $\partial\Omega$, а задачи Неймана – пространству $W_2^1(\Omega)$ и удовлетворять условию $\int_{\Omega} u d\Omega = 0$. Структура решения задачи Ди-

рихле имеет вид $u^e = \omega P$, а задачи Неймана – $u^m = P - \omega D_1 P$, $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$ либо

$u^m = P$. Здесь $\omega(x, y) \geq 0$ – нормализованное уравнение границы $\partial\Omega$; P – неопределенная

компонента, которая обычно аппроксимируется рядом $P(x, y) = \sum_{k=0}^K c_k \psi_k(x, y)$, где ψ_k – элементы полной системы координатных функций; c_k – неизвестные коэффициенты. Приближенные собственные значения оператора Лапласа удовлетворяют цепочке неравенств $g_0^{(K)} \leq g_1^{(K)} \leq \dots \leq g_K^{(K)}$ и являются приближениями к точным значениям сверху, т.е. $g_k^{(K)} \geq g_k$, $\lim_{K \rightarrow \infty} g_k^{(K)} = g_k$. Чем больше номер k , тем хуже приближение.

Рассмотрим задачу нахождения Е-волн в регулярных волноводах с поперечными сечениями в виде предфракталов – снежинок Коха, построенных на правильном треугольнике и на квадрате. Остановимся на процессе построения кривой и снежинки (острова) Коха. Процесс построения кривой Коха выглядит следующим образом: берем единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырех получившихся звеньев. Предельная кривая является кривой Коха. Кривая Коха примечательна тем, что нигде не имеет касательной, т.е. нигде не дифференцируема, хотя всюду непрерывна. Кривая Коха не спрямляема, не имеет самопересечений. Она имеет фрактальную размерность, которая равна $\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$, поскольку состоит из четырёх равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия 1/3. Выполним построение на интервале $-3a \leq x \leq 3a$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -y \geq 0; & \omega_1 &= \omega_0 \vee_0 (f_1 \wedge_0 f_2) \geq 0; \\ f_1 &= \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}) \geq 0; & f_2 &= \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3}) \geq 0; \\ \omega_{21} &= \omega_1(3(x+2a), 3y) \geq 0; \\ \omega_{22} &= \omega_1 \left(3 \left(\frac{x+a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right), 3 \left(-(x+a/2) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \right) \geq 0; \\ \omega_2 &= (\omega_{21}(x, y) \vee_0 \omega_{22}(x, y)) \wedge_0 (\omega_{21}(-x, y) \vee_0 \omega_{22}(-x, y)) \geq 0; \\ \omega_{k1} &= \omega_{k-1}(3(x+2a), 3y) \geq 0; \end{aligned}$$

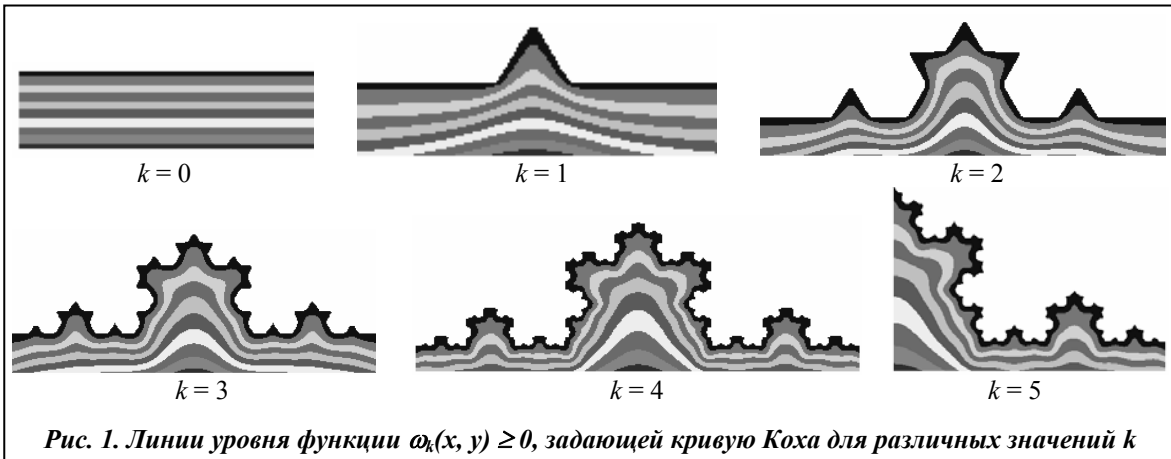


Рис. 1. Линии уровня функции $\omega_k(x, y) \geq 0$, задающей кривую Коха для различных значений k

$$\omega_{k2} = \omega_{k-1} \left(3 \left(\frac{x+a/2}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right), 3 \left(-\frac{(x+a/2)\sqrt{3}}{2} + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \frac{1}{2} \right) \right) \geq 0;$$

$$\omega_k = (\omega_{k1}(x, y) \vee_0 \omega_{k2}(x, y)) \wedge_0 (\omega_{k1}(-x, y) \vee_0 \omega_{k2}(-x, y)) \geq 0 \quad (k = 3, 4, \dots).$$

На рис. 1 приведены картины линий уровня функции $\omega_k(x, y) \geq 0$.

Три копии кривой Коха, построенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, называемую снежинкой (или островом) Коха. Зная уравнение кривой Коха $\omega_k(x, y) \geq 0$, можно построить уравнение снежинки Коха (рис.2), выполнив следующие преобразования:

$$\omega S_k = \omega_k(r \sin \mu, r \cos \mu - R) \geq 0,$$

где $\mu(\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[\frac{(2k-1)n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}$; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \arctg \frac{y}{x}$; R – радиус окружности,

вписанной в правильный n -угольник со стороной, равной отрезку, на котором строится кривая Коха.

Пользуясь данной методикой, можно строить снежинки на сторонах различных правильных многоугольников.

На рис. 3 показаны линии уровня первых шести собственных функций (ТН-волны) при $k = 2$.

Для исследования достоверности полученных решений используем метод мажорирующих областей (рис. 4) [3]. В качестве оценки, для сравнения в первой и последней строках табл. 1 приведены собственные значения для мажорирующих круговых областей (рис. 4, а).

Рассмотрим задачу нахождения ТН-волн в регулярном волноводе с поперечным сечением в виде предфрактала снежинки Коха, построенной на квадрате при $k = 3$. На рис. 5 показаны линии уровня первых шести собственных функций.

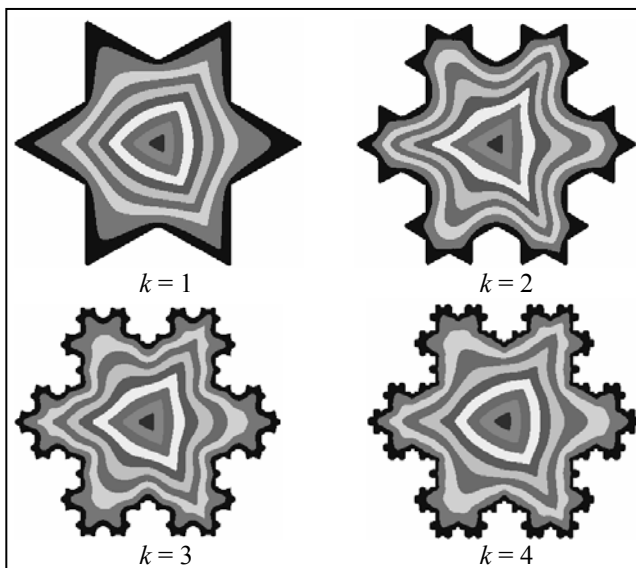


Рис. 2. Линии уровня функции $\omega S_k(x, y) \geq 0$, задающей снежинку Коха на сторонах правильного треугольника для различных значений k

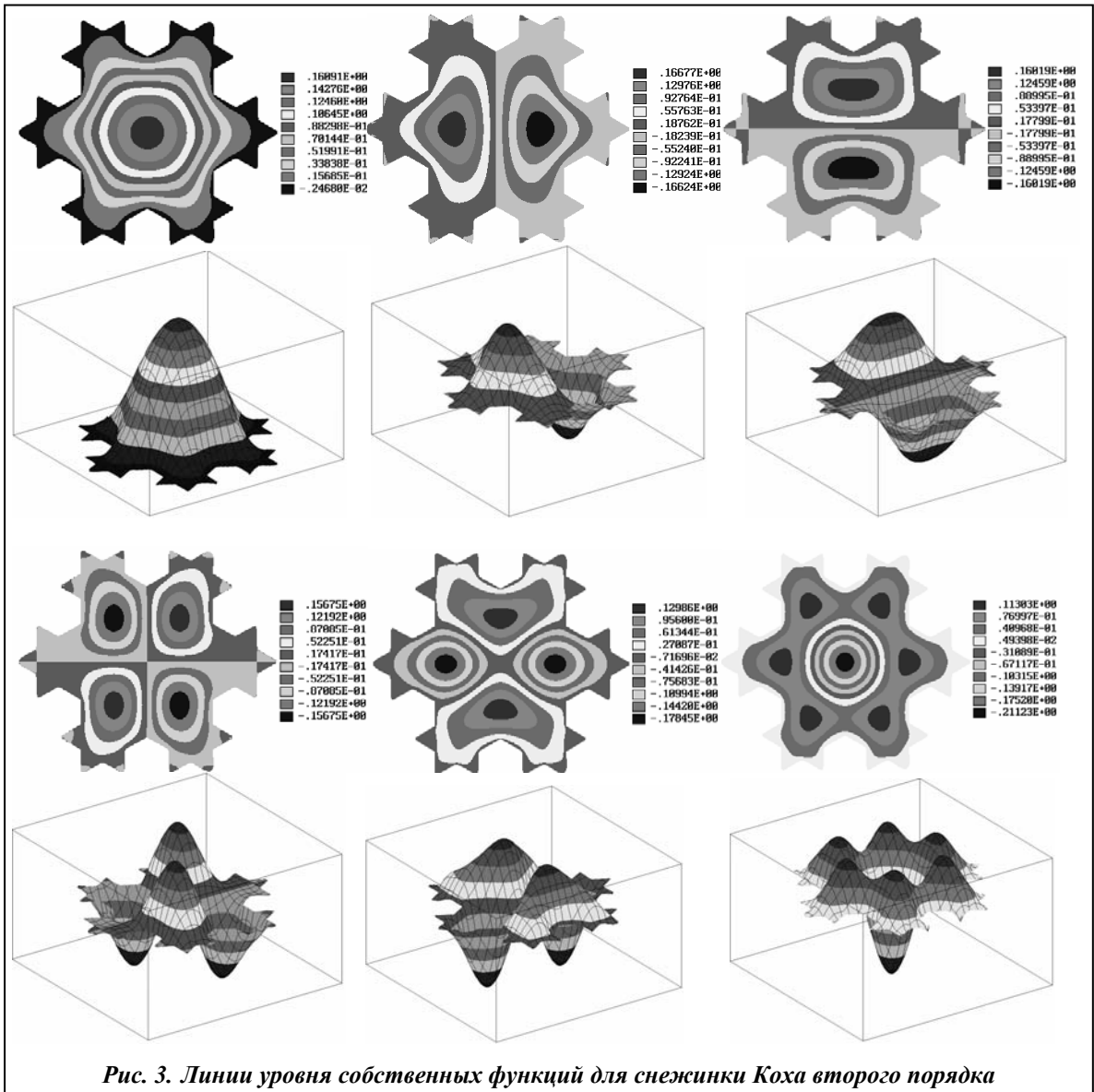


Рис. 3. Линии уровня собственных функций для снежинки Коха второго порядка

В качестве оценки, для сравнения в первой и последней строках табл. 2 приведены собственные значения для мажорирующих круговых областей (рис. 4, б).

Следует отметить практическое вырождение собственных значений, соответствующих второй и третьей, четвертой и пятой собственным функциям на рис. 3 и 5. Данный эффект наблюдается при различных значениях параметра k и виде правильного многоугольника (в нашем случае – правильный треугольник и квадрат).

Таблица 1. Собственные числа снежинки Коха и мажорирующих круговых областей при $k = 2$

$g - R$	$g - Koch$	$g - r$
0,2404	0,3494	0,4001
0,3831	0,5485	0,6386
0,3831	0,5521	0,6386
0,5136	0,7185	0,8560
0,5136	0,7208	0,8560
0,5521	0,7712	0,9201

Таблица 2. Собственные числа снежинки Коха, построенной на квадрате, и мажорирующих круговых областей при $k = 3$

$g - R$	$g - Koch$	$g - r$
0,1718	0,2370	0,2404
0,2737	0,3758	0,3831
0,2737	0,3762	0,3831
0,3669	0,4970	0,5136
0,3669	0,5053	0,5136
0,3945	0,5377	0,5521

Решение краевых задач в областях фрактальной геометрии с краевыми условиями дифференциального типа (ТЕ-волны) сопряжено с трудностями, вызванными тем, что невозможно определить в классическом смысле понятия касательной и нормали к границе. Одним из возможных подходов к решению является отказ от точного удовлетворения естественным граничным условиям. Ниже приведены линии уровня первых шести собственных функций (рис. 6) и собственные значения (табл. 3) для снежинки Коха, построенной на квадрате.

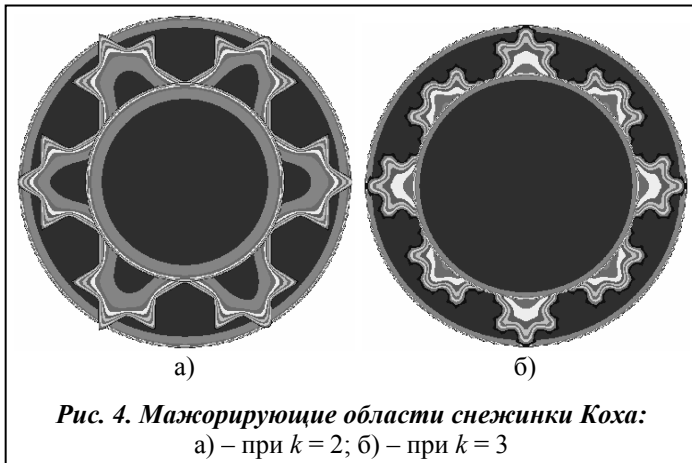


Рис. 4. Мажорирующие области снежинки Коха: а) – при $k = 2$; б) – при $k = 3$

Ниже приведены линии уровня собственных функций (рис. 7, 8) и собственные значения (табл. 4) для снежинок Коха, построенных на правильном треугольнике.

Таблица 3. Собственные числа снежинки Коха, построенной на квадрате, и мажорирующих круговых областей при $k = 2$

$g - R$	$g - Koch$	$g - r$
0,1320	0,1527	0,1841
0,1320	0,1541	0,1841
0,2182	0,2351	0,3054
0,2182	0,2577	0,3054
0,2737	0,3085	0,3831
0,3001	0,3162	0,4201

Таблица 4. Собственные числа снежинок Коха, построенных на правильном треугольнике, и мажорирующих круговых областей

$g - R$	g	$k = 1$	g	$k = 2$	$g - r$
0,1841	0,2196		0,1997		0,3069
0,1841	0,2201		0,2031		0,3069
0,3054	0,3194		0,2887		0,5090
0,3054	0,3209		0,2990		0,5090
0,3831	0,3547		0,3243		0,6386
0,4201	0,4457		0,4214		0,7001

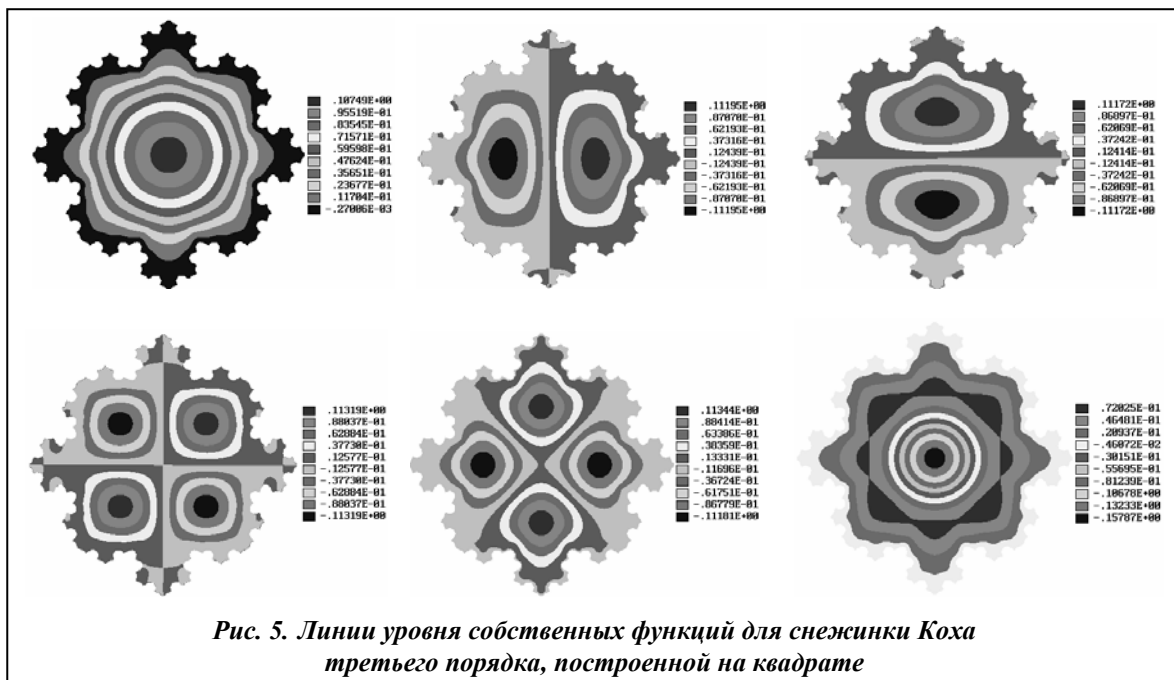
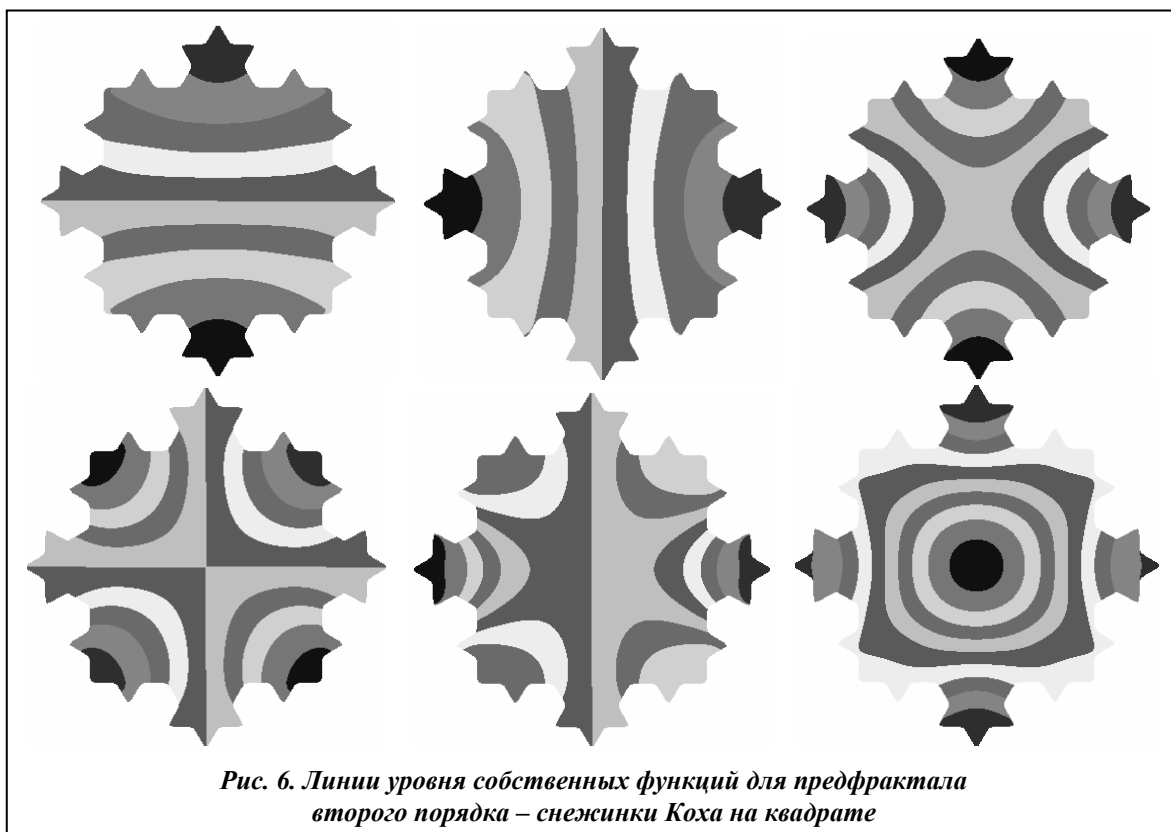
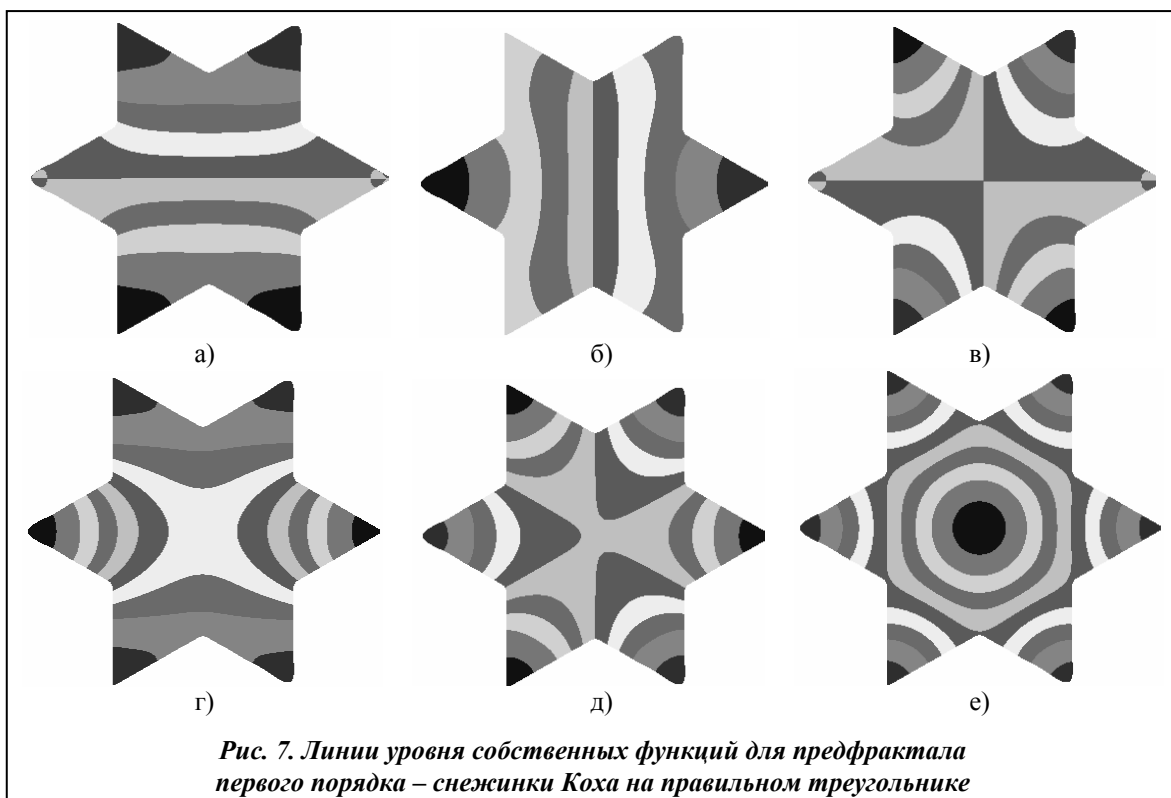


Рис. 5. Линии уровня собственных функций для снежинки Коха третьего порядка, построенной на квадрате



Здесь также следует отметить практическое вырождение собственных значений, соответствующих первой и второй, третьей и четвертой собственным функциям на рис. 6, 7, 8. Данный эффект наблюдается при различных значениях параметра k и виде правильного многоугольника (в нашем случае – правильный треугольник и квадрат).



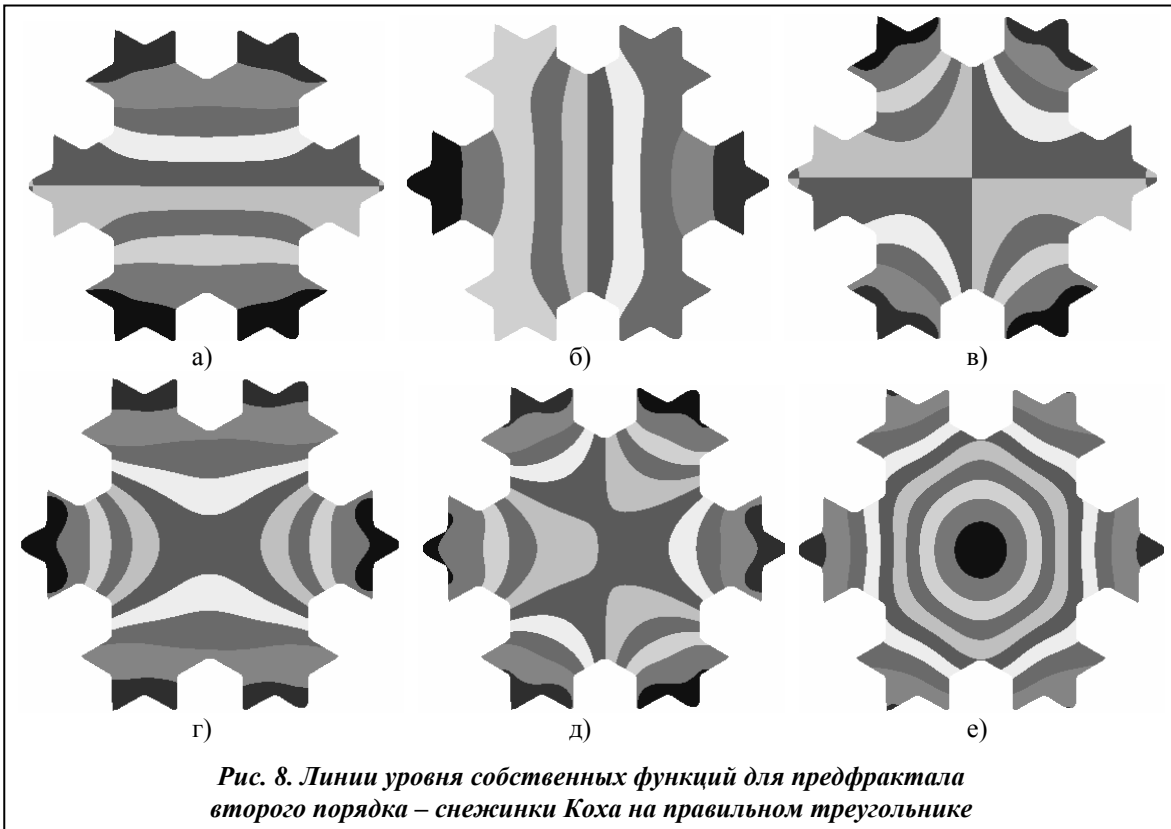


Рис. 8. Линии уровня собственных функций для предфрактала второго порядка – снежинки Коха на правильном треугольнике

Выводы

Математический аппарат теории R-функций оказался весьма удобным для описания объектов фрактальной геометрии функциями $\omega(x) = 0, x \in E^n$ (или неравенствами $\omega(x) \geq 0$), где $\omega(x)$ имеет вид единого аналитического выражения. При этом были использованы следующие конструктивные средства:

– R-операции системы $\{R_0\} = \begin{cases} x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \bar{x} = -x \end{cases}$;

– суперпозиции функции $\omega(x_1 - R, y_1)$, (где $x_1 = r \cos \mu, y_1 = r \sin \mu$,

$\mu(\theta) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin \left[(2k-1) \frac{n\theta}{2} \right]}{(2k-1)^2}, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctg \frac{y}{x}$), позволяющие транслировать заданную функцию $\omega(x, y)$ вдоль окружности радиуса R n раз;

– свойство подобия фигур, описанных уравнениями $\omega(x, y) = 0$ и $\frac{1}{K} \omega(Kx, Ky) = 0$, где K – коэффициент подобия;

– рекурсивные процедуры.

Методы R-функций и Ритца, подкрепленные системой ПОЛЕ, обеспечивают оперативное решение поставленных задач определения продольных составляющих электрического и магнитного поля в волноводах, в том числе с поперечными сечениями предфрактального типа.

Литература

1. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ / А. Д. Григорьев. – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с.

2. *Волноводы с поперечным сечением сложной формы* / Под ред. В. М. Седых. – Харьков: Вища шк., 1979. – 128 с.
3. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
4. *Максименко-Шейко К. В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков: Ин-т пробл. машиностроения НАН Украины, 2009. – 306 с.
5. *Никольский В. В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики / В. В. Никольский. – М.: Наука, 1967. – 459 с.
6. *Кравченко В. Ф.* Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики / В. Ф. Кравченко, М. А. Басараб. – М.: Физматлит, 2004. – 308 с.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Поступила в редакцию
11.11.10

УДК 519.85

И. А. Чуб*, канд. техн. наук
А. С. Иванилов**, д-р эконом. наук
М. В. Новожилова**, д-р физ.-мат. наук

* Национальный университет гражданской защиты Украины
(г. Харьков, E-mail: chubia@nuczu.edu.ua)

** Харьковский государственный технический университет
строительства и архитектуры (E-mail: novozhilova@cstuca.kharkov.ua)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРОЕКТА КАК ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИЗМЕНЯЕМЫМИ МЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Построена математическая модель многокритериальной задачи распределения ограниченных ресурсов проекта как оптимизационной задачи размещения конечного набора геометрических объектов с переменными метрическими характеристиками и пространственной формой. Предложен метод ее решения и проведены численные исследования на примере оптимизации плана выполнения работ по реконструкции тепловых сетей в г. Харькове.

Побудована математична модель багатокритеріальної задачі розподілу обмежених ресурсів проекту як оптимізаційної задачі розміщення кінцевого набору геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками й просторовою формою. Запропонований метод її розв'язання й проведені чисельні дослідження на прикладі оптимізації плану виконання робіт з реконструкції теплових мереж у м. Харкові.

Актуальность исследования и анализ научной литературы. Задачи оптимального управления ограниченными ресурсами различной физической природы (финансовые, временные, кадровые и т.д.), в том числе задачи оптимального распределения ресурсов, возникают во многих областях практической деятельности. Ограниченность временного ресурса означает, что речь идет об управлении ресурсами проекта. На сегодняшний день имеется значительное число научных публикаций и множество инструментальных средств решения задач такого рода, основанных на использовании методического арсенала современной прикладной математики [1–4]. В данной работе развивается подход, предложенный в публикациях [5, 6] и основанный на использовании такого раздела теории оптимизационного гео-