

УДК 532.5+536.24

**К. В. Максименко-Шейко**, канд. физ.-мат. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины;  
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина  
(г. Харьков, E-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua)

## **МЕТОД R-ФУНКЦИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ КАНАЛАМ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ВИНТОВЫМИ ВСТАВКАМИ**

*Построены математические модели теплообмена при движении несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим каналам с центральными винтовыми вставками в криволинейных неортогональных координатах. Для ламинарного течения в области тепловой стабилизации трехмерная задача сведена к двухмерной. Исследовано влияние геометрических и физических параметров на распределение температурного поля методом R-функций.*

*Побудовано математичні моделі теплообміну під час руху нестисливої в'язкої рідини циліндричними каналами з центральними гвинтовими вставками в криволінійних неортогональних координатах. Для ламінарної течії в області теплової стабілізації тривимірну задачу зведено до двовимірної. Досліджено вплив геометричних і фізичних параметрів на розподіл температурного поля методом R-функцій.*

### **Введение**

Для увеличения эффективного коэффициента теплопередачи в технике широко используются скрученные трубы и каналы с винтовыми вставками [1]. Потoki, которые возникают при движении жидкости в таких каналах, дают возможность интенсифицировать процессы тепломассообмена и добиться экономии энергетических ресурсов. В [2, 3] рассматривались задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоских, круглых, прямоугольных цилиндрических трубах и при продольном обтекании пучка стержней. В [4–7] при решении упомянутых задач, в том числе для труб неклассического поперечного сечения, был развит и использован метод R-функций. В [8] предложен операционно-структурный метод, базирующийся на совместном применении интегрального преобразования Лапласа и метода R-функций [9].

Для математического моделирования физико-механических полей с винтовым типом симметрии оказывается удобной формулировка задачи в соответствующих криволинейных неортогональных координатах [10–13].

Целью данной работы является построение математических моделей теплообмена при движения вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрическим каналам с центральными винтовыми вставками и исследование влияния геометрических и физических параметров на распределение температурного поля методом R-функций.

### **Постановка задачи**

Рассмотрим бесконечный круглый цилиндр с образующими, параллельными оси  $Oz$ , нормализованное уравнение которого имеет вид  $\omega_1(x, y) \equiv \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2) = 0$ ,  $\frac{\partial \omega_1}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_1} = 1$ , и центральные вставки, параллельные оси  $Oz$ , нормализованные уравнения

$\omega_2(x, y) \equiv \sqrt{f^2 \vee_0 \varphi} = 0$ ,  $\left. \frac{\partial \omega_2}{\partial n} \right|_{\alpha \Omega_2} = 1$  которых могут быть построены с помощью R-функций

[4–5], а именно,  $\omega_2 \equiv \sqrt{x^2 \vee_0 \frac{1}{2r}(-r^2 + x^2 + y^2)} = 0$  для одной вставки и  $\omega_2 \equiv \omega_{21} \wedge_0 \omega_{22} = 0$

для крестообразной вставки, где  $\omega_{21} \equiv \sqrt{\left(\frac{(x+y)}{\sqrt{2}}\right)^2 \vee_0 \frac{1}{2r}(-r^2 + x^2 + y^2)}$ ,

$\omega_{22} \equiv \sqrt{\left(\frac{(x-y)}{\sqrt{2}}\right)^2 \vee_0 \frac{1}{2r}(-r^2 + x^2 + y^2)}$ . Здесь следует отметить, что предварительные

исследования функции  $\omega_2$  показали предпочтительность применения операции отсечки

$\omega_i = \sqrt{0.25(\sqrt{f_i^4 + \varphi_i^2} - \varphi_i)^2 + f_i^2}$ , обеспечивающей нормализованность функции  $\omega_i$  в обобщенном смысле. После подстановки

$\begin{cases} x \Leftarrow x \cos \alpha z + y \sin \alpha z = \hat{x} \\ y \Leftarrow -x \sin \alpha z + y \cos \alpha z = \hat{y} \end{cases}$  в  $\omega(x, y) = \omega_1 \wedge_0 \omega_2 = 0$

получим уравнение  $\omega(x \cos \alpha z + y \sin \alpha z, -x \sin \alpha z + y \cos \alpha z) \equiv \omega(\hat{x}, \hat{y}) = 0$  бесконечного кругового цилиндра с центральными винтовыми вставками с шагом  $H = \frac{2\pi}{\alpha}$  (рис. 1). Визуализация построенных уравнений поверхностей выполнена в системе РАНОК (разработка Запорожского национального университета [14]). Легко убедиться, что уравнение

$\omega_n(x, y, z) \equiv \omega(\hat{x}, \hat{y}) \left( 1 + \alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right)^{-1/2} = 0$  является нормализованным в 3D.

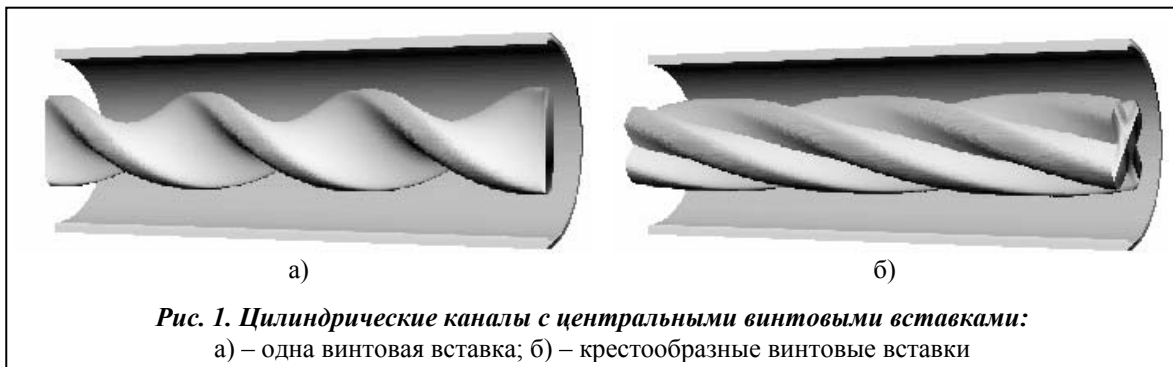
Здесь неортогональные криволинейные координаты  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  связаны с декартовыми соотношениями

$$\begin{cases} x = \hat{x} \cos \alpha z - \hat{y} \sin \alpha z, \\ y = \hat{x} \sin \alpha z + \hat{y} \cos \alpha z, \\ \hat{z} = z. \end{cases} \quad (1)$$

Ковариантные и контравариантные составляющие метрического тензора [16] имеют вид

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \hat{y} \\ 0 & 1 & \alpha \hat{x} \\ -\alpha \hat{y} & \alpha \hat{x} & \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2 + 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 \hat{y}^2 & -\alpha^2 \hat{x} \hat{y} & \alpha \hat{y} \\ -\alpha^2 \hat{x} \hat{y} & 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 & -\alpha \hat{x} \\ \alpha \hat{y} & -\alpha \hat{x} & 1 \end{bmatrix},$$

где  $G^{ik}$  – алгебраическое дополнение  $g_{ik}$  в определителе  $g = \det(g_{ik})$ ,  $g = |g_{ik}| = 1$ .



Ниже представлены отличные от нуля символы Кристоффеля первого и второго рода  $\Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32} = -\alpha$ ;  $\Gamma_{1,33} = -\alpha^2 \hat{x}$ ;  $\Gamma_{2,13} = \Gamma_{2,31} = \alpha$ ;  $\Gamma_{2,33} = -\alpha^2 \hat{y}$ ;  $\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} = \alpha^2 \hat{x}$ ;  $\Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} = \alpha^2 \hat{y}$ ;  $\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = -\alpha$ ;  $\Gamma_{33}^1 = -\alpha^2 \hat{x}$ ;  $\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \alpha$ ;  $\Gamma_{33}^2 = -\alpha^2 \hat{y}$ .

Основная система уравнений, описывающая процесс теплообмена в потоке вязкой жидкости, при постоянных физических свойствах жидкости и температуры имеет вид

$$\begin{cases} \frac{DT}{D\tau} = a\Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{D\vec{V}}{D\tau} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{V}, \\ \operatorname{div}\vec{V} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$  – субстанциальная (или полная) производная;  $\mu\Phi$  – диссипативная функция;  $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$  – коэффициент температуропроводности;  $c_p$  – теплоемкость среды;  $q_V$  – мощность внутренних источников тепла.

Инвариантная форма записи уравнений (2) позволяет, используя аппарат тензорного анализа [16], переходить в новую систему координат, в нашем случае – в криволинейную неортогональную систему (1). При этом  $\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ik} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)$ ,  $(\nabla)^k = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,

$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} V^i)$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} a^i b^k$ . Таким образом, в обобщенных координатах система (2) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial\tau} + V^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = \frac{a}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( g^{ik} \sqrt{|g|} \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu\Phi}{\rho c_p}, \\ \frac{\partial V^i}{\partial\tau} + V^k V_{;k}^i = -\frac{g^{ik}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \nu g^{km} (V^i)_{;k}, \\ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} V^i) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Вычисляя первые  $V_{;k}^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + V^j \Gamma_{jk}^i$  и вторые  $(V^i)_{;k} = \frac{\partial V_{;m}^i}{\partial x^k} + V_{;m}^j \Gamma_{jk}^i - V_{;j}^i \Gamma_{mk}^j$  ковариантные производные, подставляя физические компоненты вектора скорости, в неортогональных криволинейных координатах (1) получим систему (3) в виде

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial T}{\partial \tau} + V^1 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + V^2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \frac{V^3}{\sqrt{f}} \frac{\partial}{\partial z} = a \Delta T + \frac{q_V}{\rho c_p} + \frac{\mu \Phi}{\rho c_p}, \\
 & \frac{\partial V^1}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^1 - 2\alpha V^2 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{x} \frac{V^3}{f} = \frac{1}{\rho} \left( - (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
 & + v \left[ \Delta V^1 - 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} \right) - 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V^2}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^1 + 2 \frac{\alpha^3 \hat{y} V^3}{f^{3/2}} \right], \\
 & \frac{\partial V^2}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^2 + 2\alpha V^1 \frac{V^3}{\sqrt{f}} - \alpha^2 \hat{y} \frac{V^3}{f} = \frac{1}{\rho} \left( \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} - (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
 & + v \left[ \Delta V^2 + 2\alpha^2 \left( \hat{y} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} - \hat{x} \frac{\partial V^1}{\partial \hat{y}} \right) + 2\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^1}{\partial z} \right) - \alpha^2 V^2 - 2 \frac{\alpha^3 \hat{x} V^3}{f^{3/2}} \right], \\
 & \frac{\partial V^3}{\partial \tau} + (\vec{V} \nabla) V^3 - \frac{\alpha^2 V^3}{f} (\hat{x} V^1 + \hat{y} V^2) = \frac{\sqrt{f}}{\rho} \left( -\alpha \hat{y} \frac{\partial p}{\partial \hat{x}} + \alpha \hat{x} \frac{\partial p}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \\
 & + v \left[ \Delta V^3 - \frac{2\alpha^2}{f} \left( \hat{x} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V^3}{\partial \hat{y}} \right) - \frac{\alpha^2 (2 - \alpha^2 \hat{x}^2 - \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V^3 \right], \\
 & \frac{\partial V^1}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial V^2}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial V^3}{\partial z} = 0,
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

где  $f = 1 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2$ ,

$$\Delta = (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + 2\alpha \hat{y} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial z} - 2\alpha \hat{x} \frac{\partial^2}{\partial \hat{y} \partial z} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \right), \text{ с}$$

граничными условиями:  $V|_{\partial\Omega} = 0$  – условие прилипания;  $\left( \frac{\partial T}{\partial n} + hT \right) \Big|_{\partial\Omega} = q_c$  – закон конвективного теплообмена Ньютона–Рихмана.

В [17] для ламинарного течения в области тепловой стабилизации трехмерная система (4) сведена к двухмерной ( $V^1 = 0$ ;  $V^2 = 0$ ;  $V^3 = V^3(\hat{x}, \hat{y}) = V$ )

$$\begin{aligned}
 & (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} \right) - \\
 & - \frac{\alpha^2 (2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2} V = - \frac{1}{\mu \sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z},
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$- \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x}^2} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{y}^2} - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} - \alpha^2 \left( \hat{x} \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \right) \right] = - \frac{V}{a \sqrt{f}} C; \quad (6)$$

$$V|_{\partial\Omega} = 0; \quad \left( \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} + hT \right) \Big|_{\partial\Omega} = q_c,$$

где  $\frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big|_{\partial\Omega} = (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} - \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \left( \frac{\partial T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial T}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} \right) \Big|_{\partial\Omega}$ .

Для решения этих задач может быть применен метод Ритца в сочетании с методом R-функций [9, 12]. Положительная определенность соответствующих операторов доказана в [12, 15].

Структуры решений имеют вид  $V = \omega\Phi_1$ ,  $T = T1 + T0$ , где  $T0 = -\omega q_c$ ,  $T1 = \Phi_1 + \omega(-\hat{D}_1\Phi_1 + h\Phi_1 - \omega\Phi_2)$ ,

$$\hat{D}_1 = (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} - \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \left( \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \omega}{\partial \hat{x}} \right).$$

Функционал, эквивалентный краевой задаче (5), выглядит так:

$$I = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial V}{\partial \hat{x}} \frac{\partial V}{\partial \hat{y}} + BV^2 - 2FV \right] d\hat{x}d\hat{y},$$

где  $B = \frac{\alpha^2(2 + \alpha^2 \hat{x}^2 + \alpha^2 \hat{y}^2)}{f^2}$ ,  $F = \frac{1}{\mu\sqrt{f}} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{GP}{\sqrt{f}}$ ,  $GP = \text{const.}$ .

Функционал, эквивалентный краевой задаче (6), имеет вид

$$I = \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \left( \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \right)^2 + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \left( \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} \right)^2 - 2\alpha^2 \hat{x} \hat{y} \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} - 2GT1 \right] d\hat{x}d\hat{y} +$$

$$+ 2 \int_{\Omega} \left[ (1 + \alpha^2 \hat{y}^2) \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T0}{\partial \hat{x}} + (1 + \alpha^2 \hat{x}^2) \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} \frac{\partial T0}{\partial \hat{y}} - \alpha^2 \hat{x} \hat{y} \left( \frac{\partial T0}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T1}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial T1}{\partial \hat{x}} \frac{\partial T0}{\partial \hat{y}} \right) \right] d\hat{x}d\hat{y} +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} h(T1)^2 ds - 2 \int_{\partial\Omega} T1(q_c - hT0) ds,$$

где  $G = -\frac{V}{a\sqrt{f}} C$ .

### Результаты численного эксперимента

Численный эксперимент проводился в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, которая позволяет в рамках одной программы решать последовательность задач, при этом решение предыдущей задачи использовать в виде нагружающей функции для последующей задачи или организовывать итерационный процесс. Ниже приведен текст рабочей программы на языке RL в системе ПОЛЕ.

```

declare
  spli p1,p2;
  pol0 h,h1,t2,GP,R,r1,vst;
  modul ro,teta;
omega
  al=2*3.1415/h;
  f1=(R*R-x*x-y*y)/2/R;
  ff=(r1*r1-x*x-y*y)/2/r1;
  f2=(x+y)/sqrt(2);
  f22=sqrt(0.25*(sqrt(f2*f2*f2*f2+ff*ff)-ff)**2+f2*f2);
  f3=(x-y)/sqrt(2);
  f33=sqrt(0.25*(sqrt(f3*f3*f3*f3+ff*ff)-ff)**2+f3*f3);
  w1=f22&f33;>w1=f22;w2=f1;
  w=w1&w2-vst;
function
  om=w;
  ff1=1+al*al*x*x;ff2=1+al*al*y*y;ff3=al*al*x*y;
  ff4=ff1+ff2-1;
  ff5=al*al*(ff1+ff2)/ff4/ff4;ffp=1/sqrt(ff4);

```

```

        u11=om*p1;
function
    u=sum(1,0,u11);
function
    v=u;omm=w;fk=1+al*al*x*x+al*al*y*y;
    vx=-al*y*v/sqrt(fk);vz=v/sqrt(fk);
    vy=al*x*v/sqrt(fk);    vr=vx*vx+vy*vy;
    vr1=vx*cos(teta)+vy*sin(teta);
    vtet1=-vx*sin(teta)+vy*cos(teta);vtet=vr1*vr1+vtet1*vtet1;
function
    om1=w;ur=u;
    fn1=1+al*al*x*x;fn2=1+al*al*y*y;fn3=al*al*x*y;
    fn4=sqrt(ff1+ff2-1);
    w2x=dx(w2);w2y=dy(w2);p2x=dx(p2);p2y=dy(p2);
    dln=fn2*p2x*w2x+fn1*p2y*w2y-fn3*(p2x*w2y+p2y*w2x);
    u0=-w2*t2;
    ul2=-p2+w2*dln+h1*p2;
function
    uu=sum(2,u0,u12);
program
    filexy(pp,fw);
    inspli(s1,fa1,fb1);pro; filexy(pp,fu);filey(gp1,fu);
    filexy(pp,ffu);filey(gp1,ffu);ama;

    predi(w2);inspli(s1,fa2,fb2);konspl(s1,fa3,fb3);pro;
    predi(w);filexy(pp,fut); filey(gp1,fut);

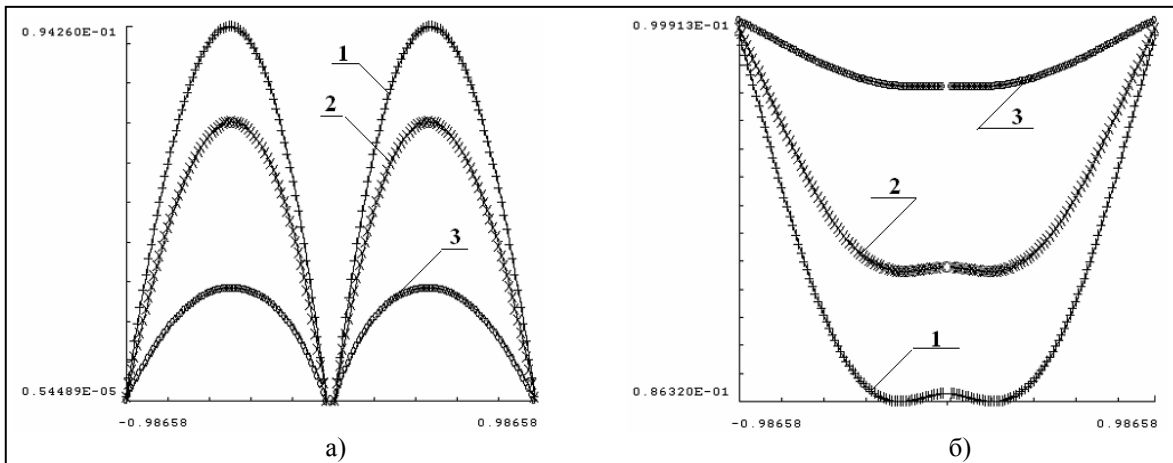
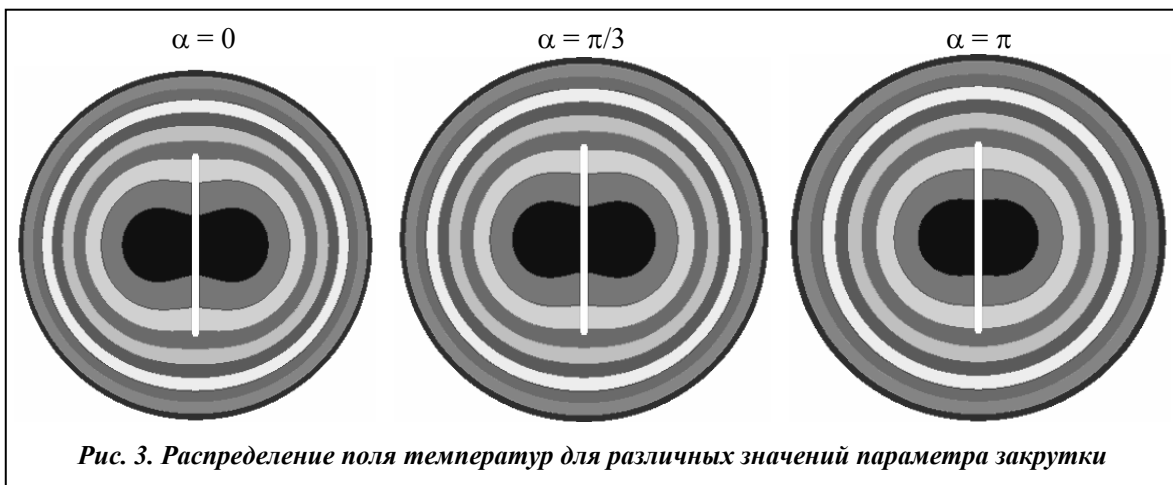
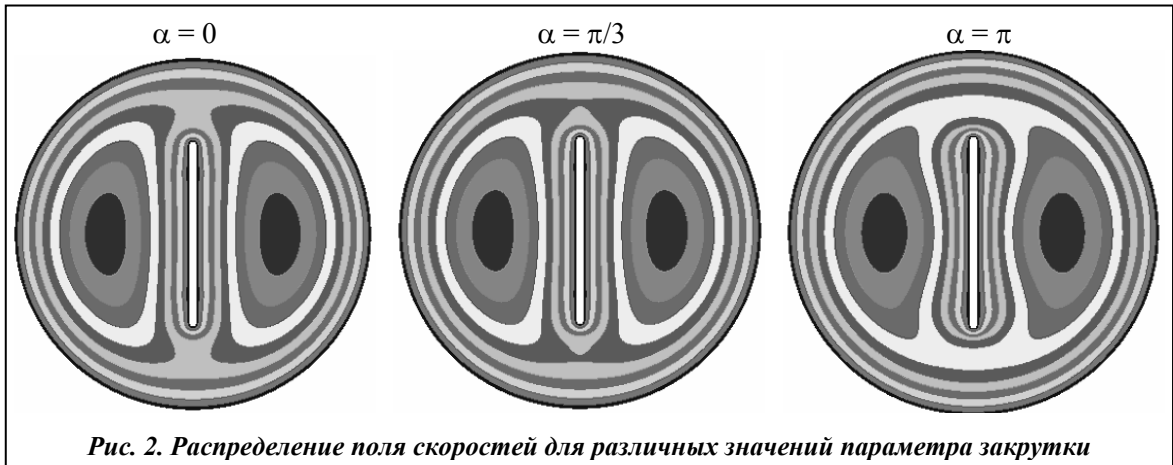
    fa1(u11)=ff2*u11(i,2)*u11(j,2)+ff1*u11(i,3)*u11(j,3)-
    ff3*(u11(i,2)*u11(j,3)+u11(j,2)*u11(i,3))+
    ff5*u11(i,1)*u11(j,1);
    fb1(u11)=ffp*u11(i,1)*GP;

    fa2(u12)=fn2*u12(i,2)*u12(j,2)+fn1*u12(i,3)*u12(j,3)-
    fn3*(u12(i,2)*u12(j,3)+u12(j,2)*u12(i,3));
    fa3(u12)=h1*u12(i,1)*u12(j,1);
    fb2(u12)=-u12(i,1)*ur(1)/fn4-fn2*u12(i,2)*u0(2)-
    fn1*u12(i,3)*u0(3)+fn3*(u12(i,2)*u0(3)+
    u12(i,3)*u0(2));
    fb3(u12)=t2*u12(i,1)-h1*u0(1);
    aa=ai(1);bb=bi(1);
    fu(u)=u;fut(uu)=uu;fw(w)=w;ffu(vtet)=vtet;
end
value
const=2,2,1, 3, 1000,1,1;
tabl=4,43,43,0,0, 4,43,43,0,0, 2,1,1,1,1, 2,2,1,1,1;

pp1=-1.01,-1.01,1.01,1.01; s1=6,pp1; p1=1,pp1;p2=2,pp1;
R=1;r1=0.5;vst=0.01;GP=(1,1.3,3);
h=(1000,6,2); pp=100,pp1; gp1=10,10,pp1,0;h1=10;t2=1;
end

```

Задание геометрической (R, r1, vst) и физической (h, h1, c, t2) информации с использованием буквенных параметров, выделенных в листинге жирным шрифтом, позволяет в рамках одной программы проводить многовариантные расчеты, исследуя влияние величин параметра закрутки, длины и ширины винтовой вставки, температуры стенки и жидкости, градиента давления и др. на картины распределения полей скорости и температуры. На рис. 2–8 представлены результаты вычислительных экспериментов.



*Рис. 4. Графики распределения полей в сечении  $y = 0$  для различных значений параметра закрутки:*

а) – поле скоростей; б) – поле температур; 1 –  $\alpha = 0$ , 2 –  $\alpha = \pi/3$ , 3 –  $\alpha = \pi$

Анализируя результаты, приведенные на рис. 2–4, можно сделать вывод, что в данном случае и поле скоростей, и поле температур существенно меняются с изменением параметра закрутки.

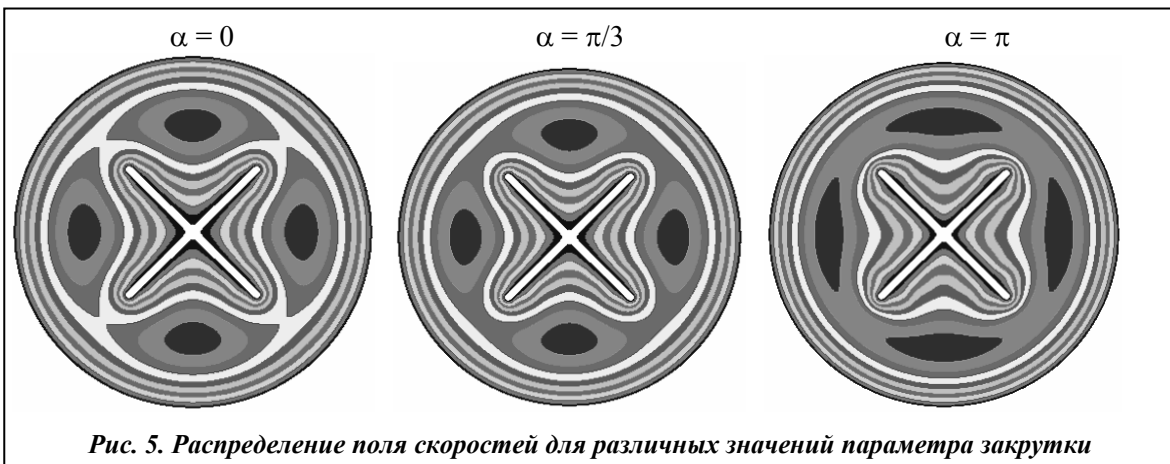


Рис. 5. Распределение поля скоростей для различных значений параметра закрутки

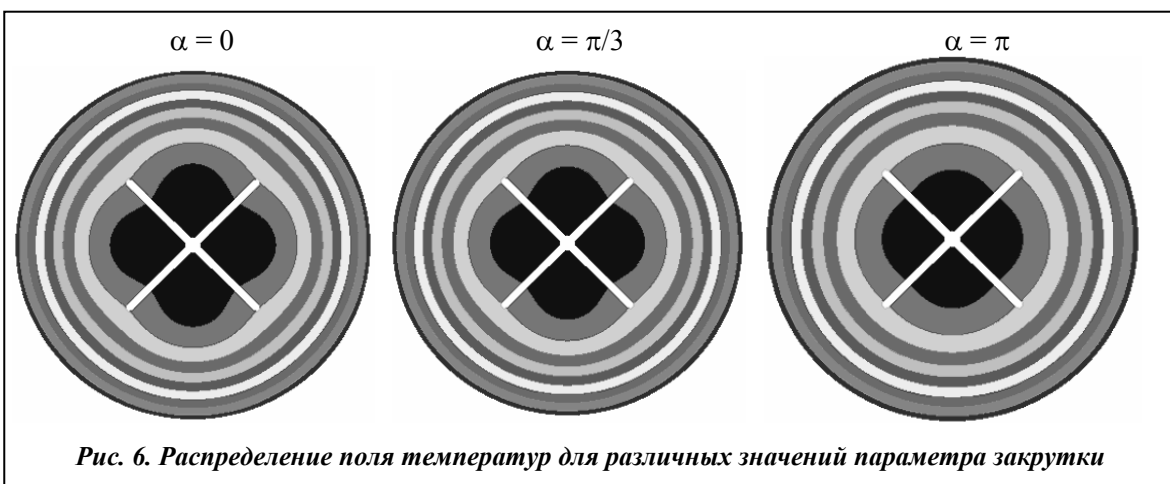


Рис. 6. Распределение поля температур для различных значений параметра закрутки

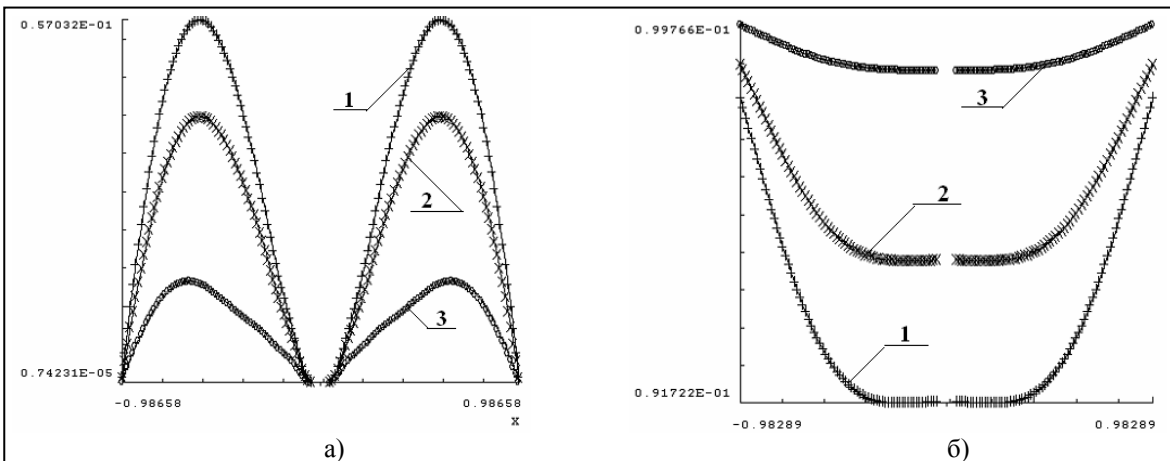
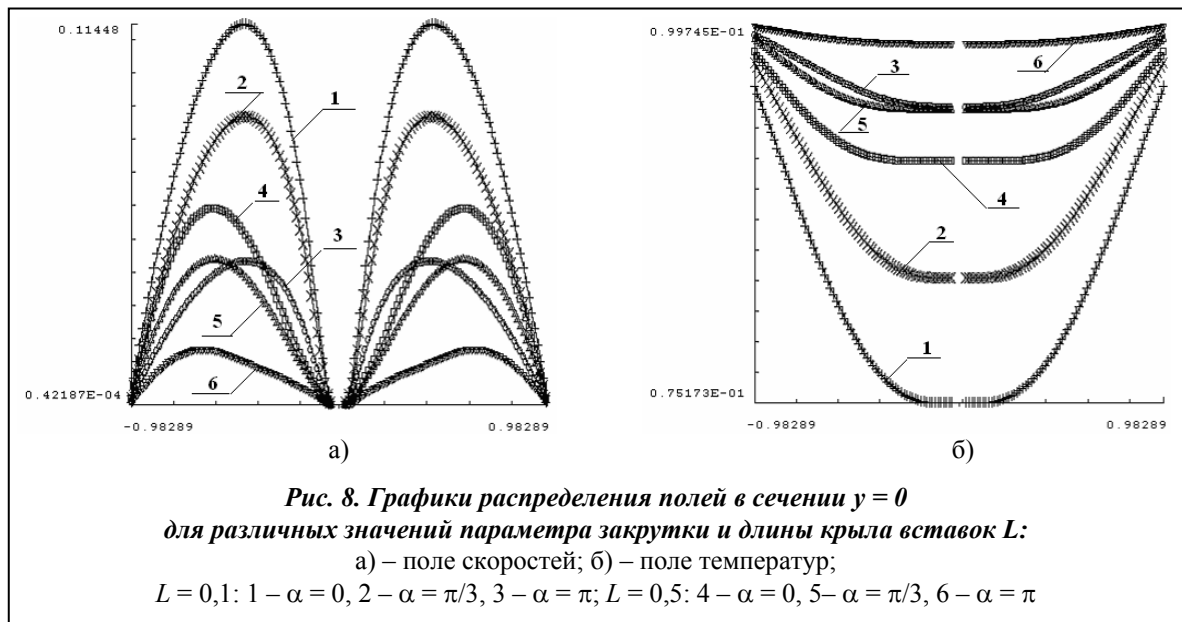


Рис. 7. Графики распределения полей в сечении  $y = 0$  для различных значений параметра закрутки:

а) – поле скоростей; б) – поле температур; 1 –  $\alpha = 0$ , 2 –  $\alpha = \pi/3$ , 3 –  $\alpha = \pi$

Анализируя результаты, приведенные на рис. 5–7, можно сделать вывод, что и в данном случае, для крестообразной винтовой вставки, поля скоростей и температур существенно меняются с изменением параметра закрутки. Однако введение крестообразной вставки уменьшило максимальное значение скорости на 39% (соответственно уменьшился и расход жидкости) и на 6% увеличилась минимальная температура.





Теперь исследуем влияние длины крыла вставок на распределение рассматриваемых полей.

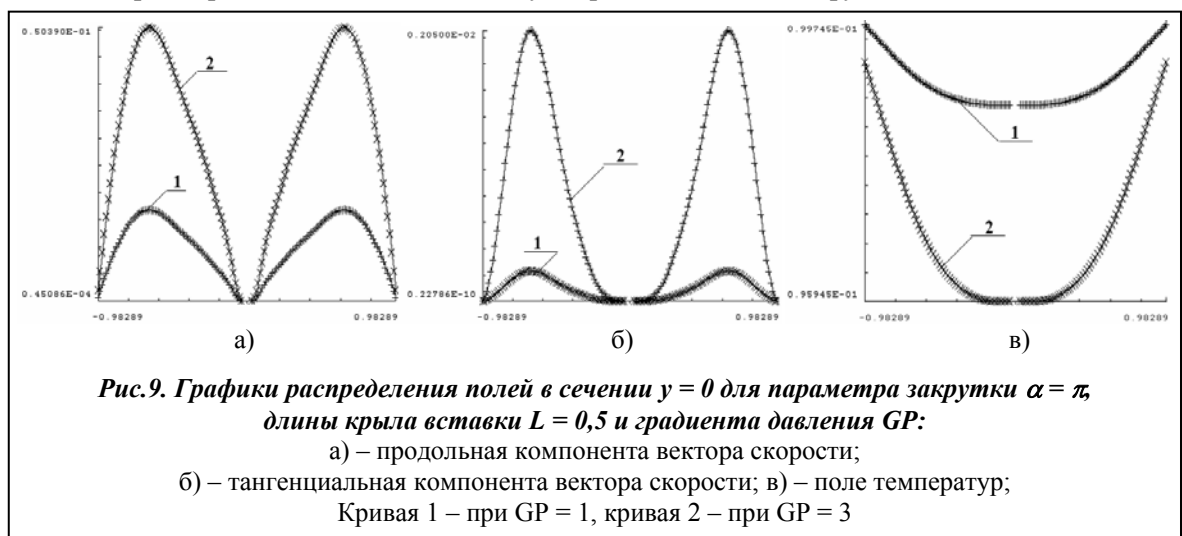
Таким образом, как и следовало ожидать, рис. 8 свидетельствует, что увеличение длины крыла винтовой вставки приводит к увеличению минимальной температуры, т. е. к улучшению прогревания. Кроме того, заметим, что длинное крыло вставки  $L=0.5$  и параметр закрутки  $\alpha = \pi/3$  дают близкие результаты со случаем, когда  $L = 0,1$  и  $\alpha = \pi$  (кривые 3 и 5).

Исследуем влияние градиента давления на продольную и тангенциальную компоненты вектора скорости и поле температур.

Анализируя результаты, представленные на рис. 9, можно сделать вывод, что увеличение градиента давления в три раза приводит к трехкратному увеличению продольной скорости, девятикратному увеличению тангенциальной компоненты вектора скорости и трехкратному снижению температуры в центральной зоне канала.

**Выводы**

Построены математические модели теплообмена при движении несжимаемой вязкой жидкости по цилиндрическим каналам с пристеночными винтовыми вставками в криволинейных неортогональных координатах. Для ламинарного течения в области тепловой стабилизации трехмерная задача сведена к двухмерной. Методом R-функций исследовано влия-



ние величины параметра закрутки, количества и длины крыла винтовых вставок, градиента давления на распределение поля скоростей и температурного поля. Система ПОЛЕ позволила в рамках одной программы решить последовательность задач определения скорости и температуры, а предоставляемая системой возможность работы с буквенными параметрами – проводить многовариантные расчеты. Данные исследования позволяют оперативно выбирать соответствующие конструктивные решения.

Результаты, представленные в этой статье, были поддержаны постановлением Президиума НАН Украины от 24.12.08 № 322 об открытии дополнительных ведомственных тем для молодых ученых НАН Украины.

### Литература

1. *Халатов А. А.* Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил: В 4-х т. Т. 3: Закрученные потоки. / А. А. Халатов, А. А. Авраменко, И. В. Шевчук. – Киев: Ин-т техн. теплофизики НАН Украины, 2000. – 474 с.
2. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах / Б. С. Петухов. – М.: Энергия, 1967. – 412 с.
3. *Петухов Б. С.* Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б. С. Петухов, Л. Г. Генин, С. А. Ковалев. – М.: Атомиздат, 1974. – 367 с.
4. *Слесаренко А. П.* R-функции и вариационные методы в моделировании конвективного теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах неканонического поперечного сечения / А. П. Слесаренко, Д. А. Котульский // Пробл. машиностроения. – 2001. – 4, № 3–4. – С. 72–78.
5. *Рвачев В. Л.* Алгоритмы решения некоторых задач теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах сложного поперечного сечения / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, В. И. Попивший // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: СО АН СССР, ВЦ ИТПМ. – 1977. – Т. 8, № 1. – С. 100–106.
6. *Рвачев В. Л.* Теплообмен в треугольных каналах при ламинарном течении жидкости / В. Л. Рвачев, В. Ф. Сенчуков, В. В. Овечкин // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 12. – С. 37–40.
7. *Рвачев В. Л.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 139 с.
8. *Рвачев В. Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
9. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые её приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
10. *Лурье А. И.* Задача Сен-Венана для естественно-скрученных стержней / А. И. Лурье, Г. Ю. Джанелидзе // Докл. АН СССР. – 1939. – Т. XXIV, № 1. – С. 23–26.
11. *Максименко-Шейко К. В.* Математические модели физических полей в змеевиках произвольного сечения / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Вестн. Запорож. ун-та. – 2002. – № 2. – С. 65–74.
12. *Максименко-Шейко К. В.* Математическое моделирование физико-механических полей с винтовым типом симметрии методом R-функций: Дис... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 2003. – 166 с.
13. *Рвачев В. Л.* Математические модели движения несжимаемой вязкой жидкости по скрученным трубам / В. Л. Рвачев, К. В. Максименко-Шейко // Мат. методы и физико-мех. поля. – 2003. – Т. 46, № 2. – С. 81–88.
14. *Рвачев В. Л.* Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций / В. Л. Рвачев, А. В. Толок, Р. А. Уваров, Т. И. Шейко // Вестн. Запорож. ун-та. – 2000. – № 2. – С. 119–131.
15. *Максименко-Шейко К. В.* Некоторые новые классы пространственных краевых задач, сводящиеся к двумерным / К. В. Максименко-Шейко // Доп. НАН України. – 2003. – № 1. – С. 25–28.
16. *Борисенко А. И.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. – Харьков: Вища шк., 1978. – 216 с.
17. *Максименко-Шейко К. В.* Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций / К. В. Максименко-Шейко // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 41–46.

Поступила в редакцию  
29.12.09