

4. Венедиктов В. Д. Атлас экспериментальных характеристик плоских решеток охлаждаемых газовых турбин / В. Д. Венедиктов, А. В. Грановский, А. М. Карелин, А. Н. Колесов, М. Х. Мухтаров М.: Центр. ин-т аэрогидромеханики, 1990. – 393 с.
5. Локай В. И. Газовые турбины двигателей летательных аппаратов / В. И. Локай, В. А. Максимова, В. А. Стрункин– М.: Машиностроение, 1979. – 447 с.
6. Аронов Б. М. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин / Б. М. Аронов, М. И. Жуковский, В. А. Журавлев. – М.: Машиностроение, 1978. – 168 с.
7. Еришов С. В. Численный метод расчета течений невязкого и вязкого газа в решетках профилей / Ин-т пробл. машиностроения АН Украины. Харьков, 1992. – 83 с. – Деп. в ВИНТИ 29.12.92, № 3696-B92.
8. Menter F. R. Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. – 1994. – 32, № 11. – P. 1299–1310.

Поступила в редакцию
01.09.09

УДК 519.63

А. В. Русанов, д-р. техн. наук
Д. Ю. Косьянов

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, E-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua)

НЕЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Разработана неявная безытерационная схема для численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа на неструктурированных сетках. Предложено оригинальное расщепление по пространственным переменным и собственным значениям. Приведены решения ряда тестовых задач.

Розроблено неявну безітераційну схему для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу на неструктурованих сітках. Запропоновано оригінальне розщеплення просторовими невідомими та власними числами. Наведено розв'язки низки тестових задач.

1. Введение

При моделировании различных физических процессов с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) гиперболического типа всё чаще применяются неструктурированные сетки [1–3]. Ускорение сходимости и повышение устойчивости [1, 4] может быть обеспечено с помощью неявных схем, однако их применение требует решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с большой несимметрической матрицей на каждом временном слое.

Среди существующих подходов обращения СЛАУ неявных операторов можно выделить прямые методы, стандартные итерационные, LU факторизации и методы подпространств Крылова (GMRES, BiCGSTAB, GMRES+LU-SGS) в сочетании с процедурой предобуславливания [5 – 8], а также методы выделения линий [9]. Большинство современных подходов опираются на итерационное обращение неявного оператора. В этом случае возникает ряд сложностей (учёт обусловленности матрицы и др.), в связи с чем актуальным становится развитие методов расщепления, широко применяемых для структурированных сеток [10].

В статье представлена безытерационная неявная схема численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа на неструк-

турированных сетках. Для построения неявного оператора предложено оригинальное расщепление по пространственным координатам и собственным значениям. В качестве явного оператора применены метод Годунова первого порядка точности [11] и метод MUSCL [12], имеющий второй порядок точности на гладких монотонных решениях и переходящий на первый в областях локальных экстремумов. Приведены решения ряда тестовых задач.

2. Основные уравнения

Система ДУЧП, записанная в дивергентной форме, имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где Q – вектор консервативных переменных; E, F, G – потоки; x, y, z – декартовы координаты в пространстве; t – координата по времени.

Система уравнений в недивергентной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \hat{A} \frac{\partial q}{\partial x} + \hat{B} \frac{\partial q}{\partial y} + \hat{C} \frac{\partial q}{\partial z} &= 0, \\ dq &= TdQ, \quad \hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TBT^{-1}, \quad \hat{C} = TCT^{-1}, \\ A &= \partial E / \partial Q, \quad B = \partial F / \partial Q, \quad C = \partial G / \partial Q, \end{aligned}$$

где q – вектор примитивных переменных; T – матрица перехода от примитивных к консервативным переменным.

3. Пространственно-временная дискретизация основных уравнений. Численная схема

В наиболее общем случае физическая область отображается на расчётную с помощью неструктурированной сетки, ячейками (элементами) которой в плоском случае являются выпуклые многоугольники (треугольники, четырёхугольники и т. д.), а в пространственном случае – выпуклые многогранники (пирамиды, параллелепипеды и т. д.). Система уравнений (1) решается маршевыми методами по времени, для чего на временной оси задаётся равномерная сетка узлов вида $t_n = \tau \cdot n$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь τ – шаг временной сетки.

Система уравнений (1), проинтегрированная по ячейке (контрольному объёму), имеет вид

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} + \frac{1}{|V_0|} \iint_S (E \cdot n_x + F \cdot n_y + G \cdot n_z) ds = 0, \quad (2)$$

где $Q_0 = \frac{1}{|V_0|} \iiint_V Q dx dy dz$ – осреднение вектора переменных Q по ячейке V , $|V_0|$ – объём ячейки V ; S – поверхность, ограничивающая ячейку. Ориентация поверхности S задаётся единичным вектором внешней нормали $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)^t$.

Линеаризация потоков выполнена следующим образом:

$$P_i = \beta \cdot P^{n+1} + (1 - \beta) \cdot P^n = P^n + \beta \cdot M^n \delta Q^{n+1}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad \beta \in [0, 1],$$

где $P = [R, F, G]$, $M = [A, B, C]$, $\delta Q^n = Q^n - Q^{n-1}$. Введенные сокращения означают, что линеаризация для потока E получается в случае $P = E$ и $M = A$, для потока F при $P = F$ и $M = B$, а для потока G , если $P = G$ и $M = C$. Верхним индексом обозначается временной слой.

Аппроксимация производной по времени от вектора консервативных переменных определяется выражением

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} \approx \frac{(1 + \gamma) \delta Q_0^{n+1} - \gamma \delta Q_0^n}{\tau}.$$

Используемые выше β, γ являются коэффициентами схемы.

Система уравнений (2) после линеаризации потоков и замены производной по времени на соответствующее аппроксимирующее выражение имеет вид

$$\delta Q_0^{n+1} + \frac{\beta \cdot \tau}{(1 + \gamma)V_0} \sum_{k=1}^{N_0} [A_k^n \delta Q_k^{n+1}(n_x S)_k + B_k^n \delta Q_k^{n+1}(n_y S)_k + C_k^n \delta Q_k^{n+1}(n_z S)_k] = R_0^{(n)},$$

$$R_0^{(n)} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \delta Q_0^n - \frac{\tau}{(1 + \gamma)V_0} \sum_{k=1}^{N_0} [E_k^n (n_x S)_k + F_k^n (n_y S)_k + G_k^n (n_z S)_k],$$
(3)

где N_0 – число граней ячейки; S_k – площадь k -й грани ячейки; E_k^n , F_k^n , G_k^n – значения потоков в центре масс k -й грани; $M_k^n \delta Q_k^{n+1}$ – значение линеаризованного потока в центре масс k -й грани.

Разностная аппроксимация исходных уравнений в форме (3) в общем случае соответствует неявной трёхслойной схеме. Правая часть $R_0^{(n)}$ определяет явный оператор, а левая – неявный. При $\gamma = 0$ схема является двухслойной по времени, а при $\beta = 0$ – явной схемой. В статье применяется трёхслойная полностью неявная схема с коэффициентами $\gamma = 1/2$ и $\beta = 1$.

Явный оператор. В работе для определения явного оператора использовались схемы Годунова [11] и MUSCL [12]. Явная схема Годунова имеет первый порядок аппроксимации по пространству (кусочно-постоянное распределение переменных внутри ячейки). Применяемая схема MUSCL имеет второй порядок аппроксимации по пространству на гладких монотонных решениях и первый порядок в местах локальных экстремумов (кусочно-линейное распределение переменных в ячейке).

Неявный оператор. Значение линеаризованного потока в центре масс грани текущей ячейки вычисляется следующим образом:

$$M_k^n \delta Q_k^{n+1} = (L_\psi^{-1} \Lambda_\psi (I - \delta_{\Lambda_\psi}) L_\psi)_0^n \delta Q_0^{n+1} + (L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \delta_{\Lambda_\psi} L_\psi)_{0k}^n \delta Q_{0k}^{n+1},$$

$$\delta_{\Lambda_\psi} = \text{diag}(\delta_{\Lambda_\psi^{(1)}}, \dots, \delta_{\Lambda_\psi^{(m)}}), \quad \Lambda_\psi = \text{diag}(\Lambda_\psi^{(1)}, \dots, \Lambda_\psi^{(m)}), \quad I = \text{diag}(1, \dots, 1),$$

$$M = [A, B, C], \quad \psi = [x, y, z],$$

где L_ψ , L_ψ^{-1} , Λ_ψ – матрицы, полученные при диагонализации матрицы M ; ψ – декартова координата, соответствующая определённому M ($\psi = x$ для $M = A$, $\psi = y$ для $M = B$ и $\psi = z$ для $M = C$); δQ_{0k}^n – значение приращений вектора консервативных переменных в центре масс ячейки, смежной к текущему контрольному объёму по k -й грани; m – число уравнений системы (1); $\delta_{\Lambda_\psi^{(r)}}$ – переключатель, обеспечивающий выполнение условия “разности против потока”. Значение $\delta_{\Lambda_\psi^{(r)}}$ определяется выражением

$$\delta_{\Lambda_\psi^{(r)}} = \begin{cases} 0, & (n_\psi \Lambda_\psi^{(r)})_k^n \geq 0, \\ 1, & (n_\psi \Lambda_\psi^{(r)})_k^n < 0, \quad r = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Для упрощения дальнейших записей будем использовать

$$\delta^{\Lambda_\psi} = I - \delta_{\Lambda_\psi} = \text{diag}(1 - \delta_{\Lambda_\psi^{(1)}}, \dots, 1 - \delta_{\Lambda_\psi^{(m)}}).$$

Введём пространственные переключатели для каждого декартова направления ψ

$$\delta_{\psi,k}^+ = \begin{cases} 1, & \psi_{0k} - \psi_0 > 0, \\ 0, & \psi_{0k} - \psi_0 \leq 0, \end{cases}$$

$$\delta_{\psi,k}^- = 1 - \delta_{\psi,k}^+, \quad \psi = [x, y, z],$$

где ψ_{0k}, ψ_0 – значения координат центров масс двух контрольных объёмов, смежных по k -му ребру рассматриваемого направления. С учётом введенных обозначений значение линейризованного потока определяется выражением

$$M_k^n \delta Q_k^{n+1} = \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \delta^{\Lambda_\psi} \delta_{\psi,k}^+ L_\psi \right)_0^n \delta Q_0^{n+1} + \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \delta^{\Lambda_\psi} \delta_{\psi,k}^- L_\psi \right)_0^n \delta Q_0^{n+1} + \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \delta_{\Lambda_\psi} \delta_{\psi,k}^+ L_\psi \right)_{0k}^n \delta Q_{0k}^{n+1} + \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \delta_{\Lambda_\psi} \delta_{\psi,k}^- L_\psi \right)_{0k}^n \delta Q_{0k}^{n+1}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N_0} M_k^n \delta Q_k^{n+1} (n_\psi S)_k = \left(K_{\psi,0}^+ + K_{\psi,0}^- + K_{\psi,0}^{+,-} + K_{\psi,0}^{-,-} \right) \delta Q^{n+1},$$

где

$$K_{\psi,0}^+ \delta Q^{n+1} = \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \right)_0^n \left(\sum_{k=1}^{N_0} (n_\psi S)_k \delta_{\psi,k}^+ \delta^{\Lambda_\psi} \right) \left(L_\psi \right)_0^n \delta Q_0^{n+1};$$

$$K_{\psi,0}^- \delta Q^{n+1} = \sum_{k=1}^{N_0} (n_\psi S)_k \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \right)_{0k}^n \delta_{\psi,k}^- \delta_{\Lambda_\psi} \left(L_\psi \right)_{0k}^n \delta Q_{0k}^{n+1};$$

$$K_{\psi,0}^{+,-} \delta Q^{n+1} = \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \right)_0^n \left(\sum_{k=1}^{N_0} (n_\psi S)_k \delta_{\psi,k}^- \delta^{\Lambda_\psi} \right) \left(L_\psi \right)_0^n \delta Q_0^{n+1};$$

$$K_{\psi,0}^{-,-} \delta Q^{n+1} = \sum_{k=1}^{N_0} (n_\psi S)_k \left(L_\psi^{-1} \Lambda_\psi \right)_{0k}^n \delta_{\psi,k}^+ \delta_{\Lambda_\psi} \left(L_\psi \right)_{0k}^n \delta Q_{0k}^{n+1}.$$

С учётом выполненных преобразований уравнение (3) записывается следующим образом:

$$\left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \sum_{\psi=[x,y,z]} \left(K_{\psi,0}^+ + K_{\psi,0}^- + K_{\psi,0}^{+,-} + K_{\psi,0}^{-,-} \right) \right\} \delta Q^{n+1} = R_0^{(n)}. \quad (4)$$

После факторизации по пространственным переменным и по направлениям, (4) примет вид

$$\prod_{\psi=[x,y,z]} \prod_{i=+,-} \left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{\psi,0}^i + K_{\psi,0}^{i,-} \right) \right\} \delta Q^{n+1} = R_0^{(n)} \quad (5)$$

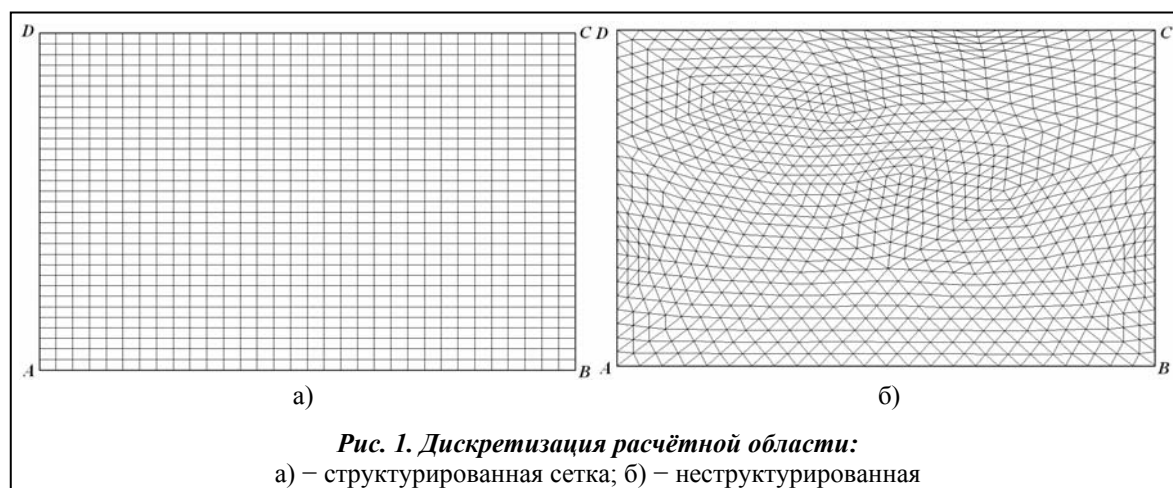
Последовательность шагов интегрирования уравнения (5) следующая:

$$\left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{x,0}^+ + K_{x,0}^{+,-} \right) \right\} \delta Q^{n+\frac{1}{6}} = R_0^{(n)}; \quad \left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{x,0}^- + K_{x,0}^{-,-} \right) \right\} \delta Q^{n+\frac{2}{6}} = \delta Q^{n+\frac{1}{6}};$$

$$\left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{y,0}^+ + K_{y,0}^{+,-} \right) \right\} \delta Q^{n+\frac{3}{6}} = \delta Q^{n+\frac{2}{6}}; \quad \left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{y,0}^- + K_{y,0}^{-,-} \right) \right\} \delta Q^{n+\frac{4}{6}} = \delta Q^{n+\frac{3}{6}};$$

$$\left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{z,0}^+ + K_{z,0}^{+,-} \right) \right\} \delta Q^{n+\frac{5}{6}} = \delta Q^{n+\frac{4}{6}}; \quad \left\{ I + \frac{\tau \cdot \beta}{(1 + \gamma) |V_0|} \left(K_{z,0}^- + K_{z,0}^{-,-} \right) \right\} \delta Q^{n+1} = \delta Q^{n+\frac{5}{6}}.$$

На каждом шаге обращается двухдиагональная матрица. Операторы $I, K_{\psi,0}^+, K_{\psi,0}^-$ содержат элементы главной диагонали, а $K_{\psi,0}^{+,-}, K_{\psi,0}^{-,-}$ – элементы над- (под-) диагонали. Для реализации процедур прогонки вперёд / назад все ячейки области отсортированы по каждому декартову направлению ψ .



4. Численные результаты

Тестирование схемы выполнялось на модельной двухмерной (по пространству) задаче для линейного уравнения переноса $u_t + u_x + u_y = H$, $(x, y) \in \Omega$, где Ω – расчётная область, $u = u(t, x, y)$ – искомое решение задачи. Начальные условия определяются выражением $u(0, x, y) = \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Расчётная область $\Omega = \{(x, y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ и разностная сетка представлены на рис. 1. На участках границы AD и AB расчётной области заданы граничные условия в виде значений точного решения задачи.

Рассмотрены два варианта задачи с H , для которых существует стационарное решение

- Test1. $H(x, y) = 2\pi\cos(\pi(x + y))$, $u(t, x, y) = \sin(\pi(x + y))$;
- Test2. $H(x, y) = \pi\sin(\pi(x + y))$, $u(t, x, y) = \sin(\pi \cdot x) \cdot \sin(\pi \cdot y)$.

Расчёты выполнены для пяти размерностей (уровней) сетки. При увеличении номера уровня сетки число ячеек сетки увеличивается в 4 раза, а диаметр сетки уменьшается в 2 раза. Параметры сеток для первого уровня приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры сеток первого уровня

Тип сетки	Число ячеек	Диаметр сетки
Структурированная (SG)	256	0,0625
Неструктурированная (UG)	448	0,1148

Скорость сходимости численного решения к точному при переходе с уровня на уровень (уменьшении диаметра сетки) оценивалась по трём стандартным сеточным нормам L_1 , L_2 и C_{\max}

$$k_i^{i+1} = \frac{\ln(N_i/N_{i+1})}{\ln(2)},$$

где N_i – значение сеточной нормы на i -м уровне сетки.

Расчёты по явной схеме Годунова выполнены с числом Куранта $\nu = 0,5$, а по явной схеме MUSCL – при $\nu = 0,25$. Для неявной схемы выбрано число Куранта $\nu = 10,0$. Итерации по времени проводились до получения стационарного решения.

Результаты решения тестовых задач приведены в табл. 2–5 и на рис. 2–3. В таблицах верхние значения порядка сходимости соответствуют результатам, полученным по явным схемам, а нижние – по неявным. На рис. 2 и 3 сплошной линией показаны расчёты на структурированной сетке, а пунктирной – на неструктурированной, треугольником – результаты, полученные по явной и неявной схемам Годунова, крестиком – по явной схеме MUSCL, а точкой – по неявной схеме MUSCL.

Таблица 2. Оценка порядка сходимости для Test 1 (SG)

№ слоя (предыдущий – следующий)	Явный оператор Годунова			Явный оператор MUSCL		
	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$
1–2	1,005	1,008	1,015	2,332	2,204	0,969
	1,005	1,008	1,015	2,389	2,240	0,953
2–3	1,002	1,004	1,009	2,272	2,177	1,033
	1,002	1,004	1,009	2,320	2,247	1,033
3–4	1,002	1,002	1,005	2,136	2,104	0,994
	1,002	1,002	1,005	2,089	2,126	0,939
4–5	1,000	1,000	1,003	2,067	2,056	0,998
	1,000	1,000	1,003	2,070	1,967	0,998

Таблица 3. Оценка порядка сходимости для Test 1 (UG)

№ слоя (предыдущий – следующий)	Явный оператор Годунова			Явный оператор MUSCL		
	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$
1–2	0,994	0,992	1,005	2,161	1,677	0,802
	0,994	0,992	1,005	2,171	1,769	1,154
2–3	0,993	0,990	0,979	2,034	1,603	1,037
	0,993	0,990	0,979	2,071	1,633	0,779
3–4	0,994	0,991	0,979	2,082	1,590	0,995
	0,994	0,991	0,979	2,015	1,450	0,908
4–5	0,995	0,993	0,974	1,987	1,472	0,999
	0,995	0,993	0,974	2,018	1,523	0,992

Таблица 4. Оценка порядка сходимости для Test 2 (SG)

№ слоя (предыдущий – следующий)	Явный оператор Годунова			Явный оператор MUSCL		
	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$
1–2	0,700	0,671	0,572	2,544	2,253	1,873
	0,700	0,671	0,572	2,544	2,253	1,873
2–3	0,806	0,783	0,705	2,403	2,416	1,637
	0,806	0,783	0,705	2,403	2,416	1,637
3–4	0,888	0,869	0,809	2,250	2,298	1,851
	0,888	0,869	0,809	2,250	2,298	1,851
4–5	0,939	0,926	0,881	2,141	2,185	1,934
	0,939	0,926	0,881	2,141	2,185	1,934

Таблица 5. Оценка порядка сходимости для Test 2 (UG)

№ слоя (предыдущий – следующий)	Явный оператор Годунова			Явный оператор MUSCL		
	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$	K_{L_1}	K_{L_2}	$K_{C_{max}}$
1–2	0,849	0,831	0,735	2,214	1,935	1,017
	0,849	0,831	0,735	2,242	2,027	1,064
2–3	0,906	0,892	0,832	2,098	1,796	1,172
	0,906	0,892	0,832	2,090	1,737	0,894
3–4	0,945	0,937	0,894	2,005	1,560	0,955
	0,945	0,937	0,894	2,015	1,581	0,955
4–5	0,970	0,964	0,923	1,980	1,524	0,945
	0,970	0,964	0,923	1,987	1,551	0,945

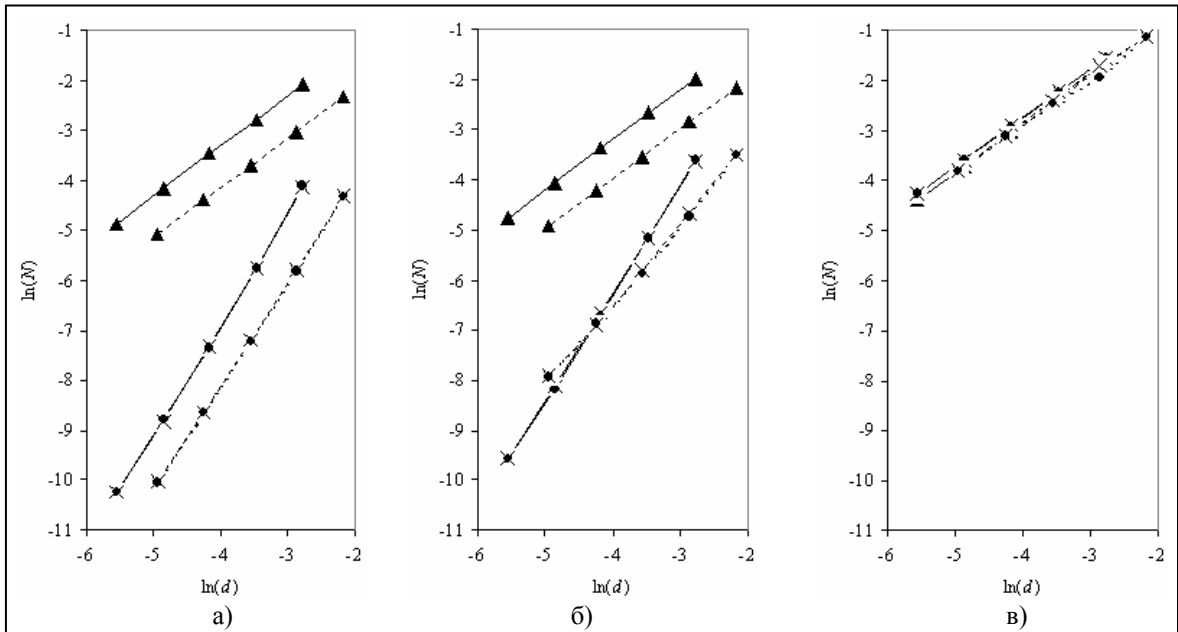


Рис. 2. Графики сходимости для Test 1:

а) – в норме L_1 ; б) – в норме L_2 ; в) – в норме C_{\max}

—▲— — явная и неявная схемы Годунова (SG);

—×— — явная схема MUSCL (SG); —●— — неявная схема MUSCL (SG);

---▲--- — явная и неявная схемы Годунова (UG);

---×--- — явная схема MUSCL (UG); ---●--- — неявная схема MUSCL (UG)

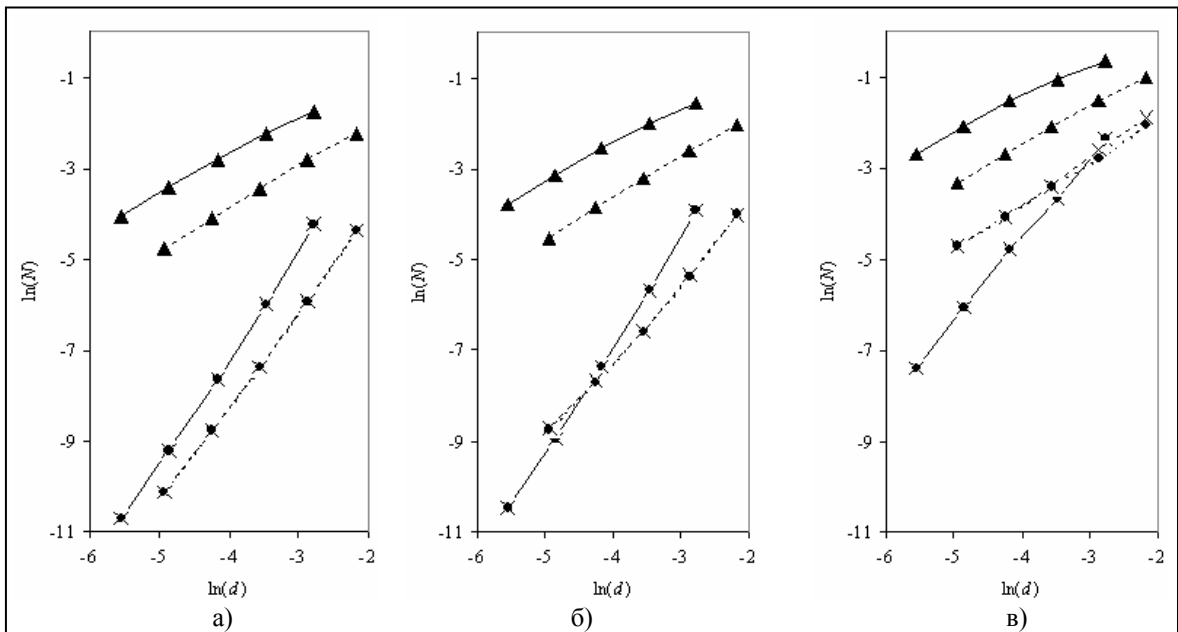


Рис. 3. Графики сходимости для Test 2:

а) – в норме L_1 ; б) – в норме L_2 ; в) – в норме C_{\max}

—▲— — явная и неявная схемы Годунова (SG);

—×— — явная схема MUSCL (SG); —●— — неявная схема MUSCL (SG);

---▲--- — явная и неявная схемы Годунова (UG);

---×--- — явная схема MUSCL (UG); ---●--- — неявная схема MUSCL (UG)

Из полученных результатов видно, что применение предложенного неявного оператора не ухудшает точности явного оператора на стационарном решении. Понижение численного порядка для MUSCL схем, по-видимому, объясняется наличием зон локальных экстремумов точного решения.

5. Выводы

Предложен безытерационный неявный оператор для численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа на неструктурированных сетках, построенный на основе оригинального способа расщепления по пространственным координатам и собственным значениям. Основным преимуществом такого оператора по сравнению с существующими безытерационными неявными схемами расщепления является то, что он применим к сеткам, для которых невозможно выполнить структуризацию по локальным сеточным направлениям. Кроме того, предложенный оператор записывается не в конечно-разностной, а в конечно-объемной форме, что обеспечивает его консервативность.

Выполнены тестовые расчёты двумерных модельных задач по схемам с явными операторами Годунова первого порядка аппроксимации и MUSCL второго порядка на гладких монотонных решениях. Полученные результаты показывают, что предложенный неявный оператор увеличивает скорость сходимости и устойчивость схемы, а также обеспечивает порядок точности стационарного решения, близкий к порядку точности явного оператора.

Литература

1. Venkatakrishnan V. A perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA. Aerospace Sci. Meeting. – 1996. – 34, № 33. – P. 533–547.
2. Елизарова Т. Г. Аппроксимация уравнений квазигазодинамики на треугольных сетках / Т. Г. Елизарова, В. В. Серёгин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 2005. – № 4. – С. 15–18.
3. Фирсов Д. К. Метод контрольного объёма на неструктурированной сетке в вычислительной механике: [Учеб. пособие]. – Томск. ун-т. – 2007. – 72 с.
4. Venkatakrishnan V. Implicit schemes and parallel computing in unstructured grid CFD. – ICASE Report – 1995. – № 28. – P. 1–63.
5. Sharov D. Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers / D. Sharov, H. Luo, J. D. Baum, R. Löhner // AIAA Paper. – 2000. – № 0927. – P. 1–17.
6. Kim J. S. Implicit efficient implementation of implicit operator for block LU-SGS method / J. S. Kim, O. J. Kwon // Comp. Fluid Dynamics J. – 2005. – № 20. – P. 154–159.
7. Bramkamp F. D. Matrix-free second-order methods in implicit time integration for compressible flows using automatic differentiation / F. D. Bramkamp, B. Pollul, A. Rasch, G. Schieffer // Preprint of the Institute for Scientific Computing RWTH-CS-SC-08-08, RWTH Aachen University, Aachen, 2008. – 24 p.
8. Fernandez G. Implicit conservative upwind scheme for strongly transient flows // INRIA, France, 2004. – P. 1–18.
9. Hassan O. An implicit finite element method for high speed flows / O. Hassan, K. Morgan, J. Peraire // AIAA Paper. – 1990. – № 0402. – P. 1–11.
10. Русанов А. В. Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / А. В. Русанов, С. В. Ершов. – Харьков: Ин-т пробл. машиностроения. НАН Украины, 2008. – 275 с.
11. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
12. Barth T. J. The design and application of upwind scheme on unstructured meshes // T. J. Barth, D. C. Jespersen // AIAA Paper. – 1989. – № 0366. – P. 1–13.

Поступила в редакцию
10.03.10