



РЯБЕНКО О.А., докт. техн. наук, професор, зав. кафедри гідроенергетики та гідравлічних машин,
КЛЮХА О.О., канд. техн. наук, доц.,
ГАЛИЧ О.О., асистент,
ПОПЛАВСЬКИЙ Д.М., аспірант,
 Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне.

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗАТУХАЮЧИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПРИ ПОБУДОВІ ПРОФІЛЮ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ КНОЇДАЛЬНИХ ХВИЛЬ

доповідь на VII Міжнародній конференції гідроенергетиків

«Сталий розвиток гідроенергетики, як основа мобільності та маневреності ОЕС України»

В роботі представлено алгоритм розрахунку профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль з врахуванням затухання хвиль по довжині..

К л ю ч о в і с л о в а: кноїдальні хвилі, лабораторні дослідження, математична модель, вільна поверхня.

Дослідженнями різних вчених було виявлено, що в ряді випадків можливе існування кноїдальних хвиль [1, 2]. Для описання цього явища необхідно застосовувати спеціальні методи [3]. При цьому область існування кноїдальних хвиль виходить за межі критичної точки з критичним станом, частково охоплюючи спокійні і бурхливі потоки.

Наявність кноїдальних хвиль під час роботи гідротехнічних споруд вимагає врахування їх особливостей при проектуванні та експлуатації цих споруд. Особливості кноїдальних хвиль у конкретних умовах реальних водогосподарських об'єктів за певних обставин викликають ряд позитивних і негативних наслідків [4]. Спроби уникнути утворення наведеного явища при роботі ГТС не завжди виявляються вдалим, вимагають суттєвих додаткових коштів, а іноді уникнути формування цих режимів взагалі неможливо. В таких випадках для забезпечення надійного комплексу розв'язку технічних проблем доводиться використовувати гідравлічне і математичне моделювання режимів роботи споруд.

Під час такого моделювання основною проблемою постає побудова профілю вільної поверхні. Для «класичного» опису профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль використовується частковий розв'язок рівняння Кортевега—де Фріса [5], що записується за допомогою еліптичної функції Якобі амплітуди косинуса $\text{cn } z$ [3]. Дані розв'язки мають ряд недоліків, головним з яких є, неврахування затухання хвиль по довжині розглядуваного явища. Врахування даного недоліку потребує дуже складних математичних розрахунків [6]. В даній роботі наведений простий математичний алгоритм, що дозволяє враху-

вати затухання хвиль по довжині при побудові профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль.

Теоретичний опис затухаючих вимушених коливань.

На відміну від гармонічних коливань, затухаючі коливання обумовлені дією сили опору руху, а затухаючі коливання спричиняються зовнішнім джерелом коливань. Тобто, у реальних системах із тертям (опором руху) з часом обов'язково відбувається втрата енергії її коливань. Оскільки амплітуда коливань пропорційна квадратному кореню з їх енергії, реальні коливання в дійсності відбуваються із все меншою амплітудою (Рис.1).

Диференціальне рівняння затухаючих вимушених коливань має вигляд [7]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0, \quad (1)$$

де: y — відхилення від нульового рівноважного положення; t — час; b — амплітуда відхилень; m — маса; k — величина протилежна вектору швидкості.

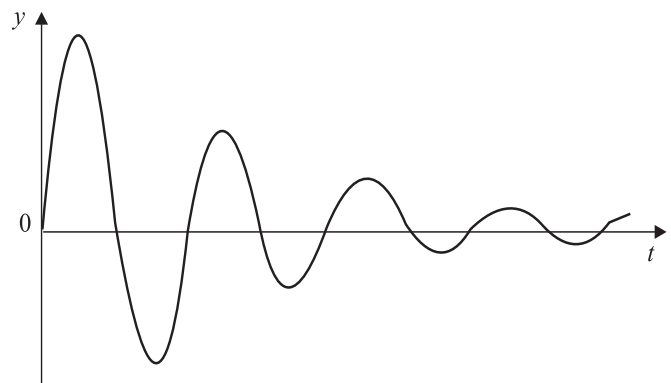


Рис. 1. Затухаючі вимушені коливання в часі

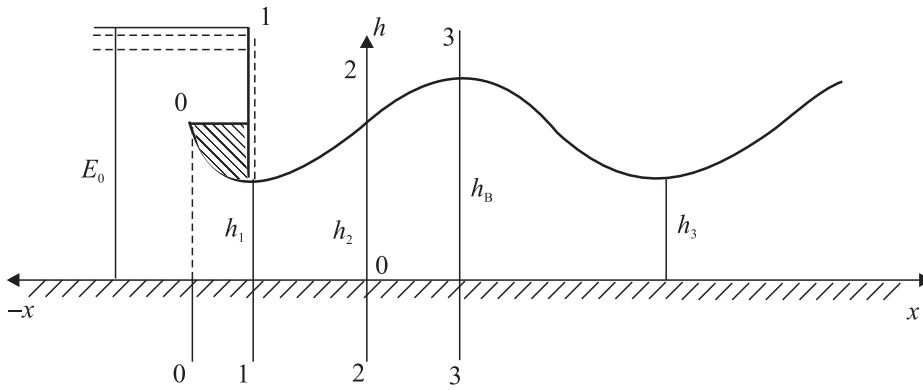


Рис. 2. Розрахункова схема математичного алгоритму

Розв'язок диференціального рівняння (1) записується у наступному вигляді:

$$y = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

де: $A_0 e^{-\beta t}$ – експоненційно убутна амплітуда коливань; A_0 – стала, що має сенс початкової амплітуди коливань при $t = 0$; $\beta = b/(2m)$ – параметр, що характеризує затухання коливань; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота затухаючих коливань, відмінна від частоти ω_0 відповідних вільних коливань; φ_0 – деяке зрушення фази.

Звідси випливає, що затухаючі коливання цілком не відповідають визначенню періодичних коливань, яке полягає в їх строгому повторенні через визначений проміжок часу, що називається періодом. Проте при незначному зменшенні амплітуди затухаючих коливань їх доцільно розглядати як умовно періодичні і ввести їх період $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, який завжди перевершує період $T = 2\pi / \omega_0$ вільних коливань. Зокрема, у разі, коли $\beta \rightarrow 0$, період $T \rightarrow \infty$, тобто коливальний процес при цьому переходить в аперіодичний, що проявляється в експоненційному поверненні збудженої системи до стану рівноваги без переходу через нього.

Математична модель розрахунку профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль.

Головна ідея запропонованої математичної моделі полягає у вираженні характеристик кноїдальних хвиль через параметри потоку в їх початковому перерізі 1–1, в якому потік може бути або ввігнутим ($d^2h/dx^2 > 0$), або паралельнострумним ($d^2h/dx^2 = 0$). Але при цьому, розглядаючи дане явище, як систему затухаючих вимушених коливань, за початок відрахунку будемо приймати переріз 2–2, що відповідає другій спряженій глибині h_2 (Рис. 2). Також при проведенні серії попередніх лабораторних досліджень, та згідно з [8], було встановлено, що у перерізах

проведених через екстремальні точки з максимальною глибиною розподіл тиску по глибині виявляється близьким до параболічного закону. Цю особливість необхідно враховувати при побудові профілю вільної поверхні.

Провівши ряд спрощень і наближень, згідно наведених особливостей кноїдальних хвиль, розв'язок диференціального рівняння затухаючих вимушених коливань (2) набере вигляд:

де: h_2 – глибина другої спряженої глибини; h_B – глибина під вершиною першої хвилі; x – біжуча абсциса; z – степінь затухання коливань.

$$h = h_2 + [(h_B - h_2) e^{zx} \sin(\omega x + \omega_0 x)], \quad (3)$$

Другу спряжену глибину знайдемо за залежністю:

$$h_2 = \frac{1}{3} h_1 \left[2\beta_1 + Fr_1 + \sqrt{(2\beta_1 + 2Fr_1)^2 - 3(2\beta_1 - 1 + 2Fr_1)} \right] \quad (4)$$

де: h_1, Fr_1 – глибина потоку та число Фруда в початковому перерізі відповідно; β_1 – коефіцієнт кінетичної енергії в початковому перерізі, що має зв'язок з коефіцієнтом негідростатичності s_1 :

$$\beta_1 = (1 + s_1)/3. \quad (5)$$

Глибину під вершиною першої хвилі розраховуємо за формулою:

$$h_B = k_{III} \frac{h_1}{2} \left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 + \sqrt{\left(\frac{4s_1 - 1}{3} + Fr_1 \right)^2 - 4Fr_1} \right) \quad (6)$$

де: k_{III} – коефіцієнт нерівномірного розподілу глибини по ширині досліджуваного потоку, $k_{III} = 1,05$.

Згідно проведеного аналітичного аналізу експериментальних досліджень приймаємо степінь затухання:

$$z = \lambda / (2Fr_1), \quad (7)$$

де: λ – довжина першої хвилі, яку знайдемо за наближеною формулою Турсунова [9]:

$$\lambda = 3,3 \cdot h_2, \quad (8)$$

Циклічну частоту ω знайдемо відповідно за залежністю:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{\lambda}{2Fr_1} \right)^2}. \quad (9)$$



Експериментальна установка та методика вимірювань.

З метою досконального вивчення кноїдальних хвиль в Національному університеті водного господарства та природокористування були поставлені спеціальні експерименти. Досліди проводились стосовно умов плоскої задачі у великому дзеркальному лотку з прямокутною формою поперечного перерізу. Досліджуване явище утворювалося за схемою витікання води з-під затвора з обтікачем, що встановлювався в 2 місяці.

Для вимірювання осередненого тиску на дно по осі лотка було встановлено дві групи п'езометрів загальною кількістю 89 штук. Схема лабораторної установки показана в роботі [10]. Основні характеристики цих дослідів наведені в Табл. 1.

Необхідно підкреслити, що вільна поверхня кноїдальних хвиль, положення якої визначається умовами досить нестійкої динамічної рівноваги, в проведених дослідях не була абсолютно нерухомою в часі, а здійснювала певні коливання відносно деякого осередненого положення. Внаслідок цього в будь-якому фіксованому перерізі потоку глибина і п'езометричний тиск на дні змінювалися в часі. На використуваній експериментальній установці з досить великими геометричними розмірами ці коливання виявилися істотними. Враховуючи цю обставину, була прийнята наступна методика здійснення необхідних вимірювань. На початку дослідження фіксувалось осереднене в часі положення вільної поверхні досліджуваного явища. При цьому на бокові стінки лотка наносилися необхідні мітки, а вимірювання обрисів профілю вільної поверхні та п'езометричної лінії проводилися лише в моменти, коли досліджуване явище займало вибране осереднене положення.

Проведеними експериментами було чітко доведено, що на відміну від звичайних безнапірних бурхливих та спокійних потоків з плавно змінним

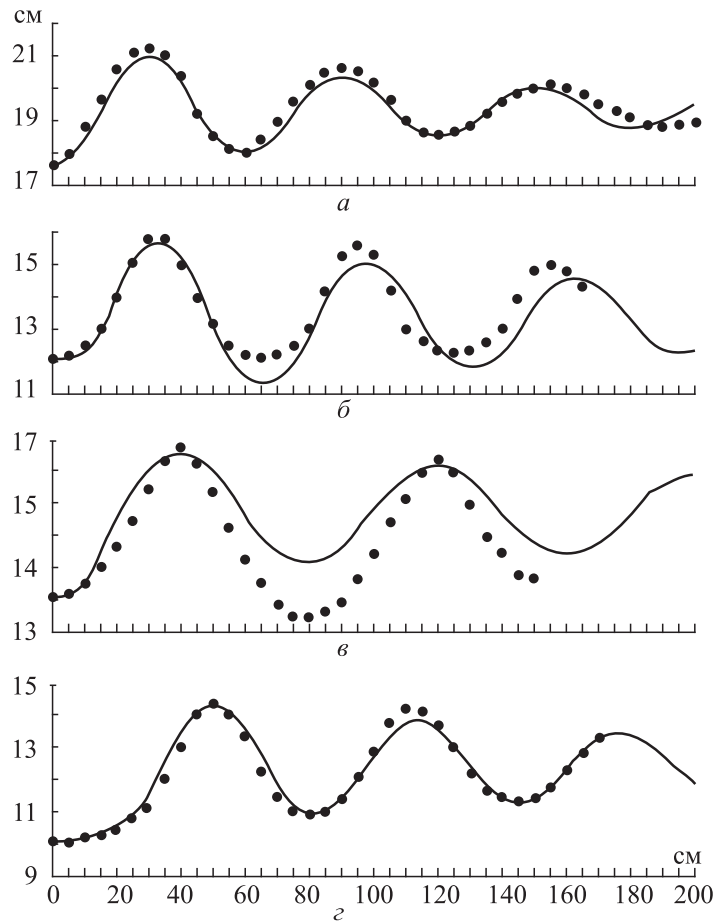


Рис. 3. Профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль:

- а) кноїдальні хвилі у спокійному потоці:
 $Q = 144,9$ л/с; $h_1 = 17,5$ см; $s_1 = 1,08$; $Fr_1 = 0,40$;
 б) кноїдальні хвилі у спокійному потоці:
 $Q = 116,8$ л/с; $h_1 = 13,0$ см; $s_1 = 1,022$; $Fr_1 = 0,63$;
 в) кноїдальні хвилі у спокійному потоці:
 $Q = 150,6$ л/с; $h_1 = 13,0$ см; $s_1 = 1,06$; $Fr_1 = 0,89$;
 г) кноїдальні хвилі у бурхливому потоці:
 $Q = 99,7$ л/с; $h_1 = 10,0$ см; $s_1 = 1,01$; $Fr_1 = 1,02$;
 ° – експериментальні точки вільної поверхні;
 - - - теоретичний профіль вільної поверхні

рухом кноїдальні хвилі не можна однозначно описати лише одним числом Фруда Fr_1 в їхньому початковому перерізі. Для коректного описання розглядуваних течій в додаток до числа Фруда Fr_1 необхідно враховувати ще й можливі нахил та кривизну елементарних струминок у вертикальній площині (або іншими словами можливе відхилення від гідростатичного закону розподілу тиску по глибині) в тому ж перерізі.

Таблиця 1.

№ з/п	Тип явища	Кількість дослідів	Витрата Q , л/с	Характеристики потоку в початковому перерізі		
				h_1 , см	s_1	Fr_1
1	Кноїдальні хвилі в спокійному чи критичному потоці	58	27 ÷ 332	5 ÷ 26	1,02 ÷ 1,07	0,31 ÷ 0,96
2	Кноїдальні хвилі в бурхливому потоці	10	71 ÷ 151	8 ÷ 13	1,01 ÷ 1,06	1,01 ÷ 1,18



Порівняння результатів лабораторних досліджень та математичних розрахунків.

На Рис. 3 для дослідів з кноїдальними хвилями, в початковому перерізі яких має місце негідростатичний закон розподілу тиску, нанесені профілі побудовані за приведеним вище математичним алгоритмом та відповідні експериментальні точки.

Співставлення теоретичних і експериментальних профілів вільної поверхні кноїдальних хвиль показало наступне: розраховані профілі близькі з експериментальними значеннями, але при цьому мають невелике розходження відносно довжини хвилі λ . Ця невідповідність теоретичних результатів з експериментальними даними пояснюється тим, що в наведеному алгоритмі використовується наближена формула Турсунова (8), яка, в деяких випадках, дає завищені результати.

Висновки

1. Для описання кноїдальних хвиль використовуються математичні моделі, що записуються за допомогою еліптичної функції Якобі амплітуди косинуса $\text{cn } z$. Дані моделі мають недолік — вони не враховують затухання хвиль.

2. Використання розв'язку диференціального рівняння затухаючих вимушених коливань дозволяє побудувати теоретичний профіль вільної поверхні кноїдальних хвиль з урахуванням негідростатичного розподілу тиску у початковому перерізі та затухання хвиль по довжині розглядуваного явища.

3. Порівняння теоретичних і експериментальних профілів вільної поверхні кноїдальних хвиль (Рис. 3) показує, що наведений математичний алгоритм є вірним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рябенко О.А. Форми вільної поверхні та умови існування гідродинамічного солітону, самотньої, одиночної і кноїдальних хвиль // Прикладна гідромеханіка. Том 9. 2007. с. 66–80.
2. Смыслов В.В. Исследование околоскритических течений жидкости в открытых руслах // Известия вузов. Энергетика. — 1967. — № 1. — С. 97–103.
3. Рябенко О.А., Галич О.О., Поплавський Д.М. Побудова профілів вільної поверхні хвилястого стрибка, усамітненої та кноїдальних хвиль // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна обчислювальна техніка в технологічних процесах». Хмельницький національний університет. — 2014. — №2. — С. 163–166.
4. Поплавський Д.М. Розрахунок профілю вільної поверхні кноїдальних хвиль // Нетрадиційні і поновлювальні джерела енергії як альтернативні первинним джерелам енергії в регіоні: Матеріали Восьмої міжнародної науково-практичної конференції: Зб. наук. статей. Львів: ЛьвДЦНІ. 2015. с. 200–204.
5. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1895. — V. 39, N 5. — P. 422–443.
6. Tang, C. and Lee, T. Numerical Hybrid Grid for Snoidal Wave Generation and Induced Separated Flow over a Wavy Bed // J. Eng. Mech. — 2014. 140 (9).
7. Лопатинський І. Є., Зачек І. Р., Ільчук Г. А., Романишин Б. М. Фізика для інженерів. Підручник // Львів: Афіша. 2005. — 386 с.
8. Рябенко О.А. Математична модель хвилеподібних білякритичних течій рідини з урахуванням можливого виривлення потоку у вертикальній площині в їх початковому перерізі // Прикладна гідромеханіка. — 2006. — 80, том. 8, — № 1. — С. 60–72.
9. Турсунов А.А. Околоскритическое состояние безнапорных потоков воды // Изв. ВНИИГ. — 1969. — Т. 90. — С. 201–224.
10. Рябенко А.А., Галич О.А., Поплавський Д.М. Использование дифференциальных уравнений для расчетов профиля свободной поверхности волнистого прыжка // Гидроинженерия. Грузия, Тбилиси: издательский дом «Технический Университет». — 2013. — № 1–2(15–16). — С. 36–45.

© Рябенко О.А., Ключа О.О., Галич О.О., Поплавський Д.М., 2016

