



6. *Моделирование* тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды./Под ред. акад. Петрова Г.И. — М.: Машиностроение, 1971. — 380 с.

7. *Уоссермен Ф.* Нейрокомпьютерная техника: теория и практика. Перевод на русский язык Ю.А. Зуев, В.А. Точенов. — 1992.

8. *Заенцев И.В.* Нейронные сети: основные модели. Учебное пособие к курсу "Нейронные сети"

9. *Lippman R.P.* An introduction to computing with neural networks. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. — 1987. — April, P. 4–22.

10. *Perceptrons*, by Marvin Minsky and Seymour Papert, published by MIT Press, Cambridge Massachusetts, (1969)

11. *Галушкин А.И.* Синтез многослойных систем распознавания образов. — М.: Энергия, 1974.

© Вакуленко А.Н., Кобзарь К.А., Третьяк А.В., Гакал П.Г., Овсянникова Е.А., Морозинский М.И., 2015



УДК 556.537:532

**ЩОДРО А.Е.**, докт. техн. наук,  
проф. Национального университета водного хозяйства  
и природопользования, г. Ровно

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАСЧЕТА МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ДНА

*Показано доцільність раціонального комбінування глобального і локального підходів при розрахунках місцевих розмивів біля берегів річок і річкових гідротехнічних споруд.*

*Показана цілесобразність раціонального комбінування глобального і локального підходів при розрахунках місцевих розмивів у берегах рек і речних гідротехнічних споруджень.*

**В** работах [1, 2] показана необходимость рассмотрения процесса деформации грунта как процесса изменения его интенсивности во времени. Именно такой подход дает возможность проследить изменения в кинематической структуре потока, связанные с относительно небольшими изменениями размываемых границ потока на каждом временном интервале. Наш подход является локальным и в том смысле, что интенсивность выноса грунта определяется на данной вертикали потока (в данной точке дна), где определены все локальные свойства потока [2] Но в данной работе вводится иное понятие локальности воздействия потока на дно.

Далее показана методически целесообразная дифференциация условий размыва в связи с разными свойствами размываемых грунтов, обуславливающих применение одного из двух методических подходов, описанных ниже.

Рассмотрим **особенности взаимодействия турбулентного потока с руслом**. Целесообразность расчетов размыва в мелководном и практически однородном грунте следует из соображений подхода, основанного на задании коэффициента диффузии наносов при их отрыве от дна и проникновении в поток —  $\varepsilon D$ . Исходя из этого далее развита соответствующая теоретическая концепция, называемая конвективно-массообменной или диффузионной [3]. Касательные турбулентные напряжения, действующие на поверхности грунта, являются первопричиной как сдвига от-

дельных частиц, лежащих на поверхности, так и их массового сдвига. Рассмотрен также вопрос о пульсации касательных напряжений, их влияния на отрыв частиц; о пульсациях давления и их проникновении в грунт. Расчеты, проведенные на основе развитой теории, показали, что все вышеупомянутые факторы учитываются значениями  $\varepsilon D$ .

Взаимное влияние потока и его размываемого ложа характеризуется изменением геометрических очертаний его границ и изменением кинематических условий, связанных как с изменением геометрии границ, так и с насыщением потока наносами. Нами используется также гипотеза "замороженного дна", основанная на том факте, что поток приспосабливается к изменениям формы дна практически мгновенно, а дно меняет свою форму значительно медленнее. Размывающую способность потока можно оценивать *двумя способами*:

- по касательным напряжениям на дне и силе, передаваемой от потока на некоторый участок дна, безотносительно отдельных частиц, лежащих на дне,

- либо по силам, действующим на отдельные частицы и вызывающим их срыв.

Соответственно существует два направления в оценке условий начала смыва грунта или какой-то характерной стадии в развитии процесса его вымыва. Первое направление назовем глобальным, а второе — локальным подходом к оценке критических состояний или интенсивности



смыва грунтовых частиц. При этом глобальный подход может означать оценку размывающей способности в некоторой точке, где указываются локальные значения характеристик потока, но безотносительно тех конкретных частиц, которые здесь находятся.

Осредненные касательные напряжения определяются на границе потока так же, как и в его толще, считаясь прямо пропорциональными градиентам осредненных скоростей. Пульсации же касательных напряжений зависят всецело от турбулентной структуры, то есть насыщенности потока вихрями, ориентации их осей в пространстве и параметров шероховатости. Таким образом, силовое воздействие потока на частицы грунта, слагающего ложе водотока, определяется тремя взаимосвязанными основными факторами — полем осредненных скоростей, состоянием придонной турбулентности и структурой зернистой поверхности дна.

Глобальный и локальный подходы в оценке размывающей способности потока дополняют друг друга и оба используются в настоящей работе. Глобальный подход может быть применен при оценке количества смываемого относительно однородного и мелкого грунта при известной кинематике потока, причем, на основе кинематики предварительно вычисляются касательные донные напряжения. Должно быть известным также поле донных давлений. Локальный подход необходим при расчетах в неоднородных и крупнозернистых грунтах. Между результатами расчетов на основе обоих подходов устанавливается соответствие.

Отметим вначале теоретическую концепцию, устанавливающую **связь между пульсацией донного давления и кинематическими характеристиками потока**. Такая связь исследована и описана в работах [1, 6].

Рассмотрим концепцию устойчивости грунта в связи с пульсациями гидродинамических характеристик на границе потока. Как с точки зрения глобального, так и локального подходов, упомянутых выше, представляют интерес актуальные (мгновенные, близкие к максимальным) значения гидродинамических параметров — придонных скоростей, придонных давлений и касательных напряжений. Рассматривая поверхность грунта, на которую воздействует поток, производящий размыв, замечаем, что такая поверхность покрыта как отдельными, более крупными частицами, также и средними, и мелкими. Крупных частиц (средним диаметром  $d_1$ ) в смеси, как правило, немного и они выступают кое-где над поверхностью грунта. Они подвержены лобовому воздействию потока, и сила, которая на них действу-

ет, прямо пропорциональна квадрату мгновенной придонной скорости. За каждой крупной частицей формируется зона отрыва, занимающая площадь на поверхности грунта, соизмеримую с величиной  $(6-7) d^2$ . Поэтому основным действующим силовым фактором являются пульсации давления. Они, проникая в толщу грунта, влияют на устойчивость поверхностного слоя частиц благодаря задержке фаз и уменьшению амплитуды давления по мере углубления в грунт. Наибольшую часть поверхности рассматриваемого грунта составляют средние по крупности частицы диаметром  $d_1^2$ . Сама поверхность такого грунта — это совокупность поверхностей таких частиц, уложенных самим потоком плашмя, и подверженных касательным напряжениям, а также пульсациям давления. Для оценки устойчивости верхних слоев такого грунта целесообразно рассматривать как отдельные частицы такой крупности в рамках локального подхода, так и устойчивость поверхностного слоя (одного или нескольких) под действием касательных напряжений.

Применяя к последнему гидродинамическому параметру "идею актуальности" можно заметить, что точное обоснование актуальных параметров этих напряжений, а также мгновенных скоростей, с ними связанных, требует проведения спектрального анализа. Следуя авторам монографии [1], проведем такой анализ как для пульсаций давлений, так и касательных напряжений. В первую очередь, именно для изучения размывающей способности мелкого, относительно однородного грунта, нами предпринята попытка теоретического анализа пульсаций давления и касательного напряжения на твердой границе потока. Целью такого рассмотрения является получение связи между указанными величинами, а также их связи с пульсациями продольных скоростей. Именно пульсации скоростей нами оцениваются в эксперименте. Пульсации же давлений и касательных напряжений, а также соответствующие осредненные величины ответственны за смыв поверхностных слоев мелкого грунта [1].

Уравнение, описывающее пульсацию давления в турбулентном потоке несжимаемой жидкости, получено в работах [1, 4, 6]. Его вывод связан с применением операции дивергенции к уравнениям Навье—Стокса. Оно имеет вид классического уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = \rho f, \quad (1)$$

где  $p$  — стандарт пульсации давления,  $f$  — кинематическая функция. Заметим, что такое же уравнение применимо и для оценки пульсаций давления



на границе взвесенесущего потока с относительно невысокими концентрациями взвеси. Правая часть такого уравнения должна отражать особенности кинематики таких потоков.

Рассматривая поток большей ширины с глубиной, мало меняющейся в плане, и применяя к записанному уравнению преобразование Фурье, получаем уравнение в полных производных относительно образа пульсации давления  $p^*$  [1]:

$$\frac{d^2 p^*}{dx_2^2} - \kappa^2 p^* = \rho f^*, \quad (2)$$

Здесь  $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_3^2$ ;  $\chi = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_3^2}$ . Символами  $\chi$  обозначены волновые числа по координатным направлениям, остальные обозначения приведены в работе [1].

Общий интеграл уравнения (2) известен и выписан в работе [1].

Стандарт пульсации давления на дне потока в соответствии с теорией, развитой в работах [1, 6], прямо пропорционален среднему значению касательного напряжения

$$P' = k_p \langle \tau \rangle, \quad (3)$$

где  $\langle \tau \rangle$  – осредненное значение касательного напряжения на дне потока.

Значение  $k_p$  зависит от условий течения (практически только от продольного градиента осредненного давления). В равномерном потоке  $k_p \approx 3,6 \div 2,7$  ( $k_p$  несколько уменьшается с ростом числа Фруда). В безотрывном неравномерном потоке при  $\partial U_1 / \partial x > 0$   $k_p$  снижается до 1,1 и ниже [1].

Считая уравнения (1–3) справедливыми для **двухфазного потока** заметим, что этот учет может быть проведен на основе корректировки коэффициента  $k_p$ . Оценивая его увеличение, исходя из энергетической концепции Великанова М.А., можно сказать, что для практических случаев при наличии транспорта наносов этот коэффициент должен возрасти на 0,1–0,15 от своего значения для осветленного потока. Подтверждение этому дает также обработка опытов по оценке начала размывов в неравномерном потоке. В работах [1, 6] был также рассмотрен вопрос о влиянии шероховатости на спектр пульсации давления [1]. Их опыты подтверждают справедливость формулы (3) для стандарта пульсации давления на дно потока.

Известно, что пульсации донного давления, проникающие в глубину грунтового массива, способствуют взвешиванию грунта, а мгновенные скорости поднимают и переносят частицы грунта. Поэтому существенной является связь между

указанными характеристиками. Следует отметить, что именно кинематические характеристики потока, осредненные и пульсационные скорости, наиболее надежно фиксируемые в ходе эксперимента, и должны служить главным фактором в оценке размывающей способности потока.

Затем устанавливается **связь пульсаций скорости с мгновенными касательными донными напряжениями**, включающими их осредненные значения и пульсационные компоненты. Теоретические основы расчета **массового смыва мелкого однородного грунта** разрабатываются далее, на основе глобального подхода, как исходя из концепции проникновения пульсаций давления в грунт, так и оценки общей меры возмущенности турбулентного потока. Последнюю, как известно, можно оценивать как по уровню пульсаций скоростей, так и по уровню пульсаций давления или касательных напряжений. Делается вывод о достаточности учета лишь разности амплитуд мгновенных давлений над размываемым верхним слоем грунта и под ним. Фазовое отставание пульсаций под частицами проявляется лишь в очень мелких грунтах, для которых характерным является массовый смыв грунта с поверхности, омываемой потоком, и учитывается через эмпирические коэффициенты. Указанная поправка к разности амплитуд давлений для крупных частиц с учетом фазового отставания не превышает 0,015–0,017 максимального перепада давлений во внешней части потока, над дном.

Из сказанного делается вывод о достаточности некоторой единой характеристики (далее – коэффициентом диффузии наносов, лежащих на дне). То есть здесь используется идея так называемой "массообменно-конвективной" теории размыва, в соответствии с которой смыв наносов с поверхности ложа потока представляет собой диффузионный процесс переноса массы через некоторую границу, параллельную основному движению потока. К этой идее подводят именно результаты исследований проникновений пульсаций давления в грунт [1, 4, 5], вибрации частиц на поверхности и в глубине грунта [5], пульсации касательных напряжений [1], приводящих к отрыву отдельных зерен, а также групп частиц.

Используем также **локальный** подход к определению вероятности отрыва от дна отдельных частиц неоднородного грунта. При этом **методом имитационного моделирования** учитываются статистические характеристики пульсирующей придонной скорости, а также механический состав грунта. Отметим, что диффузионная теория переформирования дна используется для расчета деформаций дна в относительно мелких грунтах



(при отношении скоростей потока к гидравлической крупности наносов  $Uo/w > 3,5 \dots 4,0$ ) и требует для определения коэффициентов диффузии, учитывающих смыв частиц грунта со дна, расчетов по всем предыдущим моделям и, кроме того, данных экспериментов.

В работе [6] установлена связь между полем осредненных скоростей у твердой границы и первыми двумя статистическими моментами мгновенных касательных напряжений. Отмечается, что в напряжениях, действующих на границе потока, можно выделить осредненную и пульсационную компоненты. Осредненное касательное напряжение  $\tau$ , действующее на границе потока, обычно выражают через осредненную (по вероятности и глубине) скорость потока  $U$ . Нормальное осредненное напряжение обычно связано для условий равномерного потока с глубиной  $H$  и гидравлическим уклоном  $I$ . Оно иногда выражается через квадрат динамической скорости  $U^2$ :

$$\tau = \rho g H I = \rho U_*^2 = \rho \lambda U^2 / 2, \quad (4)$$

здесь  $\lambda$  — коэффициент гидравлического трения, характеризующий общее сопротивление русла, остальные обозначения общепринятые.

**Пульсация касательного напряжения на жесткой стенке.** Непосредственно у стенки пульсационные компоненты скорости можно найти из уравнений [1].

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5)$$

где  $u_i$  — компоненты пульсационных скоростей в заданной точке потока и фиксированный момент времени,  $U$  — соответствующие значения компонент осредненной скорости.

В системе (5) отброшены нелинейные члены, несущественные в непосредственной близости от стенки.

Для определения касательных напряжений на стенке, обтекаемой плоским, или близким к нему по свойствам потоком, (при нулевых значениях производной в направлении  $x_2$  ( $\tau_j = \rho \nu du_j / x_2$ )) система (5) приведена к следующему виду

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \tau_1}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_3^2} = k \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_2^2};$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \tau_3}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 \tau_3}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_2^2} = k \frac{\partial^2 \tau_3}{\partial x_2^2}, \quad (6)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_3$  — компоненты вектора мгновенного ка-

сательного напряжения вдоль продольной и вертикальной координат осей соответственно, коэффициент  $k$  учитывает реальную вихревую структуру потока и насыщенность наносами (при слабой концентрации частиц).

На границе ( $x_2 = 0$ ) заданы условия прилипания и непроницаемости

$$u_i = 0; \partial u_{i_2} / \partial x_2 = 0. \quad (7)$$

Применяя к системе уравнений (5) преобразование Фурье и упрощая далее выражения для образов пульсаций скоростей и давлений, и принимая условия плавности изменения характеристик потока на границе подслоя, авторы [1] получили формулу для образа давления, которая в упрощенном виде принимает следующий вид:

$$P^* = -\tau_1^* \frac{(i\omega + x_1^2 + x_3^2)(x_1^2 + x_3^2)}{x_3^2 + 2x_1^2}, \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что спектр касательного напряжения относительно более низкочастотен, чем спектр давления на стенке. Это подтверждает концептуальное соображение о том, что именно актуальные значения касательных напряжений являются определяющими в оценке устойчивости как однородных, так и разнородных грунтов.

В работе [1] получены также конкретные значения коэффициентов, связывающих мгновенные давления с производной по времени от мгновенных касательных напряжений на дне. Для этой цели авторы получили приближенную связь между безразмерными образами пульсации давления и касательного напряжения на границе потока и, возвращаясь к оригиналам и размерным переменным, получили связь нестационарных давлений с касательными напряжениями

$$P \approx -\frac{1}{2} \frac{\partial \tau_1}{\partial t} \frac{\mu}{U_*^2}. \quad (9)$$

Аналогичная зависимость получена и для обтекания шероховатых стенок, но с введением соответствующего коэффициента.

**Моделирование процесса проникновения пульсаций давления в грунтовую среду и оценка устойчивости поверхностных слоев грунта.** Выполненные исследования [1, 4–6] доказывают, что уже в пределах верхнего ряда частиц грунта имеет место резкое затухание амплитуды и частоты пульсации скорости. Это приводит к периодическому возникновению на их верхней границе пониженного гидродинамического давления, а на нижней — повышенного. Возникающее взвешенное усилие является одной из причин нарушения устойчивости частей грунта. Через поры в грунте пульсации давления проникают в толщу грунта и



оказывают влияние на устойчивость поверхностных частиц.

По методике, описанной в работе [1], нами проведены расчеты пульсаций давления в порах однородного несвязного грунта и установлено, что для практических целей можно использовать оценку для разницы давлений в порах под первым слоем грунтовых частиц и в наружном потоке.

Эта оценка связана с проявлением двух факторов:

- уменьшением амплитуды пульсаций давления в грунте;
- задержкой фазы пульсации.

Изменение давления в толще грунта описывается уравнением

$$\frac{dp}{dt} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \right], \quad (10)$$

где  $x_i$  – координаты;  $i = 1, 2$ ;  $a^2 = \frac{k_\phi K}{\rho_* gm}$ ;  $\rho$  и  $K$  – плотность воды и модуль объемного сжатия среды соответственно;  $k_\phi$  – коэффициент фильтрации.

Выражения для разницы давлений в грунтовом массиве и на поверхности, полученное нами с учетом реальной, относительно небольшой, неоднородности грунта путем решения последнего уравнения методом интегральных преобразований выведено в работе [1] (формула 9–76 на стр. 264).

Приведенные в работе [1] общие уравнения колебаний давления в пористой среде достаточно сложны, поэтому даже их приближенное численное решение вызывает значительные трудности. Тем не менее, если пренебречь движением скелета грунта или принять эти движения безвихревыми, то такие уравнения могут быть записаны в значительно упрощенном виде уравнения теплопроводности [4, 5], а с учетом сил инерций Чарный И. А. [4] получил выражение

$$\nabla^2 p = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (11)$$

где  $c$  – скорость звука в воде.

Считая, что в начальный момент времени  $t = 0$  пористая среда находилась в состоянии покоя, при соответствующих предельных условиях, для расчета пульсаций давления, например, в одномерном случае может быть рассмотрена такая модельная задача :

$$\begin{cases} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial p(x,t)}{\partial x^2}, & -h_\phi \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t < +\infty, \\ p(x,0) = 0, & x < 0, \\ p(0,t) = p_*(t), & t > 0, \\ p(-h_\phi, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (12)$$

здесь принято  $h_\phi$  – расстояние от поверхности грунта до водонепроницаемого слоя.

Решение задачи (12) может быть найдено приближенно с использованием конечно-разностных методов.

В случае необходимости учета сил инерций ищется решение уравнения (12) при соответствующих граничных и начальном условиях. Учтывая, что множитель  $1/c^2$  достаточно малое число, будем рассматривать его как малый параметр. Тогда решение соответствующей задачи в этом случае будем искать в виде асимптотического ряда

$$p_\varepsilon = p_0(x, t) + \varepsilon p_1(x, t) + \varepsilon^2 p_2(x, t) + R(x, t, \varepsilon), \quad (13)$$

где  $\varepsilon = 1/c^2$  – малый параметр;  $R(x, t, \varepsilon)$  – остаточный член.

Подставляя (13) в (12) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в левой и правой части, получим такие уравнения для определения давления

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial p_0(x,t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial p_i(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 p_{i-1}(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial p_i(x,t)}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (14) нами решены при условиях

$$\begin{aligned} p_0(x, 0) &= 0, \quad x < 0, \quad p_0(0, t) = p_*(t), \quad t > 0, \\ p_0(-h_\phi, t) &= 0, \quad t > 0, \\ p_i(x, 0) &= 0, \quad x < 0, \quad p_i(0, t) = 0, \quad t > 0, \\ p_i(-h_\phi, t) &= 0, \quad t > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и в предыдущем случае, решение задач (14) при условиях (15) может быть найденным конечно-разностными методами.

Анализ числовых решений задач (14–15) показывает, что влияние сил инерций на процесс проникновения пульсаций давления в грунтовую среду незначителен и не превышает 1%, поэтому им можно пренебречь.

Использование рассмотренной методики оценки устойчивости поверхностного слоя грунта для практических случаев размыва вызывает определенные трудности, которые связаны с необходимостью задать достоверные статистические значения параметров изменения пульсаций давления на поверхности грунта для конкретных условий обтекания гидротехнических сооружений водным потоком.

Важным вопросом в оценке устойчивости слоев грунта является учет фазового запаздывания пульсационных изменений давлений в порах грунта по сравнению с внешним давлением. Как свидетельствуют наши данные, эти запаздывания

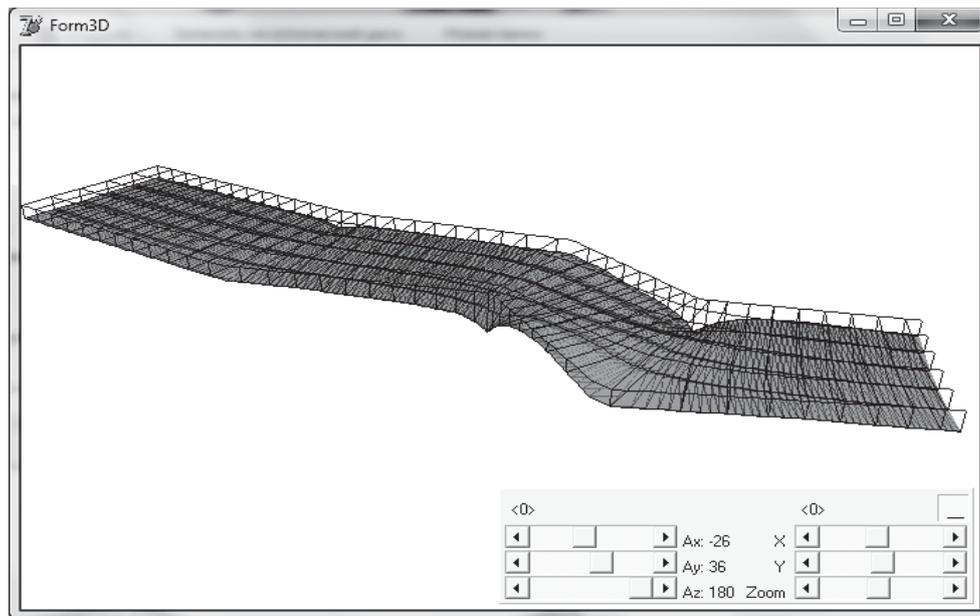


Рис. 1. Картина размывов, происшедших за 2 часа для условий, заданных в работе [3].

могут быть существенными для частиц грунта менее 0.1...0.5 мм. А для таких мелких грунтов интенсивность вымыва можно значительно надежнее оценивать по эмпирическим зависимостям при известных касательных напряжениях и поля давления.

Таким образом, расчетным уравнением для проверки устойчивости слоя относительно однородного мелкого грунта можно считать уравнение (13).

Рациональная комбинация локального и глобального подходов, использованная в контексте работы [3], дает более точные результаты (Рис 1). Сама комбинация при этом состоит в рассмотрении поверхности грунта, частично покрытой крупными частицами, частично – относительно мелкими и практически однородными, и в определении отношения площадей таких покрытий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лятхера В.М., Яковлева Ю.С. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / – М.: Энергия, 1976. – С.392.
2. Щодро О.Є. Нова концепція формування місцевих розмивів біля берегів річок та штучних споруд // Вісник НУВГП: збірник наук. праць. – Рівне: НУВГП, 2007. – Вип. 4 (40). – С. 198–205.
3. Щодро О.Є., Барановський О.Є., Наконечний І.М. Побудова планової картини течії та просторових деформацій русла довільної форми/Гідроенергетика України – 2010. – №3. – С. 36–39.
4. Чарный И.А. Подземная гидромеханика / – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 196 с.
5. Сеймов В.М., Трофимчук А.Н., Савицкий О.А. Колебания и волны в слоистых средах / ИГМ АН УССР. – К.: Наукова думка, 1990. – 222 с.
6. Лятхер В.М. Турбулентность в гидросооружениях / – М.: "Энергия", 1968. – 408 с.
7. Щодро О.Є. Швидкий алгоритм для моделювання течій в турбулентних водних потоках / О.Є. Щодро, Я.В. Ходневич. // Гідраліка і гідротехніка: наук. техн. збірник. – Київ: НТУ, 2008. – Вип. 62. – С. 25–36.

© Щодро А.Є., 2014

