doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.017
УДК 512.544

О.О. Пипка

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара
E-mail: pypka@ua.fm

Про деякі узагальнення пронормальних підгруп

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.П. Моторним

Знайдено будову деяких нескінченних груп, циклічні підгрупи яких є GNA-підгрупами (монопронормальними підгрупами).

Ключові слова: *пронормальна підгрупа, GNA-підгрупа, монопронормальна підгрупа, локально скінченна група, узагальнено радикальна група.*

Вивчення впливу деяких природних систем підгруп на будову групи є однією з класичних задач теорії груп. Наприклад, добре відомо, що нормальні підгрупи та їх узагальнення мають досить істотний вплив на структуру групи. Водночас існує велика кількість інших типів підгруп, які досить чітко та однозначно визначають властивості групи. Серед них є так звані антиподи (узагальнено) нормальних підгруп (наприклад, абнормальні підгрупи, самонормалізовні підгрупи, контранормальні підгрупи, малнормальні підгрупи та ін.). Інакше кажучи, такі підгрупи мають діаметрально протилежні властивості щодо вихідних підгруп.

Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *абнормальною* в G, якщо для кожного елемента $g \in G$ виконується включення $g \in \langle H, H^g \rangle$. Також нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *контранормальною* в G, якщо $H^G = G$. Нарешті, підгрупу H групи G називатимемо *самонормалізовною* в G, якщо $N_G(H) = H$. Очевидно, що абнормальність, контранормальність та самонормалізовність у певному сенсі протилежні нормальності. Зокрема, підгрупа H групи G є одночасно нормальною та абнормальною (контранормальною, самонормалізовною) в G тоді й тільки тоді, коли $H = G$. Також зазначимо, що кожна абнормальна підгрупа є самонормалізовною та контранормальною. Проте між двома останніми типами підгруп якогось прямого зв’язку в загальному випадку немає.

З іншого боку, існують такі типи підгруп, які об’єднують в собі протилежні за своїми властивостями підгрупи, зокрема, нормальні та абнормальні. Одним з таких прикладів є так звані пронормальні підгрупи. Підгрупу H групи G називатимемо *пронормальною* в G, якщо для кожного елемента $g \in G$ підгрупи H та H^g спряжені в породженій ними підгрупі $\langle H, H^g \rangle$, тобто існує такий елемент $u \in \langle H, H^g \rangle$, що $H^g = H^u$. Наведемо одну досить важливу та корисну властивість пронормальних підгруп: *нормалізатор* $N_G(H)$ *пронормальної підгрупи* H *групи* G *є абнормальною підгрупою в* G (див., наприклад, [1]), а тому й самонормалізовною та контранормальною.

Нехай H — пронормальна підгрупа групи G. Якщо $g \in N_G(H)$, то за означенням маємо рівність $H^g = H$. З іншого боку, як було зазначено вище, нормалізатор $N_G(H)$ є абнормальною підгрупою в G, звідки отримуємо, що $N_G(N_G(H)) = N_G(H)$ та $N_G(H)^G = G$. Отже, враховуючи всі ці зауваження, ми природним шляхом отримуємо такі узагальнення пронормальних підгруп.

Означення 1. Підгрупу H групи G називатимемо *GNA-підгрупою* групи G, якщо для кожного елемента $g \in G$ або $H^g = H$, або $N_K(N_K(H)) = N_K(H)$, де $K = \langle H, g \rangle$.

Означення 2. Підгрупу H групи G називатимемо *монопронормальною* в G, якщо для кожного елемента $g \in G$ або $H^g = H$, або $N_K(H)^K = K$, де $K = \langle H, g \rangle$.

Як випливає з означення, кожна пронормальна підгрупа є *GNA*-підгрупою. Проте обернене твердження в загальному випадку не має місця. Відповідний приклад було наведено в роботі [2].

Приклад 1. Нехай G — симетрична група 6-го ступеня. Припустимо, що H — це підгрупа групи G, що породжена елементами (4, 5, 6) та (2, 3). Тоді H є *GNA*-підгрупою, але не є пронормальною в G.

Інакше кажучи, *GNA*-підгрупи — нетривіальне узагальнення пронормальних підгруп. Те ж саме можна сказати і про монопронормальні підгрупи.

Першим кроком у вивченні впливу певних систем підгруп на структуру групи було дослідження будови груп, усі підгрупи яких мали лише одну конкретну властивість, тобто всі підгрупи були лише одного типу. Вперше такі дослідження провів Р. Дедекінд, який у своїй вже класичній роботі [3] отримав опис скінченних груп, усі підгрупи яких нормальні. Пізніше цей результат був поширений і на нескінченні групи (див., наприклад, [4]). Проте історично склалося, що групу (не обов'язково скінченну), усі підгрупи якої нормальні, називають *дедекіндовою*. З результатів статті [4] випливає, що якщо G є дедекіндовою групою, то вона або абелева, або $G = Q \times D \times B$, де Q — група кватерніонів порядку 8, D — елементарна абелева 2-підгрупа, а B — періодична абелева $2'$-підгрупа.

Цілком логічно застосувати аналогічний підхід для *GNA*-підгруп та монопронормальних підгруп. У роботах [2] та [5] описані локально скінченні групи, всі підгрупи яких є *GNA*-підгрупами та монопронормальними підгрупами відповідно.

У даній роботі ми розглянемо більш загальну ситуацію. А саме буде наведено опис локально скінченних груп, циклічні підгрупи яких є *GNA*-підгрупами (монопронормальними підгрупами). Але спочатку нагадаємо, що *локально нільпотентним резидуалом* L групи G ми називатимемо перетин усіх нормальних підгруп H групи G, для яких фактор-група G/H локально нільпотентна.

Першим основним результатом роботи є нижчесформульована теорема.

Теорема 1. *Нехай* G *— локально скінченна група,* L *— локально нільпотентний резидуал групи* G. *Якщо кожна циклічна підгрупа групи* G *є GNA-підгрупою, то виконуються такі твердження:*

(i) підгрупа L *абелева;*

(ii) $2 \notin \Pi(L)$ *та* $\Pi(L) \cap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(iii) фактор-група G/L дедекіндова;

(iv) кожна підгрупа з $C_G(L)$ є G -інваріантною.

І навпаки, якщо група G задовольняє умови (i)—(iv), то кожна циклічна підгрупа групи G є GNA-підгрупою.

Наслідок 1. *Нехай G — локально скінченна група. Якщо кожна циклічна підгрупа групи G є GNA-підгрупою, то комутант $[G,G]$ групи G є абелевим.*

Зазначимо, що теорему 1 не можна узагальнити на довільні періодичні групи, що ілюструє нижченаведений приклад.

Приклад 2. Нехай G — монстр Тарського, тобто G — це нескінченна група, в якій кожна власна неодинична підгрупа є циклічною простого порядку p для деякого фіксованого простого числа p. Зазначимо, що А.Ю. Ольшанський довів існування таких груп для кожного простого числа $p > 10^{75}$ [6]. Кожен неодиничний елемент групи G породжує циклічну підгрупу простого порядку p, а будь-які два непереставні елементи групи G породжують усю групу G. Очевидно, що якщо $y \in \langle x \rangle$, то $\langle x \rangle^y = \langle x \rangle$. Якщо ж $y \notin \langle x \rangle$, то $\langle x, y \rangle = G$ та $\langle x \rangle = N_G(\langle x \rangle)$, звідки випливає, що $N_G(\langle x \rangle) = N_G(N_G(\langle x \rangle))$. Отже, G — це періодична група, всі циклічні підгрупи якої є *GNA*-підгрупами. Але група G проста.

Локально скінченні групи, циклічні підгрупи яких монопронормальні, мають таку ж саму структуру, як і групи з теореми 1.

Теорема 2. *Нехай G — локально скінченна група, L — локально нільпотентний резидуал групи G. Якщо кожна циклічна підгрупа групи G монопронормальна в G, то виконуються такі твердження:*

(i) підгрупа L абелева;

(ii) $2 \notin \Pi(L)$ та $\Pi(L) \cap \Pi(G/L) = \varnothing$;

(iii) фактор-група G/L дедекіндова;

(iv) кожна підгрупа з $C_G(L)$ є G -інваріантною.

І навпаки, якщо група G задовольняє умови (i)—(iv), то кожна циклічна підгрупа групи G монопронормальна в G.

Наслідок 2. *Нехай G — локально скінченна група. Якщо кожна циклічна підгрупа групи G монопронормальна в G, то комутант $[G,G]$ групи G є абелевим.*

Аналогічно, враховуючи існування монстра Тарського, твердження теореми 2 не можна поширити на довільні періодичні групи.

Тепер розглянемо деякі неперіодичні групи, циклічні підгрупи яких є *GNA*-підгрупами (монопронормальними підгрупами). Але спочатку нагадаємо деякі поняття.

Локально нільпотентним радикалом групи G називатимемо підгрупу, породжену всіма нормальними локально нільпотентними підгрупами групи G. Також нагадаємо, що *локально скінченним радикалом* групи G називається підгрупа, що породжена всіма нормальними локально скінченними підгрупами групи G. Група G називається *радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого локально нільпотентні. Групу G називатимемо *узагальнено радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого локально нільпотентні або локально скінченні. Таким чином, узагальнено радикальна група G містить або зростаючу локально нільпотентну підгрупу, або зростаючу локально скінченну підгрупу. В першому випадку локально нільпотентний радикал групи G неодиничний. А в другому випадку група G містить неодиничну нормальну локально скінченну підгрупу. Очевидно, що в кожній групі G локально скінченний радикал є найбільшою нормальною локально скінченною підгрупою групи G. Отже, кожна узагальнено радикальна група має зростаючий ряд нормальних підгруп з локально нільпотентними або локально скінченними факторами.

Зазначимо, що періодичні узагальнено радикальні групи локально скінченні, а тому і періодичні локально узагальнено радикальні групи також локально скінченні.

Нижченаведена теорема ілюструє будову неперіодичних локально узагальнено радикальних груп, циклічні підгрупи яких є *GNA*-підгрупами.

Теорема 3. *Нехай G — неперіодична локально узагальнено радикальна група, R — локально нільпотентний радикал групи G. Якщо кожна циклічна підгрупа групи G є GNA-підгрупою, то або G абелева, або $G = R\langle b\rangle$, де R абелева, $b^2 \in R$, $a^b = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in R$. Більше того, у другому випадку виконуються такі твердження:*

(i) якщо $b^2 = 1$, то силовська 2-підгрупа D групи R (якщо D неодинична) є елементарною абелевою;

(ii) якщо $b^2 \neq 1$, то або D елементарна абелева, або $D = E \times \langle v\rangle$, де E елементарна абелева, а $\langle b, v\rangle$ є групою кватерніонів.

І навпаки, якщо група G задовольняє вищенаведені умови, то кожна циклічна підгрупа групи G є GNA-підгрупою.

Наслідок 3. *Нехай G — неперіодична локально узагальнено радикальна група. Тоді кожна підгрупа групи G є GNA-підгрупою тоді й тільки тоді, коли G абелева.*

Для монопронормальних підгруп маємо такий самий опис.

Теорема 4. *Нехай G — неперіодична локально узагальнено радикальна група, R — локально нільпотентний радикал групи G. Якщо кожна циклічна підгрупа групи G монопронормальна в G, то або G абелева, або $G = R\langle b\rangle$, де R абелева, $b^2 \in R$, $a^b = a^{-1}$ для кожного елемента $a \in R$. Більше того, у другому випадку виконуються такі твердження:*

(i) якщо $b^2 = 1$, то силовська 2-підгрупа D групи R (якщо D неодинична) є елементарною абелевою;

(ii) якщо $b^2 \neq 1$, то або D елементарна абелева, або $D = E \times \langle v\rangle$, де E елементарна абелева, а $\langle b, v\rangle$ є групою кватерніонів.

І навпаки, якщо група G задовольняє вищенаведені умови, то кожна циклічна підгрупа групи G монопронормальна в G.

Наслідок 4. *Нехай G — неперіодична локально узагальнено радикальна група. Тоді кожна підгрупа групи G монопронормальна в G тоді й тільки тоді, коли G абелева.*

Як бачимо, структури груп, в яких усі циклічні підгрупи є *GNA*-підгрупами чи, відповідно, монопронормальними, як в періодичному випадку, так і в неперіодичному, збігаються. Але, звісно, це не означає, що самі типи підгруп збігаються. По-перше, як зазначалося вище, між самонормалізовними та контранормальними підгрупами, на основі яких будуються *GNA*-підгрупи та монопронормальні підгрупи відповідно, немає якихось чітких зв'язків, і ці класи підгруп досить сильно різняться. А по-друге, було знайдено відповідний приклад, який ілюструє відмінність *GNA*-підгруп та монопронормальних підгруп.

Приклад 3. Нехай $G = ((C_3 \times C_3) \leftthreetimes C_3) \leftthreetimes C_2$ (у бібліотеці груп малих порядків системи GAP — SmallGroup(54,5)). Група G містить дев'ять підгруп H_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$, які ізоморфні симетричній групі 3-го ступеня S_3, і при цьому H_i є *GNA*-підгрупами, але не є монопронормальними в G.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ба М.С., Боревич З.И. О расположении промежуточных подгрупп. *Кольца и линейные группы. Сб. науч. трудов*. Краснодар, 1988. С. 14–41.
2. Pypka A.A., Turbay N.A. On *GNA*-subgroups in locally finite groups. *Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. Естеств. науки*. 2015. № 6. С. 97–100.
3. Dedekind R. Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind. *Math. Ann*. 1897. **48**, № 4. P. 548–561. doi: https://doi.org/10.1007/BF01447922
4. Baer R. Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. *S.-B. Heidelberg Acad. Math.-Nat. Klasse*. 1933. **2**. С. 12–17.
5. Pypka A.A., Turbay N.A. On some generalization of pronormal subgroups in locally finite groups. *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Матем*. 2015. Вип. 20. С. 107–110.
6. Ol′shanskii A.Yu. Geometry of defining relations in groups. Dordrecht etc.: Kluwer, 1991. 505 p.

Надійшло до редакції 16.01.2018

REFERENCES

1. Ba, M. S. & Borevich Z. I. (1988). On arrangement of intermediate subgroups. Rings and linear groups (pp. 14-41). Krasnodar (in Russian).
2. Pypka, A. A. & Turbay, N. A. (2015). On *GNA*-subgroups in locally finite groups. Izv. GGU im. F. Scoriny, No. 6, pp. 97-100.
3. Dedekind, R. (1897). Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind. Math. Ann., 48, No. 4, pp. 548-561. doi: https://doi.org/10.1007/BF01447922
4. Baer, R. (1933). Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe. S.-B. Heidelberg Acad. Math.-Nat. Klasse., 2, pp. 12-17.
5. Pypka, A. A. & Turbay, N. A. (2015). On some generalization of pronormal subgroups in locally finite groups. Dnipro University Mathematics Bulletin, Iss. 20, pp. 107-110.
6. Ol‘shanskii, A. Yu. (1991). Geometry of defining relations in groups. Dordrecht etc.: Kluwer.

Received 16.01.2018

А.А. Пыпка

Днипровский национальный университет им. Олеся Гончара
E-mail: pypka@ua.fm

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ПРОНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Найдено строение некоторых бесконечных групп, циклические подгруппы которых являются *GNA*-подгруппами (монопронормальными подгруппами).

Ключевые слова: *пронормальная подгруппа, GNA-подгруппа, монопронормальная подгруппа, локально конечная группа, обобщенно радикальная группа.*

A.A. Pypka

Oles Honchar Dnipro National University
E-mail: pypka@ua.fm

ON SOME GENERALIZATIONS OF PRONORMAL SUBGROUPS

Some infinite groups, whose cyclic subgroups are *GNA*-subgroups (monopronormal subgroups), are discribed.

Keywords: *pronormal subgroup, GNA-subgroup, monopronormal subgroup, locally finite group, generalized radical group.*