doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.06.009
УДК 531.36

А.А. Мартынюк, академик НАН Украины

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: center@inmech.kiev.ua

Об устойчивости решений дробно-подобных уравнений возмущенного движения

Обсуждается применение дробно-подобной производной функции Ляпунова в теории устойчивости движения нелинейных систем с дробно-подобной производной вектора состояния. Приведены условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости стационарного решения.

Ключевые слова: *дробно-подобная система уравнений, физическая интерпретация, метод функций Ляпунова, устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость.*

Известно, что метод функций Ляпунова (или прямой метод анализа устойчивости) [1] распространен на многие классы уравнений возмущенного движения, включая системы с распределенными параметрами и множества неточных уравнений в метрических пространствах.

Появление в последние два десятилетия интереса к уравнениям с дробными производными (см. [2, 3] и библиографию там) побудило многих исследователей обобщить прямой метод Ляпунова на этот класс уравнений (см. [4, 5] и библиографию там).

Недавно в статье [6] предложено определение дробной производной, названной авторами “conformable fractional derivative”, что в русском переводе ближе всего к выражению “дробно-подобная производная”. В данной работе используется именно это определение, обсуждается его физический смысл и применение в некоторых задачах теории устойчивости движения.

1. Предварительные результаты. Пусть $q \in (0,1]$ и задана непрерывная функция $x(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Определение 1 (см. [7]). Для заданной функции $x(t) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, и любого $q \in (0,1]$ определим выражение $\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t))$ формулой

$$\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t)) = \lim \left\{ \frac{x(t + \theta\,(t - t_0))^{1-q} - x(t)}{\theta}, \quad \theta \to 0 \right\}.$$

Выражение $\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t))$ — называется дробно-подобной производной (ДПП) функции $x(t)$ порядка $0 < q \leqslant 1$.

Если $t_0 = 0$, то $\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t))$ принимает вид [6]

$$\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t)) = \lim\left\{\frac{x(t+\theta t^{1-q}) - x(t)}{\theta}, \quad \theta \to 0\right\}.$$

Если $t_0 = 0$, будем писать $\mathcal{D}^q_0(x(t)) = \mathcal{D}^q(x(t))$.

Если $\mathcal{D}^q(x(t))$ существует на $(0, b)$, то $\mathcal{D}^q(x(0)) = \lim\limits_{t\to 0^+} \mathcal{D}^q(x(t))$.

Если ДПП функции $x(t)$ порядка q существует и конечная на (t_0, ∞), будем говорить, что $x(t)$ является q-дифференцируемой на (t_0, ∞).

Замечание 1. Определение 1 удовлетворяет не всем условиям, которые формулируются для дробных производных Римана—Лиувиля и др. (см. [8] и библиографию там).

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1 (см. [6]). *Пусть $q \in (0,1]$ и $x(t), y(t)$ — q-дифференцируемые функции в точке $t > 0$. Тогда верны соотношения*:

(*а*) $\mathcal{D}^q_{t_0}(ax(t) + by(t)) = a\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t)) + b\mathcal{D}^q_{t_0}(y(t))$ *при всех* $a, b \in \mathbb{R}$;

(*б*) $\mathcal{D}^q_{t_0}(t^p) = p(t - t_0)^{1-q} t^{p-1}$ *при всех* $p \in \mathbb{R}$;

(*в*) $\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t)y(t)) = x(t)\mathcal{D}^q_{t_0}(y(t)) + y(t)\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t))$;

(*г*) $\mathcal{D}^q_{t_0}\left(\dfrac{x(t)}{y(t)}\right) = \dfrac{y(t)\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t)) - x(t)\mathcal{D}^q_{t_0}(y(t))}{y^2(t)}$;

(*д*) $\mathcal{D}^q_{t_0}(x(t)) = 0$ *для любой функции* $x(t) = \lambda$, *где* λ *— произвольная постоянная.*

Замечание 2. Соотношения (*а*)—(*д*) из предложения 1 аналогичны классическим результатам математического анализа. Эти соотношения не установлены (или не имеют места) для дробных производных Римана—Лиувиля и др. (см. [2, 3] и библиографию там). Соотношение (*д*) имеет место для дробной производной Капуто.

Предложение 2 (см. [9]). *Пусть $0 < q \leqslant 1$ и функция $v(t) = g(y(t))$ является дифференцируемой по $y(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и функция $y(t)$ — q-дифференцируемой при $t \neq t_0$ и $y(t) \neq 0$, тогда*

$$\mathcal{D}^q_{t_0} v(t) = g'(y(t))\mathcal{D}^q_{t_0}(y(t)).$$

Здесь $g'(\cdot)$ — частная производная функции $g(\cdot)$.

Дробно-подобный интеграл порядка $0 < q \leqslant 1$ вводится формулой (см. [6])

$$I^q_{t_0} x(t) = \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1} x(s) ds, \quad t > t_0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3 (см. [7]). *Пусть функция $x(t) : (t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ q-дифференцируемая при $0 < q \leqslant 1$. Тогда при всех $t > t_0$ верно соотношение*

$$I^q_{t_0}(\mathcal{D}^q_{t_0} x(t)) = x(t) - x(t_0).$$

2. Физическая интерпретация дробно-подобной производной. Использование в определении 1 предела вместо интеграла, применяемого в определениях дробной производной Римана—Лиувиля, Капуто и др., позволяет дать следующую интерпретацию ДПП. Пусть точка P движется по прямой на $\mathbb{R}_+$ для моментов времени $t_1 = t$ и $t_2 = t + \theta t^{1-q}$, где $\theta > 0$ и $0 < q \leqslant 1$, обозначим $S_1(t_1)$ и $S_2(t_2)$ путь, пройденный точкой P за время t_1 и t_2. Соотношение

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(t + \theta t^{1-q}) - S(t)}{\theta t^{1-q}} = V_{\text{avr}}(t)$$

является q-средней скоростью движения точки P за время θt^{1-q}.

Рассмотрим

$$\lim \frac{S(t + \theta t^{1-q}) - S(t)}{\theta t^{1-q}} \text{ при } \theta \to 0 \text{ и } 0 < q \leqslant 1.$$

При $q = 1$ это обычная мгновенная скорость движения точки P в любой момент $t \in \mathbb{R}_+$. При $0 < q < 1$ это q-мгновенная скорость движения точки P при любом $t > 0$.

Таким образом, физическим смыслом ДПП является q-мгновенная скорость изменения вектора состояния рассматриваемой механической или другой природы системы.

3. Дробно-подобная производная функции Ляпунова. Рассмотрим систему уравнений с ДПП вектора состояния

$$\mathcal{D}^q_{t_0} x(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \geqslant 0$. Далее предполагается, что при $(t_0, x_0) \in \operatorname{int}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ начальная задача (1), (2) имеет решение $x(t, t_0, x_0)$ при всех $t \geqslant t_0$. Кроме того, предполагается, что $f(t, 0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$.

Пусть для уравнений (1) каким-либо способом построена функция $V(t, x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, $V(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ и приведем определение ДПП функции Ляпунова.

Определение 2. Пусть V — непрерывная q-дифференцируемая функция (скалярная или векторная), $V : \mathbb{R}_+ \times B_r \to \mathbb{R}^s$ ($s = 1$ или $s = m$ соответственно) и пусть $x(t, t_0, x_0)$ решение системы (1), которое существует и определено на $\mathbb{R}_+ \times B_r$. Тогда для $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$ выражение

$$\mathcal{D}^q_{t_0} V(t, x) = \limsup \left\{ \frac{V(t + \theta(t - t_0)^{1-q}, x(t + \theta(t - t_0)^{1-q}, t, x) - V(t, x)}{\theta}, \theta \to 0^+ \right\} \tag{3}$$

является верхней ДПП функции Ляпунова.

Определение 3. Если функция $V(t, x)$ вместе с ДПП (3) разрешает задачу об устойчивости (неустойчивости) нулевого решения системы (1), будем называть функцию $V(t, x)$ функцией Ляпунова для дробно-подобной системы (1).

Пример 1. Пусть $t > t_0$, $V(t,x) = V_1(x) = x^2(t), x \in \mathbb{R}$. Тогда согласно формуле (*в*) предложения 1 имеем

$$\mathcal{D}_{t_0}^q V(x(t)) = \mathcal{D}_{t_0}^q (x(t), x(t)) = x(t)\mathcal{D}_{t_0}^q (x(t)) + x(t)\mathcal{D}_{t_0}^q (x(t)) = 2x(t)\mathcal{D}_{t_0}^q (x(t)) \quad (4)$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Пример 2. Пусть $V(t,x) = V_2(x) = x^T x, x \in \mathbb{R}^n$. При этом согласно формуле (в) предложения 1 имеем

$$\mathcal{D}_{t_0}^q (V_2(x(t)) = \mathcal{D}_{t_0}^q (x^T(t)x(t)) = 2x^T(t)\mathcal{D}_{t_0}^q x(t)). \quad (5)$$

Лемма 1. *Для заданных функций* $V = x^2(t),\ x \in \mathbb{R},\ V = x^T(t)x(t),\ x \in \mathbb{R}^n,$ *и* $V = x^T(t)Px(t)$, *где* $P - n \times n$ *— постоянная матрица* и $x \in \mathbb{R}^n$, *верны оценки*

(*а*) ${}_{t_0}^{c}D_t^q(x^2(t)) \leqslant \mathcal{D}_{t_0}^q(x^2(t))$ *при* $x \in \mathbb{R}$;

(*б*) ${}_{t_0}^{c}D_t^q(x^T(t)x(t)) \leqslant \mathcal{D}_{t_0}^q(x^T(t)x(t))$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$;

(*в*) ${}_{t_0}^{c}D_t^q(x^T(t)Px(t)) \leqslant \mathcal{D}_{t_0}^q(x^T(t)Px(t))$, *где* $x \in \mathbb{R}^n$ и $P - n \times n$ *постоянная матрица.*

Здесь ${}_{t_0}^{c}D_t^q(f(t))$ *— дробная производная Капуто* (*см.* [10]).

Доказательство. Из леммы 1 статьи [11] для функции $V_1 = x^2(t)$ следует оценка для дробной производной Капуто в виде

$${}_{t_0}^{c}D_t^q(x^2(t)) \leqslant 2x(t)\,{}_{t_0}^{c}D_t^q(x(t))$$

и аналогично для случая функций $x^T(t)x(t)$ и $x^T(t)P(t)x(t)$. Учитывая это и оценки (4), (5), получаем утверждения (*а*)—(*в*) леммы 1.

Из леммы 1 следует, что ДПП рассматриваемых функций Ляпунова является мажорирующей для дробных производных Капуто этих функций.

4. Условия устойчивости и неустойчивости движения. Определения устойчивости по Ляпунову для дробно-подобной системы (1) остаются такими же, как и для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с дробной производной Капуто (см. [4] и библиографию там).

Предположим, что для дробно-подобной системы (1) построена q-дифференцируемая функция $V(t,x)$, $V(t,0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$ такая, что

(i) $V(t,x) \geqslant a(\|x\|)$;

(ii) $V(t,x) \leqslant b(\|x\|)$,

при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$, где a, b — функции K-класса Хана.

Приведем условия устойчивости состояния $x = 0$ дробно-подобной системы (1).

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *существует* q*-дифференцируемая функция* $V(t,x)$ *и функции* $a, b \in K$*-классу Хана такие, что выполняются условия* (i), (ii) *и, кроме того,*

$$\mathcal{D}_{t_0}^q(V(t,x(t))) \leqslant 0 \text{ при всех } (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r. \quad (6)$$

Тогда состояние $x = 0$ *системы* (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Пусть $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1) при $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R}_+ \times B_r)$ существует при всех $t \geqslant t_0$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $0 < \varepsilon < r$ заданы. В силу условий (i), (ii) теоремы 1 выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что

$$b(\delta) < a(\varepsilon). \tag{7}$$

Покажем, что если $\|x_0\| < \delta$, то $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Если это не верно, то должно существовать решение $x(t, t_0, x_0) = x(t)$ такое, что при $\|x_0\| < \delta$ найдется $t_1 > t_0$, для которого

$$\|x(t_1)\| = \varepsilon, \quad \|x(t)\| < \varepsilon \text{ при всех } t \in [t_0, t_1].$$

В силу предложения 3 и условия (6) теоремы 1 соотношение Ляпунова

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) = I_{t_0}^q(\mathcal{D}_{t_0}^q(V(t, x(t))))$$

принимает вид

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) \leqslant 0. \tag{8}$$

Для $t = t_1$ из неравенства (8) находим

$$a(\varepsilon) \leqslant V(t_1, x(t_1)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant b(\|x_0\|) < a(\varepsilon). \tag{9}$$

Полученное неравенство (9) противоречит условию (7). Этим теорема 1 доказана.

Далее приведем условия асимптотической устойчивости нулевого решения дробно-подобной системы (1).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и вместо условия* (6) *выполняется оценка*

$$\mathcal{D}_{t_0}^q(V(t, x(t))) \leqslant -d(\|x\|) \tag{10}$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$, *где функция* $d \in K$ *-классу Хана. Тогда состояние* $x = 0$ *системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 состояние $x = 0$ системы (1) равномерно устойчиво, так как при этом выполняются условия теоремы 1. Покажем, что состояние $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Пусть $0 < \varepsilon < r$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ выбраны так, как в теореме 1. Для $\varepsilon_0 \leqslant r$ выберем $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) > 0$ и будем рассматривать решение $x(t, t_0, x_0)$ с начальными условиями $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $\|x_0\| < \delta_0$. Пусть при $t_0 < t \leqslant t_0 + T(\varepsilon)$, где $T(\varepsilon) = \left(\dfrac{qb(\delta_0)}{d(\delta(\varepsilon))}\right)^{1/q}$, для решения $x(t)$ выполняется условие $\|x(t)\| \geqslant \delta(\varepsilon)$. Покажем, что при выполнении условий теоремы 2 это невозможно. Действительно, из соотношения Ляпунова имеем

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) = I_{t_0}^q(\mathcal{D}_{t_0}^q(V(t, x(t))) \leqslant$$

$$\leqslant -I_{t_0}^q(d(\|x(t)\|)) = -\int_{t_0}^{t} \frac{d(\|x(s)\|)}{(s - t_0)^{1-q}} ds. \tag{11}$$

Из (11) следует, что

$$V(t,x(t)) \leqslant V(t_0,x_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{d(\|x(s)\|)}{(s-t_0)^{1-q}} ds \leqslant b(\delta_0) - d(\delta(\varepsilon)) \frac{(t-t_0)^q}{q}. \tag{12}$$

При $t = t_0 + T(\varepsilon)$ из неравенства (12) получим оценку

$$0 < a(\delta(\varepsilon)) \leqslant V(t_0+T(\varepsilon), x(t_0+T(\varepsilon))) \leqslant b(\delta_0) - d(\delta(\varepsilon)) \frac{T^q(\varepsilon)}{q} \leqslant 0.$$

Это противоречие показывает, что существует $t_1 \in [t_0, t_0 + T(\varepsilon)]$, для которого $\|x(t_1)\| < \delta(\varepsilon)$. Поэтому верна оценка $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon)$, как только $\|x_0\| < \delta_0$ и $\lim\|x(t)\| = 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Этим теорема 2 доказана.

Далее установим условия неустойчивости состояния $x = 0$ системы (1).

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существует* q*-дифференцируемая ограниченная функция* $V(t,x)$ *такая, что на* $[t_0,\infty)\times G(h)$, *где* $G(h) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h\}$, $G(h) \in B_\varepsilon$, *выполняются условия*:

1) $0 < V(t,x) \leqslant b(\|x\|)$,

2) $\mathcal{D}^q_{t_0} V(t,x) = \lambda V(t,x) + W(t,x)$,

где $\lambda > 0$ *и* $V : [t_0,\infty) \times G(h) \to \mathbb{R}_+$, $W(t,x) \geqslant 0$;

3) состояние $x = 0$ *принадлежит* $\partial G(h)$;

4) $V(t,x) = 0$ на $[t_0,\infty) \times (\partial G(h) \cap B_\varepsilon)$.

Тогда состояние $x = 0$ *неустойчиво.*

Доказательство. Условие *2* теоремы 3 представим в интегральном виде

$$V(x(t)) = V(x(t_0)) \exp\left(\lambda \frac{(t-t_0)^q}{q}\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\lambda \frac{(t-t_0)^q}{q}\right) \times$$
$$\times \exp\left(-\lambda \frac{(s-t_0)^q}{q}\right) (s-t_0)^{q-1} W(x(t))\, ds.$$

Отсюда находим, что для $0 < q \leqslant 1$ верна оценка

$$V(x(t)) \geqslant V(x(t_0)) \exp\left(\lambda \frac{(t-t_0)^q}{q}\right), \quad t \geqslant t_0, \tag{13}$$

так как второе слагаемое положительное в силу условия *2* теоремы 3. Пусть решение $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ выходит из точки $x_0 \in U$ — окрестности начала $x = 0$. Так как для любого $t \geqslant t_0$ выполнима оценка (13) вдоль решения $x(t)$, то ясно, что при $t \to \infty$ функция $V(x(t))$ неограниченно возрастает, в то время как по условиям теоремы 3 она ограничена. Следовательно, для решения $x(t)$ найдется t^* такое, что $x(t^*)$ покинет область B_ε. Этим неустойчивость состояния $x = 0$ системы (1) доказана.

Пример 3. Рассмотрим дробно-подобную систему

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{t_0}^q x(t) = y - xg(t, x, y), \quad x(t_0) = x_0; \\ &\mathcal{D}_{t_0}^q y(t) = -x - yg(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $g(t, x, y)$ разлагается в сходящийся степенной ряд, $g(t, 0, 0) = 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Применив функцию $2V(x, y) = x^2 + y^2$ к системе (14), получим

$$\mathcal{D}_{t_0}^q V(x(t)), \quad y(t)) = -(x^2 + y^2)\, g(t, x, y). \tag{15}$$

Выполнив q-интегрирование равенства (15), получим

$$V(x(t), \quad y(t)) - V(x_0, y_0) \leqslant -r^2 I_{t_0}^q g(s, x(s), y(s)) \tag{16}$$

в области $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ состояния равновесия $x = y = 0$. Из соотношения (16) следует, что:

а) состояние $x = y = 0$ системы (14) устойчиво, если $g(t, x, y) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant t_0$;

б) состояние $x = y = 0$ системы (14) асимптотически устойчиво, если $g(t, x, y) > 0$ в области $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ при всех $t \geqslant t_0$;

в) состояние $x = y = 0$ системы (14) неустойчиво, если $g(t, x, y) < 0$ при всех $t \geqslant t_0$ в сколь угодно малой окрестности.

5. Заключительные замечания. В данной работе приведены теоремы прямого метода Ляпунова на основе ДДП функции Ляпунова. Здесь впервые приведена физическая интерпретация ДДП как q-мгновенной скорости изменения вектора состояния материальной системы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1935. 386 с.
2. Podlybny I. Fractional differential equations. London: Acad. Press, 1999. 368 p.
3. Kilbas A., Srivastava M.H., Trujillo J.J. Theory and application on fractional differential equations. Amsterdam: North Holland, 2006. 540 p.
4. Lakshmikantham V., Leela S., Devi J.V. Theory of fractional dynamic systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publ., 2009. 170 p.
5. Martynyuk A.A. On the stability of a system of equations with fractional derivatives with respect to two measures. *J. Math. Sci.* 2016. **217**, № 4. P. 468—475.
6. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative. *J. Comput. Appl. Math.* 2014. **264**. P. 65—70.
7. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus. *J. Comput. Appl. Math.* 2015. **279**. P. 57—66.
8. Ortigueira M.D., Machado J.A.T. What is a fractional derivative? *J. Comput. Phys.* 2015. **293**. P. 4—13.
9. Pospíšil M., Pospíšilová Škripková L. Sturm's theorems for conformable fractional differential equation. *Math. Commun.* 2016. **21**. P. 273—281.
10. Caputo M. Elasticita e dissipazione. Bologna: Zanichelli, 1969. 150 p.
11. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Liapunov functions for fractional order systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2014. **19**. P. 2951—2957.

Поступило в редакцию 21.12.2017

REFERENCES

1. Lyapunov, A. M. (1935). The general problem of motion stability. Leningrad, Moscow: ONTI (in Russian).
2. Podlybny, I. (1999). Fractional differential equations. London, Acad. Press.
3. Kilbas, A., Srivastava, M.H. & Trujillo, J. J. (2006). Theory and application on fractional differential equations. Amsterdam: North Holland.
4. Lakshmikantham, V., Leela, S. & Devi, J. V. (2009). Theory of fractional dynamic systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publ.
5. Martynyuk, A. A. (2016). On the stability of a system of equations with fractional derivatives with respect to two measures. J. Math. Sci., 217, No. 4, pp. 468-475.
6. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. J. Comput. Appl. Math., 264, pp. 65-70.
7. Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. J. Comput. Appl. Math., 279, pp. 57-66.
8. Ortigueira, M. D. & Machado, J. A. T. (2015). What is a fractional derivative? J. Comput. Phys., 293, pp. 4-13.
9. Pospíšil, M., Pospíšilová Škripková, L. (2016). Sturm's theorems for conformable fractional differential equation. Math. Commun., 21, pp. 273-281.
10. Caputo, M. (1969). Elasticita e dissipazione. Bologna: Zanichelli.
11. Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M. A. & Gallegos, J. A. (2014). Liapunov functions for fractional order systems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 19, pp. 2951-2957.

Received 21.12.2017

А.А. Мартинюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДРОБОВО-ПОДІБНИХ
РІВНЯНЬ ЗБУРЕНОГО РУХУ

Обговорюється застосування дробово-подібної похідні функції Ляпунова для динамічного аналізу рівнянь збуреного руху з дробово-подібною похідною вектора стану. Наведено основні теореми прямого методу Ляпунова для даного класу рівнянь руху.

Ключові слова: *дробово-подібна система рівнянь, метод функцій Ляпунова, стійкість, асимптотична стійкість, нестійкість.*

A.A.Martynyuk

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: center@inmech.kiev.ua

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF FRACTIONAL-LIKE
EQUATIONS OF PERTURBED MOTION

The application of a fractional-like derivative of the Lyapunov function for the dynamic analysis of solutions of the equations of perturbed motion with a fractional-like derivative of the state vector is discussed. The main theorems of the direct Lyapunov method for a given class of equations of motion are presented.

Keywords: *fractional-like system of equations, Lyapunov direct method, stability, asymptotic stability, instability.*