doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.008
УДК 517.956

В.В. Городецький, О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
E-mail: alfaolga1@gmail.com, v.gorodetskiy@chnu.edu.ua

Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних сингулярних рівнянь

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Встановлено розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами нескінченного порядку з початковою умовою, яка є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів у випадку, коли нелокальна багатоточкова умова містить псевдобесселеві оператори.

Ключові слова: *нелокальна багатоточкова за часом задача, еволюційні рівняння, псевдодиференціальний оператор, зліченно-нормований простір.*

Одним із можливих узагальнень задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли умова $u(t,\cdot)|_{t=0}=g$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^{m}\alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k}=g$, де $t_0=0$, $\{t_1,\ldots,t_m\}\subset(0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}\subset\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$ — фіксовані числа (якщо $\alpha_0=1$, $\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому вказана умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо g — узагальнена функція. Нелокальні за часом задачі належать до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Такі задачі виникають у моделюванні багатьох процесів та задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (див., наприклад, [1—9]).

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t+f(A)u(t)=0$, де $f(A)$ — псевдодиференціальний оператор "нескінченного порядку" вигляду $\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$, де $A=F_{B_\nu}^{-1}[aF_{B_\nu}]$, $a=a(\sigma)$ — символ оператора A, F_{B_ν}, $F_{B_\nu}^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Бесселя; $f(A)$ діє в локально опуклому просторі, який є проективною границею певних зліченно-нормованих просторів. При обмеженнях на функції f та a, які узагальнюють відому умову "параболічності" для рівнянь параболічного типу, оператор $f(A)$ подається у вигляді $f(A)=F_{B_\nu}^{-1}[f(a)F_{B_\nu}]$, тобто $f(A)$ також є псевдодиференціальним (псевдобесселевим) оператором з символом $f(a)$. Нелокальна багатоточкова за часом умова для вказаного рівняння також містить псевдобесселеві оператори B_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Встановлено властивості фундаментального розв'язку такої задачі, доведено розв'язність задачі у випадку, коли g є елементом простору основних функцій або простору, топологічно спряженого з ним; знайдено аналітичне зображення розв'язку. Зауважимо, що в працях [10, 11] досліджена нелокальна багатоточкова за часом задача для зазначеного рівняння у випадку, коли відповідна умова не містить псевдобесселеві оператори (тобто, $B_k = I$, $k \in \{1, \ldots, m\}$).

1. Простори основних та узагальнених функцій. Нехай γ — фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \ldots\}$, ν — фіксоване число з множини $\{3/2,\ 5/2,\ 7/2,\ \ldots\}$, $\tilde{p}_0 := 2\nu + 1$, $\tilde{\gamma}_0 := 1 + [\gamma] + \tilde{p}_0$, $M(x) := 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : |D_x^k \varphi(x)| \leqslant c_k (1 + |x|)^{-(\tilde{\gamma}_0 + k)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+\}, \ \Phi = \lim_{p \to \infty} \operatorname{pr} \Phi_p,$$

де Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір відносно норми

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\tilde{\gamma}_0 + k - \varepsilon_0} \, |D_x^k \varphi(x)| \right\}, \quad \varphi \in \Phi_p, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

де $0 < \varepsilon < 1$ — фіксований параметр.

Символом $\overset{\circ}{\Phi}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору Φ з відповідною топологією. Цей простір називатимемо основним, а його елементи — основними функціями. У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, яка відповідає оператору Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu + 1)x^{-1} d/dx$, $\nu > -1/2$:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega}) \sin^{2\nu} \omega \, d\omega, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu + 1) / (\Gamma(1/2)\Gamma(\nu + 1/2))$. Ця операція є нескінченно диференційовною в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [12]. Наслідуючи [13], згортку двох функцій з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi.$$

На функціях з простору $\overset{\circ}{\Phi}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\xi) \equiv F_B[\varphi](\xi) := \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(x\xi) x^{2\nu+1} dx, \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

де j_ν — нормована функція Бесселя. При цьому $F_B[\varphi]$ — парна, обмежена, неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Інші властивості функцій з простору $\overset{\circ}{\Psi} = F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$ наведені в праці [12].

Символом $(\overset{\circ}{\Phi})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $\overset{\circ}{\Phi}$, зі слабкою збіжністю. Елементи з $(\overset{\circ}{\Phi})'$ називатимемо узагальненими функціями. У просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, тому згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{\Phi})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) \rangle \equiv \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle, \quad \varphi \in \overset{\circ}{\Phi},$$

при цьому $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, оскільки операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ [12] (тут $\langle f_\xi, T_x^\xi\varphi(x)\rangle$ позначає дію функціонала f на $T_x^\xi\varphi(x)$ як функцію аргументу ξ).

Оскільки $F_B^{-1}[\varphi]\in\overset{\circ}{\Phi}$, якщо $\varphi\in\overset{\circ}{\Psi}$, то перетворення Бесселя узагальненої функції $f\in(\overset{\circ}{\Phi})'$ визначимо так: $\langle F_B[f],\varphi\rangle=\langle f, F_B^{-1}[\varphi]\rangle, \quad \forall\varphi\in\overset{\circ}{\Psi}$. Із властивостей лінійності й неперервності функціонала f та перетворення Бесселя (прямого та оберненого) випливає лінійність і неперервність функціонала $F_B[f]$, визначеного на просторі основних функцій $F_B[\overset{\circ}{\Phi}]$.

Якщо $f\in(\overset{\circ}{\Phi})'$, $f*\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$, $\forall\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$, та із співвідношення $\varphi_j\to 0$ при $j\to\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$ випливає співвідношення $f*\varphi_j\to 0$ при $j\to\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{\Phi}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$. Надалі клас усіх згортувачів у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$ позначатимемо символом $(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$. В [14] доведено, що якщо $f\in(\overset{\circ}{\Phi}_*)'$, то для довільної функції $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$ правильною є формула $F_B[f*\varphi]=F_B[f]\cdot F_B[\varphi]$, при цьому $F_B[f]$ — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$.

Нехай $a:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку γ, тобто $a(\lambda x)=\lambda^\gamma a(x)$, $\lambda>0$, яка:

1) нескінченно диференційовна при $x\neq 0$;

2) її похідні задовольняють умову

$\forall k\in\mathbb{N}\quad \exists c_k>0\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:\ |D_x^k a(x)|\leqslant c_k|x|^{\gamma-k}$;

3) існують сталі c_0', $\tilde{c}_0>0$, $\tilde{\delta}\geqslant\gamma$ такі, що

$c_0'|x|^\gamma\leqslant a(x)\leqslant\tilde{c}_0(1+|x|^{\tilde{\delta}}),\quad \tilde{c}_0\geqslant c_0',\quad x\in\mathbb{R}$

(прикладом такої функції може служити функція $a(x)=|x|^\gamma$).

Виділимо клас нескінченно диференційовних функцій $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$, $x\in\mathbb{R}$, за допомогою яких можна будувати псевдобесселеві оператори нескінченного порядку вигляду $f(A)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kA^k$, де $A=F_B^{-1}[aF_B]$ — псевдобесселевий оператор, побудований за функцією-символом a. При цьому вважатимемо, що оператор $f(A)$ визначений коректно в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, якщо для кожної основної функції $\varphi\in\overset{\circ}{\Phi}$ ряд

$$(f(A)\varphi)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(A^k\varphi)(x)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{\circ}{\Phi}$. Наслідуючи [15], припустимо, що функція f допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умови:

(а) $\forall k\in\mathbb{Z}_+\ \exists p_k>0\ \exists b_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\ |D_x^kf(x)|\leqslant b_k(1+|x|)^{p_k}$;

(б) $\tilde{p}_0{}'<\dfrac{[\gamma]+\nu+3/2-\Delta_0}{\tilde{\delta}([\gamma]+\nu+3/2)}$, $\Delta_0\in(0,1)$ — фіксований параметр, $\tilde{p}_0{}'=\max\{p_0,p_1,\ldots,p_{\tilde{s}}\}$, p_0, $p_1,\ldots,p_{\tilde{s}}$ — сталі з умови (а), $\tilde{s}=\nu+3/2+[\gamma]\in\mathbb{N}$, $\tilde{\delta}$ — стала з умови 3;

(в) $\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>0\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}:\ |f(z)|\leqslant c_\varepsilon(1+|x|)^{p_0}\exp\{\varepsilon|y|^{1/[\tilde{\delta}]}\}$, p_0 — стала з умови (а), $[\tilde{\delta}]$ — ціла частина числа $\tilde{\delta}$;

(г) $\exists\beta_0>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geqslant\beta_0|x|$.

У праці [15] встановлено, що з виконанням вказаних умов оператор $f(A)$ визначений коректно, є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, при цьому $f(A)=F_B^{-1}[f(a)F_B]$.

2. Нелокальна багатоточкова за часом задача. Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u}{dt}+f(A)u=0,\quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}_+\equiv\Omega, \tag{1}$$

де $f(A)$ — оператор, побудований у п. 1, розглянемо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0}-\sum_{k=1}^{m}\mu_k B_k u(t,\cdot)|_{t=t_k}=\varphi,\quad \varphi\in\overset{\circ}{\Phi}, \tag{2}$$

де $m\in\mathbb{N}$, $\{\mu,\mu_1,\ldots,\mu_m\}\subset(0,+\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\}\subset(0,T]$ — фіксовані параметри, $t_1<t_2<\ldots<t_m\leqslant T$, $B_1,\ldots,B_m$ — псевдобесселеві оператори, побудовані за функціями $b_1,\ldots,b_m$ відповідно, які задовольняють умови, аналогічні умовам 1—3 з п. 1, а саме $b_k:\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $k\in\{1,\ldots,m\}$, — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, нескінченно диференційовні при $x\neq 0$, однорідні порядку $\beta_k>1$ відповідно, $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_m<\gamma$ ($\gamma>1$ — порядок однорідності функції a) такі, що:

1′) $\forall k\in\{1,\ldots,m\}$ $\forall s\in\mathbb{N}$ $\exists d_{ks}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:|D_x^s b_k(x)|\leqslant d_{ks}|x|^{\beta_k-s}$;

2′) $\forall k\in\{1,\ldots,m\}$ $\exists\alpha_k,\tilde{\alpha}_k>0$ $\tilde{\alpha}_k\geqslant\alpha_k$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$: $\alpha_k|x|^{\beta_k}\leqslant b_k(x)\leqslant\tilde{\alpha}_k|x|^{\beta_k}$.

Із наведених обмежень випливає, що функції $b_1,\ldots,b_m$ є мультиплікаторами в просторі $\overset{\circ}{\Phi}$, а $B_1,\ldots,B_m$ — лінійні неперервні оператори в цьому просторі. Вважаємо також, що

$$\mu>\Lambda\sum_{k=1}^{m}\mu_k,\quad \Lambda=\max\{1,L_1,\ldots,L_m,\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_m\},\quad L_k=\frac{\tilde{\lambda}_k}{\beta_0 c_0' t_k},\quad k\in\{1,\ldots,m\},$$

де c_0' — стала з умови 3, а β_0 — стала з умови 2 з п. 1.

За допомогою перетворення Бесселя знаходимо, що класичний розв'язок $u\in C^1((0,T],\overset{\circ}{\Phi})$ задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t,x)=\int_0^\infty T_x^\xi G(t,x)\varphi(\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi=G(t,x)*\varphi(x),\quad (t,x)\in\Omega,$$

де $G(t,x):=F_B^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\sigma)=\exp\{-tf(a(\sigma))\}\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\right)^{-1}.$$

Зауважимо, що із обмежень на функції a, f, $b_1,\ldots,b_m$ випливають нерівності: якщо $\sigma\geqslant 1$, то

$$b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\leqslant\frac{b_k(\sigma)}{\beta_0 t_k a(\sigma)}\leqslant\frac{\alpha_k|\sigma|^\gamma}{\beta_0 t_k c_0'|\sigma|^\gamma}=\frac{\tilde{\alpha}_k}{\beta_0 t_k c_0'}\equiv L_k\leqslant\Lambda,\quad k\in\{1,\ldots,m\};$$

якщо $0<\sigma<1$, то $b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}\leqslant b_k(\sigma)\leqslant\tilde{\alpha}_k|\sigma|^{\beta_k}\leqslant\tilde{\alpha}_k\leqslant\Lambda$.

Отже,

$$\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k b_k(\sigma)\exp\{-t_k f(a(\sigma))\}>\mu-\Lambda\sum_{k=1}^{m}\mu_k>0,\quad \sigma\in(0,\infty).$$

У точці $\sigma = 0$ маємо $\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(0) e^{-t_k f(a(0))} = \mu > 0.$ Тоді

$$\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) \exp\{-t_k f(a(\sigma))\} \right)^{-1} > 0, \quad \sigma \in [0, +\infty),$$

при цьому

$$\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} = \mu \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} \right),$$

$$\frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} \leqslant \frac{\Lambda}{\mu} \sum_{k=1}^{m} \mu_k < 1, \quad \sigma \geqslant 0.$$

Скориставшись останньою нерівністю та поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} \right)^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left(\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k(\sigma) e^{-t_k f(a(\sigma))} \right)^{r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \ldots r_m!} (\mu_1 b_1(\sigma) e^{-t_1 f(a(\sigma))})^{r_1} \ldots (\mu_m b_m(\sigma) e^{-t_m f(a(\sigma))})^{r_m} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m}}{r_1! \ldots r_m!} b_1^{r_1}(\sigma) \ldots b_m^{r_m}(\sigma) e^{-(t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m) f(a(\sigma))}.$$

Звідси дістаємо зображення для функції G:

$$G(t, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1 + \ldots + r_m = r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \ldots \mu_m^{r_m}}{r_1! \ldots r_m!} \tilde{G}(\lambda + t, x),$$

де

$$\tilde{G}(\lambda + t, x) = c_\nu \int_0^\infty b_1^{r_1}(\sigma) \ldots b_m^{r_m}(\sigma) e^{-(\lambda + t) f(a(\sigma))} j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu + 1} d\sigma,$$

$\lambda := t_1 r_1 + \ldots + t_m r_m$, $\tilde{G}(t, x)$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1), для якого правильними є такі оцінки, отримані в [15]:

$$| D_x^s \tilde{G}(t, x) | \leqslant \alpha_s t^{-\omega_s / \gamma} (1 + |x|)^{-(s + \gamma_0)}, \quad s \in \mathbb{N},$$

де $\omega_s = (\tilde{\delta} \tilde{p}_s + \gamma) m_s$, $m_s = \nu + 3/2 + [\gamma] + s$, $\tilde{\delta} \geqslant \gamma$ — стала з умови 3 з п. 1, $\tilde{p}_s = \max\{p_1, \ldots, p_{m_s}\}$, $p_1, \ldots, p_{m_s}$ — сталі з умови (а), $\alpha_s > 0$ не залежить від t. Скориставшись властивостями функцій f, a, $b_1, \ldots, b_m$, встановлюємо, що $G(t, x)$ є неперервно диференційовною на проміжку $(0, T]$ функцією (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$) і нескінченно диференційовною функцією аргументу x (при фіксованому $t \in (0, T]$). Оцінки функції G та її похідних за аргументом x (з виділеною при цьому залежністю від параметра t) даються в нижченаведеному твердженні.

Лема 1. *Для функції $G(t,x)$ та її похідних (за змінною x) правильними є оцінки*

$$|D_x^s G(t,x)| \leqslant c_s t^{-(s+q)/\gamma}(1+|x|)^{-(\gamma_0+s)}, \quad t\in(0,T^*], \quad T^* = \min\{1,T\}, \tag{3}$$

$x\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $\gamma_0 = 2\nu+2+[\gamma]$, $q=\omega_\alpha+(\gamma+\omega_\alpha)\alpha-[\gamma]$, $\alpha=\nu+3/2+[\gamma]$,

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \tilde{\delta}\tilde{b}_\alpha\cdot\alpha+\alpha\gamma, & \text{якщо} \quad |\sigma|\geqslant 1, \\ \gamma, & \text{якщо} \quad |\sigma|<1, \quad \sigma\neq 0, \end{cases}$$

$\tilde{b}_\alpha = \max\{p_1,\dots,p_\alpha\}$, *де* $p_1,\dots,p_\alpha$ *— сталі з умови* (а), $\tilde{\delta}\geqslant\gamma$ *— стала з умови* 3, *стала* $c_s>0$ *не залежить від* t.

Зауваження 1. Із оцінок (3) похідних функції G випливає, що при кожному $t\in(0,T]$ функція G, як функція аргументу x, є елементом простору $\mathring{\Phi}$.

Лема 2. *Правильними є твердження.*

1. Функція $G(t,\cdot)$, $t\in(0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\mathring{\Phi}$, диференційовна за t.

2. $\dfrac{\partial}{\partial t}(g*G(t,\cdot)) = g*\dfrac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t}$, $\forall g\in(\mathring{\Phi})'$.

3. У просторі $(\mathring{\Phi})'$ справджуються граничні співвідношення:

а) $\mu\lim\limits_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \lim\limits_{t\to t_k} B_k G(t,\cdot) = \delta$;

б) $\mu\lim\limits_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum\limits_{k=1}^m \mu_k \lim\limits_{t\to t_k} B_k \omega(t,\cdot) = g$,

де $\omega(t,x) = g*G(t,x)$, $g\in(\mathring{\Phi}_*)'$, $(t,x)\in\Omega$.

4. Функція $G(t,\cdot)$ задовольняє рівняння (1).

Із твердження *3 б* леми 2 дістаємо, що для рівняння (1) нелокальну m-точкову за часом задачу можна ставити так. Знайти функцію $u(t,\cdot)\in C^1((0,T],\mathring{\Phi})$, яка є розв'язком рівняння (1) і задовольняє умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = g, \quad g\in(\mathring{\Phi}_*)', \tag{4}$$

у тому сенсі, що

$$\mu\lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t\to t_k} B_k u(t,\cdot) = g, \quad g\in(\mathring{\Phi}_*)',$$

де границі розглядаються в просторі $(\mathring{\Phi})'$ (параметри μ, $\mu_1,\dots,\mu_m$, $t_1,\dots,t_m$, задовольняють умови, сформульовані раніше). Основний результат містить таке твердження.

Теорема. *Задача* (1), (4) *є коректно розв'язною, розв'язок зображується у вигляді* $u(t,x) = g*G(t,x)$, $(t,x)\in\Omega$, $u(t,\cdot)\in\mathring{\Phi}$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва: Высш., шк., 1995. 301 с.
2. Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения. *Журн. вычисл. матем. и мат. физики*. 1998. **38**, № 6. С. 885—902.
3. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. Москва: Наука, 1980. 208 с.
4. Романко В.К. Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов. *Дифференц. уравнения*. 1974. **10**, № 11. С. 117—131.
5. Романко В.К. Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений. *Матем. заметки*. 1985. **37**, № 7. С. 727—733.
6. Макаров А.А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения*. 1994. **30**, № 1. С. 144—150.
7. Чесалин В.И. Задача с нелокальными граничными условиями для некоторых абстрактных гиперболических уравнений. *Дифференц. уравнения*. 1979. **15**, № 11. С. 2104—2106.
8. Ильків В.С., Пташник Б.И. Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными. *Сиб. мат. журн*. 2005. **46**, № 11. С. 119—129.
9. Chabrouski J. On the non-local problems with a functional for parabolic equation. *Funckcialaj Ekvacioj*. 1984. **27**. P. 101—123.
10. Городецький В.В., Тодоріко Т.С. Дослідження властивостей розв'язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу сингулярних еволюційних рівнянь. *Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. Математика: зб. наук. пр.* 2011. **1**, № 4. С. 29—35.
11. Кулик Т.С., Мироник В.І. Багатоточкова задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу. *Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. Математика: зб. наук. пр.* 2011. **1**, № 3. С. 49—57.
12. Городецький В.В., Ленюк О.М. Перетворення Фур'є-Бесселя одного класу нескінченно диференційовних функцій. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр.* Чернівці: Прут, 2007. Вип. 15. С. 51—66.
13. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя. *Матем. сб.* 1955. **36**, № 2. С. 299—310.
14. Ленюк О.М. Перетворення Бесселя одного класу узагальнених функцій типу розподілів. *Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. Математика: зб. наук. пр.* 2007. Вип. 336—337. С. 95—102.
15. Городецкий В.В., Мироник В.И. Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. I. *Дифференц. уравнения*. 2010. **46**, № 3. С. 349—363.

Надійшло до редакції 19.12.2017

REFERENCES

1. Nahushev, A. M. (1995). The equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaya shkola (in Russian).
2. Belavin, I. A., Kapitsa, S. P. & Kurdyumov, S. P. (1998). The mathematical model of global demographic proccesses with considering of space distribution. Zhurn. vychisl. matem. mat. fiz., 38, No. 6, pp. 885-902 (in Russian).
3. Dezin, A. A. (1980). General questions of the theory of boundary-value problems. Moscow: Nauka (in Russian).
4. Romanko, V. K. (1974). Boundary-value problems for one class of differential operators. Differents. uravneniya, 10, No. 11, pp. 117-131 (in Russian).
5. Romanko, V. K. (1985). Nonlocal boundary value problems for certain systems of equations. Matem. zametki, 37, No. 7, pp. 727-733 (in Russian).
6. Makarov, A. A. (1994). The existence of a correct two-point boundary-value problem in a layer for systems of pseudodifferential equations. Differents. uravneniya, 30, No. 1, pp. 144-150 (in Russian).
7. Chesalin, V. I. (1979). The problem with nonlocal boundary conditions for some abstract hyperbolic equations. Differents. uravneniya, 15, No. 11, pp. 2104-2106 (in Russian).
8. Il'kiv, V. S. & Ptashnyk, B. I. (2005). A nonlocal two-point problem for systems of partial differential equations. Sibir. mat. zhurn., 46, No. 11, pp. 119-129 (in Russian).

9. Chabrouski, J. (1984). On the non-local problems with a functional for parabolic equation. Funckcialaj Ekvacioj, 27, pp. 101-123.
10. Gorodetskii, V. V. & Todoriko, T. S. (2011). Investigation of the properties of solutions of a nonlocal multipoint for a time problem for a class of singular evolutionary equations. Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ser. Math., 1, No. 4, pp. 29-35 (in Ukrainian).
11. Kulyk, T.S. & Myronyk, V.I. (2011). Multipoint problem for a class of evolutionary pseudodifferential equations of a parabolic type. Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ser. Math. 1, No. 3, pp. 49-57 (in Ukrainian).
12. Gorodetskii, V.V. & Lenyuk, O.M. (2007). Fourier-Bessel transform for one class of infinitely differential functions. Boundary problems for differential equations: Collection of sciences. Chernivtsi: Prut. Iss. 15, pp. 51-66 (in Ukrainian).
13. Zhytomyrskiy, Ya.I. (1955). The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with a differential Bessel operator. Matem. sb., 36, No. 2, pp. 299-310 (in Russian).
14. Lenyuk, O.M. (2007). Bessel transformation of a class of generalized functions of distribution type. Scientific Herald of Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ser. Math., Iss. 336-337, pp. 95-102 (in Ukrainian).
15. Gorodetskii, V.V. & Myronyk, V.I. (2010). A two-point problem for a class of evolutionary equations. I. Differents. uravneniya, 46, No. 3, pp. 349-363 (in Russian).

Received 19.12.2017

В.В. Городецкий, О.В. Мартынюк

Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича
E-mail: alfaolga1@gmail.com, v.gorodetskiy@chnu.edu.ua

НЕЛОКАЛЬНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Установлена разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с псевдобесселевыми операторами бесконечного порядка с начальным условием, являющимся элементом пространства обобщенных функций типа распределений в случае, когда нелокальное многоточечное условие содержит псевдобесселевые операторы.

Ключевые слова: *нелокальная многоточечная по времени задача, эволюционные уравнения, псевдодифференциальный оператор, счетно-нормированное пространство.*

V.V. Gorodetskii, O.V. Martynyuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
E-mail: alfaolga1@gmail.com, v.gorodetskiy@chnu.edu.ua

A NONLOCAL PROBLEM MULTIPOINT BY TIME
FOR ONE CLASS OF EVOLUTIONARY SINGULAR EQUATIONS

The solvability of a nonlocal problem multipoint by time for evolutionary equations with pseudo-Bessel infinite-order operators with an initial condition that is an element of the space of generalized functions of the distribution type is established in the case where the nonlocal multipoint condition contains pseudo-Bessel operators.

Keywords: *nonlocal problem multipoint by time, evolutionary equations, pseudodifferential operator, countably normed space.*