

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.04.016>
УДК 517.58/.5892

В.А. Богаенко, В.М. Булавацкий

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев
E-mail: sevab@ukr.net, v_bulav@ukr.net

Компьютерное моделирование дробно-дифференциальной динамики некоторых фильтрационно-консолидационных процессов

Представлено академиком НАН Украины А.А. Чикрием

В рамках моделей, базирующихся на понятии дробной производной Капуто—Фабрицио, выполнено компьютерное моделирование дробно-дифференциальной фильтрационно-консолидационной динамики насыщенных солевыми растворами грунтовых массивов. Разработана методика получения численного решения соответствующих краевых задач для систем дробно-дифференциальных уравнений фильтрации и солепереноса. Изложен подход к распараллеливанию вычислительного процесса, приведены результаты численных экспериментов по моделированию динамики изучаемого процесса.

Ключевые слова: динамика фильтрационно-консолидационных процессов, математическое и компьютерное моделирование, дробно-дифференциальные математические модели, краевые задачи, конечно-разностные решения, распараллеливание вычислений.

Теоретическому исследованию и математическому моделированию динамики процессов консолидации грунтовых массивов в процессе фильтрации как чистой воды, так и солевых растворов посвящено столь большое число публикаций, что даже поверхностный их обзор невозможен в рамках настоящего сообщения. Поэтому особо отметим лишь широко известные монографии по теории консолидации грунтов [1–3] и по математическому моделированию консолидации грунтов в процессе фильтрации солевых растворов [4, 5].

В сложных условиях протекания фильтрационно-консолидационных процессов существенное влияние на их динамику могут иметь, в частности, эффекты памяти и пространственных корреляций, учет которых в рамках классического подхода затруднителен. Эффективный подход в описании процессов переноса в системах для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств, связан с использованием аппарата интегро-дифференцирования нецелого порядка [6]. Так, например, в работе [7] построена математическая модель, описывающая дробно-дифференциальную консолидационную динамику насыщенную солевым раствором грунтовой среды, базирующаяся на системе уравнений с дробными производными Капуто—Герасимова. Ряд других математических моделей, описывающих дробно-дифференциальную консолидационную динамику насыщенных

солевыми растворами пористых сред изложен в [8–10]. При этом наличие сингулярных ядер в уравнениях моделей с дробными производными Капуто–Герасимова определенным образом затрудняет, как физическую интерпретацию получаемых решений, так и способствует неоправданному усложнению алгоритмов численной реализации решений. В значительной мере лишенным указанных недостатков представляется предложенный в [11, 12] подход согласно которому моделирование фильтрационной динамики в пористых средах выполняется в рамках дробно-дифференциальных моделей с несингулярным ядром (в частности с использованием понятия производной Капуто–Фабрицио [13]). Ниже аналогичный подход применяется при моделировании дробно-дифференциальной консолидационной динамики насыщенных солевыми растворами грунтовых сред. В рамках соответствующих математических моделей получены численные решения фильтрационно-консолидационных задач, как без учета свойства ползучести грунтового скелета уплотняемого массива, так и с учетом указанного свойства. Приведены результаты компьютерного моделирования динамики изучаемого процесса. Обсуждаются некоторые аспекты распараллеливания вычислений.

Методика численного моделирования дробно-дифференциальной консолидационной динамики насыщенного солевым раствором массива конечной мощности. Аналогично [7] может быть построена и модель дробно-дифференциальной консолидационной динамики насыщенного солевым раствором массива, основанная на системе уравнений с несингулярными ядрами вида

$${}^{CF}D_t^\alpha H(x, t) = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (1)$$

$$\sigma {}^{CF}D_t^{\alpha_*} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (2)$$

где $H = p/\gamma$ – избыточный напор; $p = p(x, t)$ – поровое давление; γ – удельный вес жидкости; C – концентрация солей в жидкой фазе; d – коэффициент конвективной диффузии; σ – пористость среды; $u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial x} \equiv v_x$ – скорость фильтрационного потока (v – коэффициент осмоса; $u > 0$ – известный действительный параметр); $\mu = vC_v/k$, k – коэффициент фильтрации; C_v – коэффициент консолидации [1, 2]; ${}^{CF}D_t^\alpha u(t)$ – производная порядка α от функции $u(t)$ по переменной t в смысле определения Капуто и Фабрицио [13].

В рамках данной модели исследование динамики консолидационного процесса в насыщенном солевым раствором грунтовой среде в случае массива единичной мощности, расположенного на непроницаемом основании, сводится к решению в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ краевой задачи для системы уравнений (1), (2) при следующих условиях (не нарушая общности предположим, что начальные значения избыточных напоров в массиве и граничные значения концентрации солей на входе фильтрационного потока равны 1):

$$H(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} H(1, t) = 0, \quad H(x, 0) = 1, \quad (3)$$

$$C(0, t) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} C(1, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Кратко изложим конечно-разностную методику построения приближенного решения краевой задачи (1) (4). Вводя в рассмотрение сеточную область $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih \ (i = 0, m+1), t_j = j\tau \ (j = 0, n)\}$ (h, τ — шаги сетки по геометрической переменной и времени соответственно), на основе линеаризованной монотонной разностной схемы А.А. Самарского [14] поставим в соответствие рассматриваемой задаче систему разностных уравнений, записываемую в стандартных обозначениях в виде

$$\Delta_t^{(\alpha)} H = C_v \hat{H}_{\bar{x}\bar{x}} - \mu \hat{C}_{\bar{x}\bar{x}} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (5)$$

$$\sigma \Delta_t^{(\alpha_*)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}\bar{x}} + v^+ \hat{C}_x + v^- \hat{C}_{\bar{x}} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (6)$$

где $\chi = \frac{d}{R}$, $R = 1 + \frac{h|v|}{2d}$, $v^\pm = \frac{1}{2}(v \pm |v|)$, $v = uH_x - vC_x$.

При этом в соотношениях (5), (6) оператор $\Delta_t^{(\alpha)}$ обозначает дискретный аналог дробной производной Капуто—Фабрицио порядка α , определяемый соотношением

$$\Delta_t^{(\alpha)} u = c_\alpha \sum_{k=0}^j \omega_k^{(j)} u_{t,k}, \quad (7)$$

где $u_{t,k} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau}$, $c_\alpha = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-b_\alpha \tau})$, $\omega_k^{(j)} = e^{-b_\alpha(j-k)\tau}$, $b_\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Отметим, что в классе достаточно гладких функций справедливо соотношение ${}^{CF}D_t^\alpha u = \Delta_t^{(\alpha)} u + O(\tau)$.

Расписывая в соотношениях (5), (6) соответствующие разностные операторы с учетом (7) и приводя подобные члены, сводим задачу к решению следующих систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$AH_{i-1}^{j+1} - SH_i^{j+1} + AH_{i+1}^{j+1} = F_i^j \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{0, n}), \quad (8)$$

$$\tilde{A}_i^j C_{i-1}^{j+1} - \tilde{S}_i^j C_i^{j+1} + \tilde{B}_i^j C_{i+1}^{j+1} = \tilde{F}_i^j \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{0, n}), \quad (9)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_v}{c_\alpha h^2}, \quad S = \frac{1}{\tau} + 2A, \quad F_i^j = \sum_{k=0}^{j-1} \omega_k^{(j)} \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau} + \frac{\mu}{c_\alpha h^2} (C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}) - \frac{H_i^j}{\tau}, \\ \tilde{A}_i^j &= \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_i^j}{h} - (v^-)_i^j \right), \quad \tilde{B}_i^j = \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_i^j}{h} + (v^+)_i^j \right), \quad \tilde{S}_i^j = \frac{\sigma c_{\alpha_*}^*}{\tau} + \tilde{A}_i^j + \tilde{B}_i^j, \\ \tilde{F}_i^j &= \sigma c_{\alpha_*}^* \left(\sum_{k=0}^{j-1} \omega_k^{(j)} \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau} - \frac{C_i^j}{\tau} \right), \\ c_{\alpha_*}^* &= \frac{1}{\alpha_*} (1 - e^{-b_{\alpha_*}^* \tau}), \quad b_{\alpha_*}^* = \frac{\alpha_*}{1 - \alpha_*}, \quad \tilde{\omega}_k^{(j)} = e^{-b_{\alpha_*}^*(j-k)\tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

Разностные уравнения систем (8), (9) трехточечные и эффективно решаются методом прогонки [14]. Устойчивость метода прогонки вытекает из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем алгебраических уравнений.

Распараллеливание вычислений на графических процессорах. Вычислительная сложность определения значений коэффициентов трехдиагональных СЛАУ (8) и (9), получаемых в результате дискретизации задачи, линейно зависит от номера шага по времени, что обуславливает необходимость использования параллельных вычислений при решении рассматриваемых задач на больших временных промежутках.

В этом случае эффективным является использование графических процессоров (GPU), так как большая часть времени при решении задачи тратится на независимые операции определения значений векторов правых частей СЛАУ. Эти операции выполняются при отсутствии общего доступа к памяти и их эффективной реализацией является схема, в которой один поток обрабатывает один элемент вектора без объединения потоков в группы.

Для решения трехдиагональных СЛАУ была использована реализация GPU-алгоритма параллельной циклической редукции, описанная в [15]. При решении СЛАУ с использованием центрального процессора (CPU) применялся алгоритм метода прогонки.

Время проведения вычислений параллельным алгоритмом на j -м шаге по времени без учёта обменов данными между памятью центрального и графического процессоров можно оценить следующим образом:

$$T_1(N, j) = k_1(10 + 2\log_2 \frac{N}{2}) + k_2(N/P)(k_3 + k_4j + k_5 \log_2 \frac{N}{2}), \quad (11)$$

где k_1 — время, тратящееся на вспомогательные операции по запуску GPU-ядер (kernel); k_2 — коэффициент быстродействия GPU; k_3 — коэффициент сложности операций вычисления значений элементов матриц СЛАУ; k_4 — коэффициент сложности вычисления значений вектора правой части СЛАУ; k_5 — коэффициент сложности проведения вычислений на одной итерации алгоритма параллельной циклической редукции; P — количество скалярных процессоров на GPU; N — количество узлов сетки.

Алгоритмы для GPU были программно реализованы с использованием технологии OpenCL. Вычислительные эксперименты по решению задач разной размерности используя CPU и GPU проводились на одном узле кластера СКИТ-4 Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

На рис.1 приведено фактическое время t работы для GPU-алгоритма (кривые 1–3) и его оценка (кривые 1'–3') на временных шагах j в зависимости от размера сетки (1, 1' — $N = 50000$; 2, 2' — $N = 25000$; 3, 3' — $N = 10000$).

Время работы GPU-алгоритма оценивалось для $P = 1000$. Полученные результаты тестирования показывают адекватность оценки (11). Ускорение вычислений на одном шаге по времени при этом линейно возрастает с увеличением номера шага, что обуславливает высокую эффективность использования GPU при моделировании рассматриваемых процессов на больших временных интервалах. Анализ суммарного ускорения при проведении вычислений на 600 шагах по времени показывает, что время, затрачиваемое GPU-алгоритмом на вспомогательные операции, значительно снижает его быстродействие на небольших сетках. При увеличении размера сетки ускорение становится постоян-

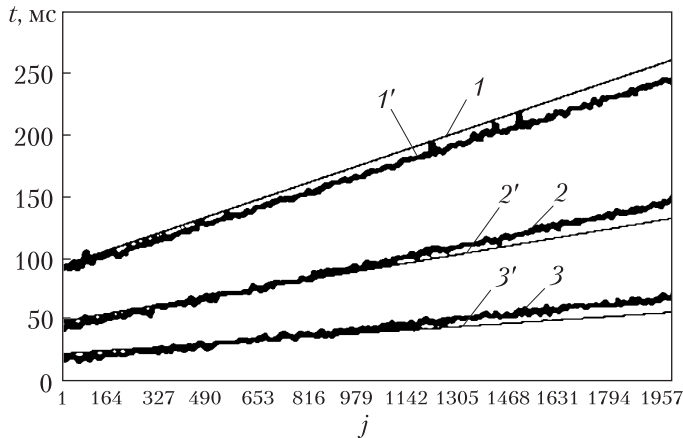


Рис. 1. Время работы GPU-алгоритма

при $\alpha_* = \alpha = 0,85$ для различных значений безразмерной переменной t ($1 - t = 0,1$; $2 - t = 0,3$; $3 - t = 0,5$; $4 - t = 0,6$; $5 - t = 0,7$). На рис. 3 показана соответствующая динамика полей концентраций. Графики напорной функции в фиксированный момент времени $t = 0,05$ для различных порядков дробной производной ($1 - \alpha = 1$; $2 - \alpha = 0,9$; $3 - \alpha = 0,9$; $4 - \alpha = 0,7$; $5 - \alpha = 0,6$; $\alpha_* = \alpha$) представлены на рис.4.

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать следующие выводы об особенностях динамики полей давлений и концентраций в процессе консолидации массивов насыщенных солевыми растворами.

В рамках рассматриваемой математической модели с течением времени наблюдаются явления рассеивания первоначального избыточного порового давления (см. рис. 2) а также возрастания концентрации солей в поровом растворе (см. рис. 3), что адекватно отображает известную [4, 5] физическую картину динамики процесса консолидации насыщенных солевыми растворами пористых сред.

Уменьшение значений порядков дробных производных α, α_* приводит к ускорению процесса рассеивания полей избыточных напоров в массиве (рис. 4) и к ускоренному возрастанию концентрации солевого раствора в точках фильтрационной области по сравнению с описанием динамики процесса в рамках общепринятой [4, 5] математической модели (соответствующей случаю $\alpha = \alpha_* = 1$).

Таким образом, ускорение динамики моделируемых процессов в рамках рассматриваемой неклассической математической модели фильтрационной консолидации свидетельствует о том, что данная модель описывает указанные процессы в супердиффузионном приближении.

Моделирование дробно-дифференциальной консолидационной динамики насыщенных солевыми растворами массивов в условиях учета фактора ползучести.

В соответствии с теорией наследственной линейной ползучести скорость изменения коэффициента пористости во времени можно представить в виде [1–3]

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_0 \frac{\partial p}{\partial t} + a_1 \gamma_1 \int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau. \tag{11}$$

ным и зависит только от количества и быстродействия скалярных процессоров GPU.

Результаты численных экспериментов по моделированию динамики консолидационного процесса. Некоторые из результатов численного моделирования динамики полей избыточных напоров и полей концентраций в рамках рассматриваемой математической модели (для входных данных из работы [4]) графически изображены на рис. 2–4. На рис.2 представлены графики напорной функции

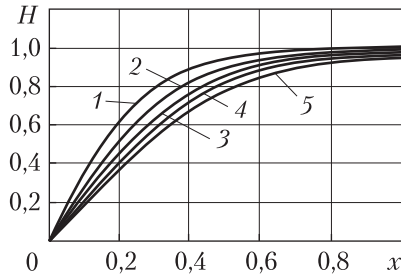


Рис. 2

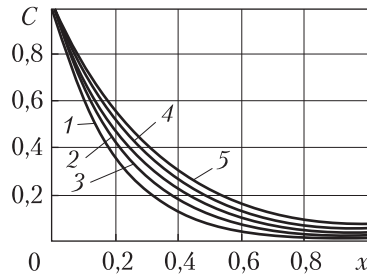


Рис. 3

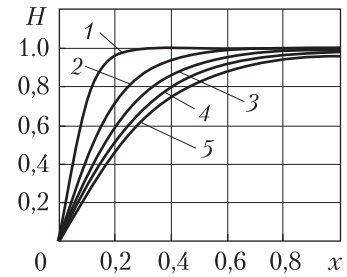


Рис. 4

где $e(t)$ – коэффициент пористости грунта; a_0 – параметр мгновенной деформации; a_1 , γ_1 – параметры ползучести (γ_1 – скорость нарастания деформаций ползучести [1, 2]).

Согласно [1–3] основное уравнение консолидации трехфазной среды в одномерном случае записывается в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \beta(1 + \bar{e}) \frac{\partial p}{\partial t} - (1 + \bar{e}) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

где β – коэффициент объемной сжимаемости газовой компоненты; \bar{e} – среднее значение коэффициента пористости; u_x – скорость фильтрации.

Тогда из соотношения (12) с учетом (11) в предположениях основной расчетной модели В.А. Флорина [1] получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a_1 \gamma_1}{a_0 + \beta(1 + \bar{e})} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \tau} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (13) – это основное определяющее уравнение для напора в рассматриваемой дробно-дифференциальной математической модели консолидации грунтовых сред с учетом осмотических явлений и фактора ползучести скелета. Вводя обозначения $\gamma_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\zeta_\alpha = \frac{a_1 \alpha}{a_0 + \beta(1 + \bar{e})}$ ($0 < \alpha < 1$), перепишем (13) в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \zeta_\alpha {}^{CF}D_t^\alpha H(x, t) = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (14)$$

где ${}^{CF}D_t^\alpha$ – оператор дробной производной Капуто–Фабрицио [13] порядка α .

Сохраняя соответствующее уравнение для концентрации солевого раствора в виде (2), получаем систему уравнений дробно-дифференциальной математической модели фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами грунтовых сред с учетом ползучести скелета, состоящую из уравнений (14) и (2). В рамках этой модели моделирование консолидационной динамики массива единичной мощности с проницаемой верхней гранью, расположенного на непроницаемом основании, сводится к решению в области Ω системы уравнений (14), (2) с краевыми условиями (3) и (4).

Конечно-разностная методика построения приближенного решения краевой задачи (14), (2), (3) и (4) кратко состоит в следующем. Аналогично вышеизложенному, вводя в рас-

смотрим сеточную область ω_{ht} , поставим в соответствие рассматриваемой краевой задаче следующую систему разностных уравнений:

$$H_t + \zeta_\alpha \Delta_t^{(\alpha)} H = C_v \hat{H}_{\bar{x}x} - \mu \hat{C}_{\bar{x}x} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (15)$$

$$\sigma \Delta_t^{(\alpha_*)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}x} + v^+ \hat{C}_x + v^- \hat{C}_{\bar{x}} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (16)$$

где сохранены введенные выше обозначения для χ , v^\pm и $\Delta_t^{(\alpha)} u$.

Расписывая в (15) и (16) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, сводим задачу к решению СЛАУ вида (8) и (9), где элементы матриц коэффициентов систем и векторов свободных членов даются соотношениями (10) за исключением величин S , F_i^j , которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$F_i^j = \zeta_\alpha \sum_{k=0}^{j-1} \omega_k^{(j)} \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau} + \frac{\mu}{c_\alpha h^2} (C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}) - \frac{(1 + \zeta_\alpha) H_i^j}{\tau},$$

$$S = \frac{1 + \zeta_\alpha}{\tau} + 2A, \quad \zeta_\alpha = \alpha a_1 / [a_0 + \beta(1 + \bar{e})].$$

Ход дальнейших преобразований для получения решений систем разностных уравнений полностью совпадает с изложенным выше при решении задачи (1)–(4).

Анализ результатов численных экспериментов в данном случае позволяет сделать вывод о том, что учет фактора линейной ползучести грунтового скелета в рамках рассматриваемой математической модели приводит к ускоренному рассеиванию полей избыточных напоров по сравнению со случаем отсутствия учета данного фактора. Что касается полей концентраций солевого раствора, то в расчетах наблюдались незначительные отклонения $C_1 - C_2$ величин концентраций, найденных в рамках различных моделей (без учета и с учетом ползучести грунтового скелета), причем абсолютная величина разности $C_1 - C_2$ и ее знак зависят от координаты рассматриваемой точки в физической плоскости и от соответствующего момента времени t .

Таким образом, базирующаяся на понятии дробной производной Капуто–Фабрицио консолидационная математическая модель с несингулярным ядром, учитывающая фактор ползучести грунтового скелета, как и модель без учета данного фактора, обладает отчетливо выраженными признаками модели с супердиффузионными свойствами.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Т.2. Москва: Госстройиздат, 1961. 544 с.
2. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. Москва: Наука, 1967. 270 с.
3. Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент: Фан, 1986. 390с.
4. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. 211 с.
5. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. 416 с.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

7. Bulavatsky V.M. Mathematical model of geoinformatics for investigation of dynamics for locally nonequilibrium geofiltration processes. *J. Autom. Inform. Sci.* 2011. **43**, № 12. P. 12–20.
8. Bulavatsky V.M. Simulation of dynamics of some locally nonequilibrium geomigration processes on the basis of a fractional-differential geoinformation model. *J. Autom. Inform. Sci.* 2013. **45**, № 11. P. 75–84.
9. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modelling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality. *Cybern. Syst. Anal.* 2012. **48**, № 4. P. 539–546.
10. Bulavatsky V.M. Fractional differential mathematical models of the dynamics of nonequilibrium geomigration processes and problems with nonlocal boundary conditions. *Cybern. Syst. Anal.* 2014. **50**, № 1. P. 81–89.
11. Atangana A., Alkahtani B. New model of groundwater flowing within a confine aquifer: application of Caputo–Fabrizio derivative. *Arabian Journ. Geosciences*. 2015. **9**, № 1. P. 1–6.
12. Atangana A., Baleanu D. Caputo–Fabrizio derivative applied to groundwater flow within confined aquifer. *J. Eng. Mech.* 2017. **143**, № 5. P. 1–5.
13. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fract. Diff. Appl.* 2015. **1**, № 2. P. 73–85.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
15. Zhang Y., Cohen J., Owens J.D. Fast Tridiagonal Solvers on the GPU. Proceedings of the 15th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP 2010), January 9–14, 2010, Bangalore, India. P. 127–136.

Поступило в редакцию 06.11.2017

REFERENCES

1. Florin, V. A. (1961). The basis of soil mechanics. V.2. Moscow: Gosstroizdat (in Russian).
2. Zaretskiy, Ju. K. (1967). The theory of soil consolidation. Moscow: Nauka (in Russian).
3. Shirinkulov, T. Sh. & Zaretskiy, Ju. K. (1986). Creep and consolidation of soils. Tashkent: Fan (in Russian).
4. Vlasiuk, A.P. & Martyniuk, P.M. (2004) Mathematical modelling of soil consolidation under the conditions of salt solutions filtration process. Rivne: UDUVHP (in Ukrainian).
5. Vlasiuk, A. P. & Martyniuk, P. M. (2008). Mathematical modelling of soil consolidation under the conditions of non-isothermal salt solutions filtration process. Rivne: UDUVHP (in Ukrainian).
6. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. & Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier.
7. Bulavatsky, V. M. (2011). Mathematical model of geoinformatics for investigation of dynamics for locally nonequilibrium geofiltration processes. *J. Autom. Inform. Sci.*, 43, No. 12, pp. 12-20.
8. Bulavatsky, V. M. (2013). Simulation of dynamics of some locally nonequilibrium geomigration processes on the basis of a fractional-differential geoinformation model. *J. Autom. Inform. Sci.*, 45, No. 11, pp. 75-84.
9. Bulavatsky, V. M. & Krivonos, Yu. G. (2012). Mathematical modelling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality. *Cybern. Syst. Anal.*, 48, No. 4, pp. 539-546.
10. Bulavatsky, V. M. (2014). Fractional differential mathematical models of the dynamics of nonequilibrium geomigration processes and problems with nonlocal boundary conditions. *Cybern. Syst. Anal.*, 50, No. 1, pp. 81-89.
11. Atangana, A. & Alkahtani, B. (2015). New model of groundwater flowing within a confine aquifer: application of Caputo-Fabrizio derivative. *Arabian Journ. of Geosciences*, 9, No. 1, pp. 1-6.
12. Atangana, A. & Baleanu, D. (2017). Caputo-Fabrizio derivative applied to groundwater flow within confined aquifer. *J. of Eng. Mech.*, 143, No. 5, pp. 1-5.
13. Caputo, M. & Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fract. Diff. Appl.*, 1, No. 2, pp. 73-85.
14. Samarskiy, A. A. (1977). The theory of difference schemes. Moscow: Nauka (in Russian).
15. Zhang, Y., Cohen, J. & Owens, J. D. (2010). Fast Tridiagonal Solvers on the GPU. Proceedings of the 15th ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP 2010), pp. 127-136.

Received 06.11.2017

В.А. Бозаєнко, В.М. Булавацький

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: sevab@ukr.net, v_bulav@ukr.net

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДЕЯКИХ ФІЛЬТРАЦІЙНО-КОНСОЛІДАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

В рамках моделей, що базуються на понятті дробової похідної Капуто—Фабріціо, виконано комп'ютерне моделювання дробово-диференційної фільтраційно-консолідаційної динаміки насичених сольовими розчинами ґрунтових масивів. Розроблено методику отримання чисельного розв'язання відповідних крайових задач для систем дробово-диференційних рівнянь фільтрації та солепереносу. Викладено підхід до розпаралелювання обчислювального процесу, наведені результати чисельних експериментів з моделювання динаміки досліджуваного процесу.

Ключові слова: динаміка фільтраційно-консолідаційних процесів, математичне та комп'ютерне моделювання, дробово-диференційні математичні моделі, крайові задачі, скінченнорізницьові розв'язки, розпаралелювання обчислень.

V.A. Bogaenko, V.M. Bulavatsky

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: sevab@ukr.net, v_bulav@ukr.net

COMPUTER MODELING OF THE FRACTIONAL-DIFFERENTIAL DYNAMICS OF SOME FILTRATION-CONSOLIDATION PROCESSES

Within the framework of models based on the concept of Caputo—Fabrizio fractional derivative, the computer simulation of the fractional-differential filtration-consolidation dynamics of salt-saturated groundwater massifs is performed. The technique to obtain numerical solutions of the corresponding boundary-value problems for systems of fractional differential equations of filtration and salt transfer is developed, the approach to the parallelization of the computational process is described, and the results of numerical experiments on modeling the dynamics of the considered process are presented.

Keywords: mathematical modelling, dynamics of filtration-consolidation processes, mathematical and computer modelling, fractional-differential mathematical models, models with non-singular kernel, boundary-value problems, finite difference solutions, parallelization of computations.