ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.03.069
УДК 669.162.23

Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев
E-mail: gosul@ukr.net

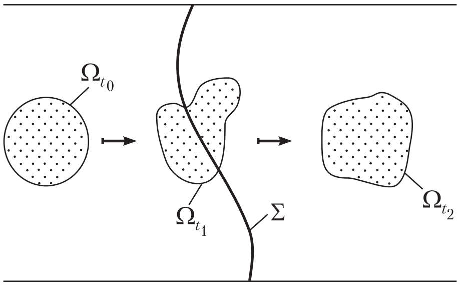
Механизмы теплогидродинамической неустойчивости при локальном подводе теплоты к газу

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Б.И. Баском

Получена математическая модель нестационарных движений газа при локальном подводе к нему теплоты вдоль некоторой поверхности. В уравнениях движения для рассмотренной задачи конкретизирован тензор диссипации тепловой энергии, ассоциированный с поверхностью теплоподвода и характеризующий наличие отрицательного теплового сопротивления. Получено уравнение на компоненты данного тензора и рассмотрены некоторые его частные случаи.

Ключевые слова: *тензор диссипации тепловой энергии, "отрицательное" тепловое сопротивление, неустойчивость, термоакустические автоколебания.*

В распределенных системах гидродинамического типа ламинарно-турбулентный переход, в частности возбуждение автоколебаний, исследуется с ростом числа Рейнольдса, как правило, обусловленным увеличением средней скорости потока. В данных исследованиях одним из основных инструментов является привлечение различных бифуркационных теорем, например теоремы Андронова—Хопфа о бифуркации рождения цикла. Отметим, что рост числа Рейнольдса может быть обусловлен и падением вязкости, что имеет место при определенных движениях многофазных сред, структурированных и стратифицированных жидкостей [1], а также при подводе теплоты к жидкости или теплоотводе от нее. В жидкостях с сильной зависимостью вязкости от температуры при достаточных градиентах давления возникает явление саморазогрева, также приводящее к падению вязкости. Дестабилизирующая роль вязкости является следствием закона запаздывания в передаче действия в вязкой среде, а это запаздывание может изменить знак эффективного трения, т. е. вызвать неустойчивость. В [2] рассматривается образование отрицательного сопротивления и автоколебаний в потоке жидкости с экспоненциальной зависимостью ее вязкости от температуры, причиной которых является ее саморазогрев. В [3] на основании результатов большого количества экспериментальных исследований феномена Рийке утверждается, что классическая модель волновых процессов не может объяснить причины самовозбуждения автоколебаний. В [4] был обоснован механизм образования отрицательного сопротивления на



Схематическое изображение выделения в потоке среды "жидкого объема" $\mathbf{\Omega}_t$

зависимости гидравлических потерь по длине трубы Рийке при постоянном тепловом потоке. Применение этого механизма позволило теоретически определить закономерности феномена Рийке [5]. Теоретическое описание феномена Рийке, в основу которого положены механизмы отрицательных сопротивлений, качественно и количественно подтверждается результатами экспериментов [3].

По-видимому, в [6] впервые было установлено, что процесс подвода тепла вносит в поток газа особый вид сопротивления: при подогреве движущегося газа полное давление падает. Обнаруженное сопротивление было названо Г.Н. Абрамовичем "тепловым" и в [6] приведено его термодинамическое истолкование.

В [7] Б.В. Раушенбах получил выражение для теплового сопротивления при нагреве идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости и привел его обоснование как механизма возбуждения вибрационного горения. С помощью этого соотношения для теплового сопротивления Б.В. Раушенбах пытался представить качественную картину возбуждения акустических колебаний теплоподводом за счет кинетической энергии течения. Было высказано предположение, что если теплоподвод будет колебаться около нуля, то на поток будет попеременно действовать то положительное, то отрицательное сопротивление. Если при этом увеличению скорости течения будет соответствовать уменьшение сопротивления, то система будет раскачиваться [7].

Согласно общим представлениям механики [8] эффект "отрицательного" сопротивления или "отрицательного" трения состоит в реализации условий, когда с увеличением скорости движения механической системы ее энергия не уменьшается (например, за счет сил вязкого трения, пропорциональных скорости), а, наоборот, увеличивается. Физика такого явления в различных системах своя. Однако благодаря данному явлению установившееся движение (или положение равновесия механической системы) становится неустойчивым и в системе возможно самовозбуждение автоколебаний.

Таким образом, "отрицательное" тепловое сопротивление — это формальный термин, означающий, что при выполнении определенных условий, местное гидравлическое сопротивление зоны теплоподвода не возрастает с увеличением скорости движения теплоносителя, а, наоборот, уменьшается, что приводит к возникновению гидродинамической неустойчивости и возбуждению автоколебаний. В [9] найдено аналитическое выражение для теплового сопротивления, возникающего при политропном подводе теплоты к движущемуся совершенному невязкому газу.

В данной работе на основе фундаментальных законов сохранения механики сплошной среды и базовых уравнений термодинамики решается задача получения уравнения для тензора диссипации тепловой энергии, возникающего при локальном теплоподводе к трехмерному потоку газа. В частном случае одномерного потока данный тензор вырождается в рассмотренное ранее тепловое сопротивление.

Вывод уравнений движения при теплоподводе. Рассмотрим движение вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости (рисунок) с локальным теплоподводом, распределенным вдоль некоторой поверхности Σ. Выделим в потоке движущейся среды в начальный момент времени t_0 малую область Ω_{t_0}, составленную из частиц среды. Тогда в момент времени $t > t_0$ данная область (см. рисунок) деформируясь перейдет в некоторую область Ω_t .

Непосредственным вычислением можно проверить справедливость следующего интегрального равенства:

$$\iiint\limits_{\Omega_t} a(\vec{r},t)\,d\omega = \iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\partial a}{\partial t} d\omega + \iint\limits_{\partial\Omega_t} a(\vec{r},t)\,(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds, \tag{1}$$

где $a(\vec{r},t)$ — произвольная достаточно гладкая скалярная, векторная или в общем случае тензорная величина; $d\omega = dx_1 dx_2 dx_3$ — элемент объема физического пространства; $\vec{V}(\vec{r},t)$ — скорость движения жидкости в момент времени t в точке, определяемой радиус-вектором $\vec{r}$; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega_t$, а ds — элемент ее площади.

Полагая в тождестве (1) $a = \rho(\vec{r},t)$ — плотность среды и используя формулу Гаусса—Остраградского

$$\iint\limits_{\partial\Omega_t} \rho(\vec{r},t)\,(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds = \iiint\limits_{\Omega_t} \operatorname{div}(\rho\vec{V})\,d\omega,$$

получаем тождество

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega_t} \rho(\vec{r},t)\,d\omega = \iiint\limits_{\Omega_t} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V})\right] d\omega. \tag{2}$$

В рассматриваемой задаче нет внутренних источников производства или поглощения массы. Поэтому из закона сохранения массы следует, что

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega_t} \rho(\vec{r},t)\,d\omega = 0,$$

и, соответственно, из (2) получается обычное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{V}) = 0. \tag{3}$$

Таким образом, уравнение неразрывности (3) эквивалентно следующему используемому нами далее уравнению, выражающему закон сохранения массы в балансной интегральной форме:

$$\iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\partial\rho}{\partial t} d\omega + \iint\limits_{\partial\Omega_t} \rho(\vec{r},t)\,(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds = 0. \tag{4}$$

Для вывода уравнения движения поступаем следующим образом. Применяем второй закон Ньютона к подвижному "жидкому" объему Ω_t , рассматривая его как материальное тело, а оставшуюся часть жидкости — как действующие на него внешние силы, обусловленные вязкостью и статическим давлением. Имеем

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega_t} \rho\vec{V}(\vec{r},t)\,d\omega = \iiint\limits_{\Omega_t} \rho(\vec{r},t)\,\vec{g}\,d\omega + \iint\limits_{\partial\Omega_t} \vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{n}\,ds + \iiint\limits_{\Omega_t} \delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,\vec{\vec{\tau}}_T\cdot\vec{n}_\Sigma\,d\omega, \tag{5}$$

где $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения; $\vec{\vec{\tau}}$ — тензор напряжения; $\vec{\vec{\tau}}_{\mathrm{T}}$ — тензор диссипации тепловой энергии; $\delta_{\Sigma}(\vec{r}-\vec{r}_{\Sigma})$ — дельта-функция Дирака, ассоциированная с поверхностью теплоподвода Σ. Тензор $\vec{\vec{\tau}}_{\mathrm{T}}$ действует на подвижный объем Ω_t лишь в случае его пересечения поверхности теплоподвода Σ. Таким образом, согласно определению дельта-функции δ_{Σ} справедливо представление (см. рисунок)

$$\iiint\limits_{\Omega_t} \delta_{\Sigma}(\vec{r}-\vec{r}_{\Sigma})\vec{\vec{\tau}}_{\mathrm{T}}\cdot\vec{n}_{\Sigma}d\omega = \begin{cases} \vec{\vec{\tau}}_{\mathrm{T}}(\vec{r}_{\Sigma})\cdot\vec{n}_{\Sigma} & \text{при } \Omega_t\cap\Sigma\neq\varnothing, \\ 0 & \text{при } \Omega_t\cap\Sigma=\varnothing. \end{cases}$$

Далее, полагая в (1) $a=\rho\vec{V}$ и используя формулу Грина интегрирования по частям [10], получаем тождество

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega_t}\rho\vec{V}(\vec{r},t)\,d\omega = \iiint\limits_{\Omega_t}\left[\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)(\rho\vec{V})+(\rho\vec{V})\operatorname{div}(\vec{V})\right]d\omega. \tag{6}$$

Введя в рассмотрение изотропный тензор $p(\vec{r},t)\vec{\vec{I}}$, где $\vec{\vec{I}}$ — единичный тензор, получим представление $\vec{\vec{\tau}}=-p(\vec{r},t)\vec{\vec{I}}+\vec{\vec{\sigma}}$, где $\vec{\vec{\sigma}}$ — неравновесный тензор напряжения трения, который для ньютоновской жидкости в координатах имеет вид [10]

$$\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_k}\right)+\xi\delta_{ij}\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_k},$$

где μ — молекулярная вязкость, ξ — объемная (вторая) вязкость. Вновь воспользовавшись формулой Гаусса—Остраградского, получим

$$\iint\limits_{\partial\Omega_t}\vec{\vec{\tau}}\cdot\vec{n}\,ds = -\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{grad}[p(\vec{r},t)]\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}(\vec{\vec{\sigma}})\,d\omega,$$

и, таким образом, уравнение движения (5) в балансной интегральной форме окончательно запишем в виде

$$\iiint\limits_{\Omega_t}\left[\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)(\rho\vec{V})+(\rho\vec{V})\operatorname{div}(\vec{V})\right]d\omega=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_t}\rho(\vec{r},t)\vec{g}\,d\omega-\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{grad}[p(\vec{r},t)]\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}(\vec{\vec{\sigma}})\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_{\Sigma}(\vec{r}-\vec{r}_{\Sigma})\vec{\vec{\tau}}_{T}\cdot\vec{n}_{\Sigma}d\omega, \tag{7}$$

или в координатной дифференциальной форме

$$\frac{\partial(\rho\upsilon_i)}{\partial t}=\rho g_i-\frac{\partial(\Pi_{ik}-\sigma_{ik})}{\partial x_k}+\delta_{\Sigma}(\vec{r}-\vec{r}_{\Sigma})\tau_{\mathrm{T}}^{ik}n_{\Sigma}^{k}, \tag{8}$$

где $\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho\upsilon_i\upsilon_k$ — тензор плотности потока импульса [10].

В силу уравнения неразрывности (3), с учетом явного вида компонент σ_{ij} тензора напряжения трения и следующего тождества:

$$\frac{\partial(\rho\upsilon_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\upsilon_k)}{\partial x_k}=\rho\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right)+\upsilon_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\upsilon_k)}{\partial x_k}\right)=\rho\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k}\right),$$

уравнение (8) запишем в виде

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}\right)=\rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\Delta\upsilon_i+\left(\xi+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2\upsilon_k}{\partial x_i\partial x_k}+\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,\tau_{\mathrm{T}}^{ik}n_\Sigma^k.$$

Отметим также, что при отсутствии теплоподвода для несжимаемой среды с постоянной плотностью $\rho=\mathrm{const}$, согласно (3) $\partial\upsilon_k/\partial x_k=0$, и из последнего уравнения получаем обычное уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}+\upsilon_k\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}=g_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x_k^2},$$

где $\nu=\mu/\rho$ — кинематическая вязкость.

В уравнении (8) остается неизвестной величина τ_{T}^{ik}, уравнение для которой нами далее будет получено как следствие закона сохранения энергии. Перейдем к составлению уравнения энергии в рассматриваемой нами задачи. Обозначим через $u(\vec{r},t)$ внутреннюю энергию единицы массы среды. Тогда полная энергия в объеме Ω_t определяется интегралом

$$E=\iiint\limits_{\Omega_t}\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)d\omega.$$

Полагая в тождестве (1)

$$a=\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right),$$

получаем

$$\frac{dE}{dt}=\iiint\limits_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)d\omega+\iint\limits_{\partial\Omega_t}\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds. \qquad (9)$$

Выясним теперь, какую работу производят силы, действующие на рассматриваемый подвижный элемент среды Ω_t . В единицу времени над данным элементом производится:

$-\iint\limits_{\partial\Omega_t}p(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds$ — работа сил давления,

$\iint\limits_{\partial\Omega_t}(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n})\cdot\vec{V}ds$ — работа сил вязкого трения,

$\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,(\vec{\vec{\tau}}_T\cdot\vec{n}_\Sigma)\cdot\vec{V}d\omega$ — работа сил "расширения—сжатия"

в окресности поверхности Σ. Когда объем Ω_t имеет непустое пересечение с поверхностью теплоподвода Σ, в его внутрь через каждый элемент поверхности $\Omega_t\bigcap\Sigma$ в единицу времени передается теплота $q(\vec{r}_\Sigma,t)$. Суммируя с помощью дельта-функции δ_Σ эти элементарные тепловые потоки, окончательно приходим к заключению, что суммарное количество теплоты, получаемое подвижным объемом Ω_t в единицу времени при прохождении им поверхности теплоподвода Σ, определяется следующим интегралом:

$$\iiint\limits_{\Omega_t} \delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\, q(\vec{r},t)\, d\omega .$$

Согласно закону сохранения энергии имеем

$$\iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)d\omega+\iint\limits_{\partial\Omega_t}\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds=-\iint\limits_{\partial\Omega_t} p(\vec{V}\cdot\vec{n})\,ds+\iint\limits_{\partial\Omega_t}(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{n})\cdot\vec{V}ds+$$

$$+\iiint\limits_{\Omega_t}\rho(\vec{g}\cdot\vec{V})\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,(\vec{\vec{\tau}}_T\cdot\vec{n}_\Sigma)\cdot\vec{V}d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,q(\vec{r},t)\,d\omega,$$

или после преобразования с помощью формул Грина поверхностных интегралов в объемные

$$\iiint\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\operatorname{div}\right)\left(\rho u+\frac{\rho|\vec{V}|^2}{2}\right)d\omega=\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{V}-p\vec{V})\,d\omega+$$

$$+\iiint\limits_{\Omega_t}\rho(\vec{g}\cdot\vec{V})\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,(\vec{\vec{\tau}}_T\cdot\vec{n}_\Sigma)\cdot\vec{V}d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,q(\vec{r},t)\,d\omega. \qquad (10)$$

Последнее уравнение и выражает собой в балансной интегральной форме закон сохранения энергии для рассматриваемого случая (см. рисунок). Упростим несколько это уравнение с целью получения той его формы, в которой записывают уравнение энергии при формулировке первого начала термодинамики. Прежде всего, учитывая уравнение неразрывности (3), левую подынтегральную часть в (10) представим в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\operatorname{div}\right)\left(\rho u+\frac{\rho|\vec{V}|^2}{2}\right)=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)+\rho\vec{V}\operatorname{div}\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)+$$

$$+\rho\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{V})\right)=\rho\frac{d}{dt}\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}\right),$$

а также учитывая, что

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\operatorname{grad}(\rho),\quad \operatorname{div}\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho},\quad \rho\frac{dp}{d\rho}-\operatorname{div}(p\vec{V})\frac{\partial p}{\partial t},$$

после прибавления $\rho\dfrac{dp}{d\rho}$ к обеим частям уравнения (10) окончательно запишем его в виде

$$\iiint\limits_{\Omega_t}\rho\frac{d}{dt}\left(u+\frac{|\vec{V}|^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)d\omega=\iiint\limits_{\Omega_t}\operatorname{div}(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\vec{V})\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\frac{\partial p}{\partial t}d\omega+$$

$$+\iiint\limits_{\Omega_t}\rho(\vec{g}\cdot\vec{V})\,d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,(\vec{\vec{\tau}}_T\cdot\vec{n}_\Sigma)\cdot\vec{V}d\omega+\iiint\limits_{\Omega_t}\delta_\Sigma(\vec{r}-\vec{r}_\Sigma)\,q(\vec{r},t)\,d\omega. \qquad (11)$$

Из уравнения (11) получаем уравнение для компонент тензора диссипации тепловой энергии

$$\vec{\vec{\tau}}_{\text{T}} = \left\| \tau_{\text{T}}^{ik} \right\|_{i,\, k=\overline{1;\,3}}$$

$$\tau_{\text{T}}^{ik} n_{\Sigma}^{i} w_k = C - \frac{\partial(\sigma_{ik} w_i)}{\partial x_k} - \rho g_k w_k, \qquad (12)$$

где

$$C = \rho \frac{d}{dt}\left(u + \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} - q(\vec{r}_{\Sigma}, t), \ \vec{V} = (w_i)_{i=\overline{1;\,3}}.$$

Компоненты тензора диссипации тепловой энергии для одномерного установившегося течения невязкого газа. В предположении одномерного установившегося движения гидравлически идеального (невязкого) газа тензор диссипации тепловой энергии имеет одну компоненту τ_{T}^{11} и уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\tau_{\text{T}}^{11}}{\rho} + \frac{q}{\rho w}, \qquad (13)$$

где

$$E = u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho}$$

и учтено, что в этом случае $\vec{V}(\vec{r}) = w(x)\vec{e}_r$, $\vec{r} = x\vec{e}_r$, $\text{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Полагая

$$\Delta h_{\text{T}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\tau_{\text{T}}^{11}}{\rho} dx, \ q^* = \int_{x_1}^{x_2} \frac{q}{\rho w} dx,$$

из (12) получаем уравнение энергии в форме 1-го закона термодинамики для потока идеального газа

$$E_1 + q^* = E_2 + \Delta h_{\text{T}}, \qquad (14)$$

где Δh_{T} — потери энергии из-за теплового сопротивления, q^* — подводимый удельный тепловой поток. При политропном подводе теплоты, когда

$$q^* = c_v \frac{n-k}{n-1}(T_2 - T_1),$$

где c_v — удельная теплоемкость изохорного процесса, n и k — соответственно показатели политропы и адиабаты, с учетом того, что

$$\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = R(T_2 - T_1), \ R(T_2 - T_1) = c_v (k-1)(T_2 - T_1),$$

уравнение (14) позволяет определить Δh_{T} в виде

$$\Delta h_{\text{T}} = n\left(\frac{k-1}{1-n}\right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2},$$

откуда, полагая $h_{\text{Т}} = \rho_1 \Delta h_{\text{Т}}$, для теплового сопротивления, выраженного в единицах давления, получаем выражение [9]

$$h_T = n\rho_1\left(\frac{k-1}{1-n}\right)c_v(T_2-T_1)+\frac{\rho_1 w_1^2}{2}\left[1-\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{2}{n-1}}\right]. \tag{15}$$

Таким образом, выполнение неравенства

$$\frac{\partial h_{\text{Т}}}{\partial w_2} < 0 \tag{16}$$

является необходимым условием для потери устойчивости стационарного течения газа и самовозбужения термоакустических автоколебаний. При выполнении обратного неравенства стационарный режим является устойчивым или возможно "жесткое" возбуждение автоколебаний [8].

Для возможности вычисления производной $\partial h_{\text{Т}} / \partial w_2$ и анализа неравенства (16) необходимо конкретизировать структуру теплоподвода. Будем предполагать, что отсутствует теплообмен с внешней средой и подвод теплоты к газу осуществляется с постоянной мощностью W, например конвективно от спирали электронагревателя. Из условия теплового баланса, при стационарном течении газа, получаем следующее уравнение:

$$W = c_{\Pi} m(T_2 - T_1), \tag{17}$$

где $m = \rho w$ — удельный массовый расход газа. Предполагая, что $\rho_1 = \text{const}$ и $T_1 = \text{const}$, приходим к следующему алгоритму для определения зависимости $h_{\text{Т}} = h_{\text{Т}}(w_2)$. Рассматривая температуру T_2 как варьируемый параметр, определяем выражения для зависимостей $h_{\text{Т}} = h_{\text{Т}}(T_2)$ и $w_2 = w_2(T_2)$, из которых, исключая T_2, получаем необходимое выражение для $h_{\text{Т}}(w_2)$.

Действительно, с учетом, что

$$w_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} w_2,$$

выражение для $h_{\text{Т}}(T_2)$ следует из соотношения (15). Зависимость $w_{\text{Т}}(T_2)$ определяется из уравнения теплового баланса (17):

$$w_2 = \frac{m_2}{\rho_2}, \quad m_2 = \frac{W}{c_{\Pi}(T_2 - T_1)}, \quad \rho_2 = \rho_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{18}$$

Из соотношений (18) следует, что

$$w_2 = \frac{n-1}{n-k}\frac{W}{\rho_1 c_v}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-n}}\frac{1}{T_2-T_1}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial T_2} = \frac{w_2}{T_2-T_1}\left[\frac{1}{1-n}\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)-1\right]. \tag{19}$$

Поэтому, полагая

$$\gamma_{n,k} = \text{sgn}\left[\frac{1}{n-k}\left(\frac{T_1}{T_2}-n\right)\right],$$

где sgn — стандартная знаковая функция, и учитывая, что $T_1 < T_2$, из (19) получаем, что имеет место равенство

$$\operatorname{sgn}\left[\frac{\partial w_2}{\partial T_2}\right] = \gamma_{n,k}. \tag{20}$$

Элементарно проверяется, что

$$\gamma_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad T_1 / T_2 < n < k, \\ -1, & \text{если} \quad n \in (-\infty; T_1 / T_2) \cup (k; +\infty). \end{cases}$$

Далее, с учетом, что

$$\frac{\partial h_{\text{T}}}{\partial w_2} = \frac{\partial h_{\text{T}} / \partial T_2}{\partial w_2 / \partial T_2},$$

согласно (20) неравенство (16) эквивалентно неравенству

$$\gamma_{n,k} \frac{\partial h_T}{\partial T_2} < 0.$$

При этом

$$\frac{\partial h_T}{\partial T_2} = \frac{1}{T_1} \frac{df_n(x)}{dx}\bigg|_{x=\frac{T_2}{T_1}}, \quad f_n(x) = C_0 n\left(\frac{k-1}{1-n}\right)(x-1) + C_1\left(\frac{n-1}{n-k}\right)^2 \left[\frac{1-x^{\frac{2}{1-n}}}{(x-1)^2}\right], \tag{21}$$

где

$$C_0 = \rho_1 c_v T_1, \; C_1 = \frac{W^2}{2\rho_1 T_1^2 c_v^2}.$$

Таким образом, согласно (21) условие неустойчивости стационарного течения идеального газа в рассматриваемой задаче окончательно запишется в форме следующего неравенства:

$$\gamma_{n,k} \frac{df_n(x)}{dx} < 0. \tag{22}$$

Соответственно, при выполнении обратного неравенства стационарное течение будет устойчивым. Подчеркнем еще раз, что полученные выводы справедливы лишь при пренебрежении вязкостью газа, так как в противном случае в потоке возникает вязкостное сопротивление, которое при определенных условиях также может порождать отрицательное сопротивление и, таким образом, являться отдельным механизмом неустойчивости [11, 12].

Отметим, что при фиксированных значениях параметров потока газа до области теплоподвода и показателя политропы n возможны различные случаи характера устойчивости стационарного течения. Вероятно, что неравенство (22) выполняется всюду или же всюду выполняется обратное неравенство. Также возможно, что уравнение $df_n(x)/dx = 0$ имеет действительные корни. В последнем случае возникают области устойчивости и неустойчивости стационарного течения. Например, при изобарном подводе теплоты в канале неизменного сечения с постоянной мощностью теплового потока W справедливо

$$\gamma_{0,k} = -1, \quad f_0(x) = \frac{C_1}{k^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \frac{df_0(x)}{dx} = \frac{C_1}{k^2}\frac{2}{(x-1)^2} > 0 \quad \forall x > 1.$$

Поэтому в этом случае подвод теплоты при постоянном давлении приводит к абсолютной неустойчивости стационарного течения невязкого газа. При подводе теплоты к газу с показателем политропы $n=2$ стационарное течение, наоборот, является абсолютно устойчивым. Действительно, в этом случае

$$\gamma_{2,k}=-1, \quad f_2(x)=-2(k-1)C_0(x-1)+\frac{C_1}{(2-k)^2}\frac{x+1}{x^2(x-1)}, \quad \frac{df_2(x)}{dx}<0 \quad \forall x>1.$$

Таким образом, исследована задача трехмерного движения реального газа при локальном подводе к нему теплоты. В соответствии с подходом Б.В. Раушенбаха зона теплоподвода условно аппроксимирована некоторой поверхностью, на которой терпят разрыв гидродинамические и термодинамические параметры потока газа. Вместо традиционного рассмотрения граничных условий на данной поверхности в уравнении движения с помощью дельта-функции Дирака явно выделено слагаемое в виде тензора диссипации тепловой энергии, который ассоциирован с данной поверхностью. Как следствие применения закона сохранения энергии к элементарному объему, составленному из частиц движущейся среды, получено уравнение для компонент данного тензора. Рассмотрены некоторые частные случаи применения полученной общей математической модели. Для одномерного установившегося течения идеального газа тензор диссипации тепловой энергии преобразуется в тепловое сопротивление, которое является местным гидравлическим сопротивлением области теплоподвода.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Худяев С.И., Ушаковский О.В. Пространственная неоднородность и автоколебания при течении структурированной жидкости. *Матем. моделирование*. 2002. **14**, № 7. С.53—73.
2. Мелких А.В., Селезнев В.Д. Автоколебания неизотермического течения вязкой жидкости в канале. ТВТ. 2008. **46**, № 1. С.100—109.
3. Беляев Н.М., Белик Н.П., Польшин А.В. Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок. Киев: Высш. шк., 1985. 160 с.
4. Гоцуленко В.В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке при изменении мощности теплового потока. *Матем. моделирование*. 2004. **16**, № 9. С. 23—28.
5. Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Теория феномена Рийке в системе с сосредоточенными параметрами. *Акуст. вестн.* 2010. **13**, № 3. С. 3—8.
6. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Москва: Наука, 1969. 824 с.
7. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. Москва: Физматгиз, 1961. 500 с.
8. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. Москва: ЛИБРОКОМ, 2010. 552 с.
9. Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Отрицательное тепловое сопротивление в одномерном установившемся течении совершенного невязкого газа. *Труды МФТИ*. 2014. **6**, № 4. С. 153—157.
10. Курбатова Г.И., Филиппов В.Б. Элементы тензорного исчисления. Основы моделирования движущихся сплошных сред. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2003. 232 с.
11. Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Автоколебания в трубе Рийке при расположении ресивера на ее входе. *Теплофизика и аэромеханика*. 2014. **21**, № 4. С. 487—496.
12. Basok B.I., Gotsulenko V.V. Regularities of thermoacoustic oscillations in lehmann's plant with a coolant moving in reverse. Mathematical Models and Computer Simulations. 2017. **9**, Iss. 6. P. 669—678.

Поступило в редакцию 05.11.2017

REFERENCES

1. Khudyaev, S. I. & Ushakovskii, O. V. (2002). Space nonuniformity and auto-oscillations in the structured liquid flow. Matem. Modelirovanie, 14, No. 7, pp. 53-73 (in Russian).
2. Melkikh, A. V. & Seleznev, V. D. (2008). Self-oscillations of nonisothermal flow of viscous liquid in a channel. High Temperature, 46, Iss. 1, pp. 91-99 (in Russian).
3. Belyaev, N. M., Belik, N. P. & Pol'shin, A. V. (1985). Thermoacoustic vibrations of gas-liquid flows in complex pipes of power plants. Kiev: Vysshaya shkola (in Russian).
4. Gotsulenko, V. V. (2004). Mathematical modelling of Riyke's phenomenon picularities when changed the heat flow power. Matem. Modelirovanie, 16, No. 9, pp. 23-28 (in Russian).
5. Basok, B. I. & Gotsulenko, V. V. (2010). A theory of the Rijke phenomenon in a system with lumped parameters. Acoustic bulletin, 13, No. 3, pp. 3-8 (in Russian).
6. Abramovich, G. N. (1969). Applied gas dynamics. Moscow: Nauka (in Russian).
7. Rauschenbach, B. V. (1961). Vibrating burning. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
8. Landa, P. S. (2010). Nonlinear oscillations and waves. Moscow: LIBROKOM (in Russian).
9. Basok, B. I. & Gotsulenko, V. V. (2014). Negative thermal resistance in the one-dimensional steady flow of a perfect inviscid gas. Proceedings of MIPT. 6, No. 2, pp. 153-157 (in Russian).
10. Kurbatova, G. I. & Filippov, V. B. (2002). Elements of tensor calculus. Fundamentals of modeling moving continua. St.-Petersburg: Izd-vo SPbGU (in Russian).
11. Basok, B. I. & Gotsulenko, V. V. (2014). Self-oscillations in a Rijke tube with receiver positioning at its entrance. Thermophysics and Aeromechanics, 21, Iss. 4, pp. 469-478.
12. Basok, B. I. & Gotsulenko, V. V. (2017). Regularities of thermoacoustic oscillations in lehmann's plant with a coolant moving in reverse. Mathematical Models and Computer Simulations. 9, Iss. 6, pp. 669-678.

Received 05.11.2017

Б.І. Басок, В.В. Гоцуленко

Інститут технічної теплофізики НАН України, Київ
E-mail: gosul@ukr.net

МЕХАНІЗМИ ТЕПЛОГІДРОДИНАМІЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ
ЗА УМОВ ЛОКАЛЬНОГО ПІДВЕДЕННЯ ТЕПЛОТИ ДО ГАЗУ

Побудовано математичну модель нестаціонарних рухів газу за умов локального підведення до нього теплоти вздовж деякої поверхні. У рівнянні руху для розглянутої задачі конкретизовано тензор дисипації теплової енергії, що асоційований з поверхнею теплопідведення і характеризує наявність від'ємного теплового опору. Одержано рівняння на компоненти даного тензора і розглянуто деякі його окремі випадки.

Ключові слова: *тензор дисипації теплової енергії, "від'ємний" тепловий опір, нестійкість, термоакустичні автоколивання.*

B.I. Basok, V.V. Gotsulenko

Institute of Technical Heat Physics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: gosul@ukr.net

MECHANISMS OF HEAT-HYDRODYNAMIC INSTABILITY
WITH LOCAL HEAT SUPPLY TO GAS

A mathematical model of nonstationary gas motions with a local supply of heat to a gas along a certain surface is developed. In the equations of motion, the heat energy dissipation tensor associated with the heat supply surface and characterizing the presence of a negative thermal resistance is specified. An equation is obtained for the components of the given tensor, and some of its particular cases are considered.

Keywords: *thermal energy dissipation tensor, "negative" thermal resistance, instability, thermoacoustic self-oscillations.*