

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.03.053>

УДК 517.36

А.С. Хорошун

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

О построении управления поступательным движением вращением эксцентрикового маховика

Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком

Рассмотрен пример малоприводной механической системы TORA. Получен в явном виде закон управления вращением эксцентрикового маховика, который обеспечивает стабилизацию положения равновесия TORA.

Ключевые слова: малоприводная механическая система, глобальная асимптотическая устойчивость, эксцентриковый маховик, положение равновесия.

Малоприводные механические системы (ММС) характеризуются тем, что количество управляющих входов в такой системе меньше, чем количество переменных, описывающих поведение. Системы такого класса широко используются при конструировании различных роботов, аэрокосмических и морских аппаратов (см. [1]), поскольку имеют преимущество в меньшем потреблении энергии и меньшей стоимости.

В работе [2] рассмотрен пример ММС и получен закон управления, обеспечивающий глобальную асимптотическую устойчивость состояния равновесия этой системы, а также получена оценка области в пространстве параметров модели, при всех значениях параметров из которой построенное управление также реализует поставленную задачу.

В данной статье рассмотрена ММС, имеющая сходную математическую природу с моделью спутника с двойным вращением (см. [3]), которая получила название TORA (англ. Translational Oscillator with Rotational Actuator). Отметим, что помимо приложения к космическим аппаратам, TORA представляет и самостоятельный интерес. В частности, в работе [4] предложено использовать TORA в виде модели активного гашения вибраций вращением эксцентрикового маховика (см. также [5] и библиографию там). Закон управления, который обеспечит стабилизацию положения равновесия TORA, будет представлен в явном виде, то есть зависящим от физических характеристик модели (скорости, смещений, времени), что важно для его практической реализации.

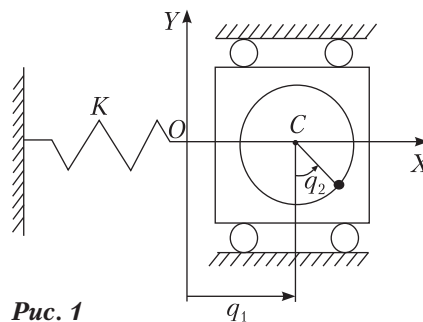


Рис. 1

© А.С. Хорошун, 2018

ISSN 1025-6415. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2018. № 3

53

Основной результат. Описание устройства ММС TORA дано в работе [3]. На рис. 1 изображена схема TORA, где q_1 — горизонтальное смещение центра маховика C от его положения равновесия O , q_2 — угол отклонения точечной массы от вертикали. Уравнения движения рассматриваемой модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (M(p)+m(p))\ddot{q}_1+m(p)r(p)(\ddot{q}_2\cos(q_2)-\dot{q}_2^2\sin(q_2))+K(p)q_1=0, \\ (I(p)+m(p)r^2(p))\ddot{q}_2+m(p)r(p)\cos(q_2)\ddot{q}_1+m(p)gr(p)\sin(q_2)=\Delta, \end{cases} \quad (1)$$

где $M(p)$ — масса тележки, мотора и маховика; $m(p)$ — точечная масса; $r(p)$ — расстояние между центром маховика и точечной массой; $J(p)$ — момент инерции маховика; $K(p)$ — жесткость пружины; Δ — момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя со стороны статора; g — ускорение свободного падения; $p \in P \subseteq R^n$ — векторный параметр, который описывает возможные неточности модели, $n \in N$. Задача состоит в том, чтобы выбрать закон управления Δ , который стабилизирует положение равновесия $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ TORA вне зависимости от начальных значений переменных.

Введя безразмерные переменные

$$\tilde{q}_1 = q_1 \sqrt{\frac{M(p)+m(p)}{I(p)+m(p)r^2(p)}}, \quad v = \frac{M(p)+m(p)}{K(p)(I(p)+m(p)r^2(p))} \Delta, \quad \tau = t \sqrt{\frac{K(p)}{M(p)+m(p)}}$$

и обозначив

$$\varepsilon(p) = \frac{m(p)r(p)}{\sqrt{(I(p)+m(p)r^2(p))(M(p)+m(p))}},$$

получим безразмерную систему дифференциальных уравнений, эквивалентную системе дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{q}}_1 + \tilde{q}_1 - \varepsilon(p)(\dot{q}_2^2 \sin(q_2) - \ddot{q}_2 \cos(q_2)) = 0, \\ \ddot{q}_2 + \varepsilon(p)\cos(q_2)\ddot{\tilde{q}}_1 + \frac{m(p)gr(p)(M(p)+m(p))}{K(p)(I(p)+m(p)r^2(p))} \sin(q_2) = v, \end{cases} \quad (2)$$

где дифференцирование ведется по обобщенному времени τ . Пусть $v = \alpha u + \beta$, где

$$\alpha = 1 - \varepsilon^2(p)\cos^2(q_2),$$

$$\beta = \varepsilon^2(p)\dot{q}_2^2 \sin(q_2)\cos(q_2) - \varepsilon(p)\cos(q_2)\tilde{q}_1 + \frac{m(p)gr(p)(M(p)+m(p))}{K(p)(I(p)+m(p)r^2(p))} \sin(q_2),$$

тогда заменой переменных

$$\begin{cases} \eta_1 = \tilde{q}_1 + \varepsilon(p)\sin(q_2), \\ \eta_2 = \dot{\tilde{q}}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2), \\ \eta_3 = q_2, \\ \eta_4 = \dot{q}_2 \end{cases} \quad (3)$$

система дифференциальных уравнений (2) приводится к “каскадному” виду

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_1 + \varepsilon(p)\sin(\eta_3), \\ \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 = u, \end{cases} \quad (4)$$

из глобальной устойчивости состояния равновесия которой при управлении u , следует аналогичное свойство системы дифференциальных уравнений (2) при управлении v .

Применяя так называемый Dynamic Surface Control, см. [6], получим, что управление

$$u = -c_2 x_4 - \frac{y_2}{\tau_2},$$

где переменные $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)^T$ и $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2)^T$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} \eta_1 = x_1, \\ \eta_2 = x_2, \\ \eta_3 = x_3 + y_1 - \arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}\right), \\ \eta_4 = x_4 + y_2 - c_1 x_3 - \frac{y_1}{\tau_1}, \end{cases} \quad (5)$$

стабилизирует состояние равновесия системы дифференциальных уравнений (4) вне зависимости от начальных значений переменных, если нулевое состояние равновесия системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(p) \sin\left(x_3 + y_1 - \arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}}\right)\right), \\ \dot{x}_3 = -c_1 x_3 + x_4 + y_2, \\ \dot{x}_4 = -c_2 x_4, \\ \dot{y}_1 = -\frac{y_1}{\tau_1} + F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p), \\ \dot{y}_2 = -\frac{y_2}{\tau_2} + F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, p), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$G(x_1, x_2, p) = 1 + x_1^2 + x_2^2, \quad F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p) = \frac{G(x_1, x_2, p)}{G(x_1, x_2, p) + x_2^2} \times$$

$$\times \left[\frac{-x_1 + \varepsilon(p) \sin\left(x_3 + y_1 - \arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}}\right)\right)}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon(p) x_2^2 \sin\left(x_3 + y_1 - \arctan\left(\frac{x_2}{\sqrt{G(x_1, x_2, p)}}\right)\right)}{(\sqrt{G(x_1, x_2, p)})^3} \right],$$

$$F_2(x, y, p) = c_1 x_4 + c_1 y_2 - c_1^2 x_3 - \frac{y_1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_1} F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, p),$$

глобально асимптотически устойчиво. Такая устойчивость доказана. Указаны способы выбора параметров управления c_1, c_2, τ_1, τ_2 и определения оценок области P , при всех значениях параметров из которой, данный тип устойчивости при выбранном управлении сохраняется.

Пусть c_1 и τ_1 выбраны таким образом, что

$$c_1 = \frac{1}{\tau_1}.$$

Тогда из (3) и (5) следует

$$\begin{aligned} x_3 + y_1 &= \eta_3 + \arctan\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{1 + \eta_1^2 + \eta_2^2}}\right) = \\ &= q_2 + \arctan\left(\frac{\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2)}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \varepsilon(p)\sin(q_2))^2 + (\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2))^2}}\right), \\ x_4 + y_2 &= \eta_4 + c_1(x_3 + y_1) = \\ &= \dot{q}_2 + c_1\left(q_2 + \arctan\left(\frac{\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2)}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \varepsilon(p)\sin(q_2))^2 + (\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2))^2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Выразив величину $x_4(\tau)$ из (6) в виде $x_4(\tau) = x_4(0)\exp(-c_2\tau)$, получим закон управления u , который явно зависит от физических характеристик исходной модели, в виде

$$\begin{aligned} u &= -c_2 x_4 - \frac{y_2}{\tau_2} = \left(-c_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)x_4 - \frac{1}{\tau_2}(x_4 + y_2) = \left(-c_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)x_4(0)\exp(-c_2\tau) - \frac{\dot{q}_2}{\tau_2} - \\ &- \frac{c_1}{\tau_2}\left(q_2 + \arctan\left(\frac{\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2)}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_1 + \varepsilon(p)\sin(q_2))^2 + (\dot{q}_1 + \varepsilon(p)\dot{q}_2 \cos(q_2))^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

или, переходя к размерным величинам, закон управления Δ в виде

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))}{M(p) + m(p)} \times \\ &\times \left[(1 - \varepsilon^2(p)\cos^2(q_2)) \left(\left(-c_2 + \frac{1}{\tau_2}\right)x_4(0)\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{K(p)}{M(p) + m(p)}}t\right) - \frac{c_1}{\tau_2}q_2 - \right. \right. \\ &- \left. \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}}\frac{\dot{q}_2}{\tau_2} - \frac{c_1}{\tau_2}\arctan(\Lambda(p, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)) \right) + \varepsilon(p)\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}\sin(q_2)\cos(q_2)\dot{q}_2^2 - \\ &- \left. \varepsilon(p)\sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{I(p) + m(p)r^2(p)}}\cos(q_2)q_1 + \frac{m(p)gr(p)(M(p) + m(p))\sin(q_2)}{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Lambda(p, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{\Phi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)}{\sqrt{1 + (\Phi(p, q_1, q_2))^2 + (\chi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2))^2}},$$

$$\Phi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{M(p) + m(p)}{\sqrt{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))}} \dot{q}_1 + \varepsilon(p) \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}} \cos(q_2) \dot{q}_2,$$

$$\varphi(p, q_1, q_2) = \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{I(p) + m(p)r^2(p)}} q_1 + \varepsilon(p) \sin(q_2),$$

$$\chi(p, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{M(p) + m(p)}{\sqrt{K(p)(I(p) + m(p)r^2(p))}} \dot{q}_1 + \varepsilon(p) \sqrt{\frac{M(p) + m(p)}{K(p)}} \cos(q_2) \dot{q}_2$$

и дифференцирование ведется по времени t .

Отметим, что варьируя величину $x_4(0)$ получаем разные законы управления, из которых можно выбрать наиболее приемлемый. Кроме того, вид управления (7) можно упростить, если выбрать c_2 и τ_2 таким образом, что

$$c_2 = \frac{1}{\tau_2}.$$

Пример. В качестве примера рассмотрим модель TORA с такими параметрами: $M = 10$ кг, $m = 1$ кг, $K = 5$ Н/м, $r = 1$ м, $J = 1$ кг·м². Параметры управления могут быть выбраны следующими:

$$c_1 = \frac{1}{\tau_1} = 25, \quad c_2 = \frac{1}{\tau_2} = 10^5.$$

Пусть начальное положение модели соответствует таким значениям переменных: $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$. Убедимся, что управление Δ решает поставленную задачу стабилизации. Поведение модели иллюстрирует рис. 2.

Таким образом, в работе получен явный вид управления вращением эксцентрикового маховика, которое обеспечивает стабилизацию положения равновесия TORA, вне зависимости от начальных значений переменных, описывающих поведение модели. Явный вид управления, то есть его зависимость от физических характеристик модели (скоростей, смещений, времени) является значимым для его практической реализации. Приемлемость полученного закона управления проиллюстрирована на примере реальной модели.

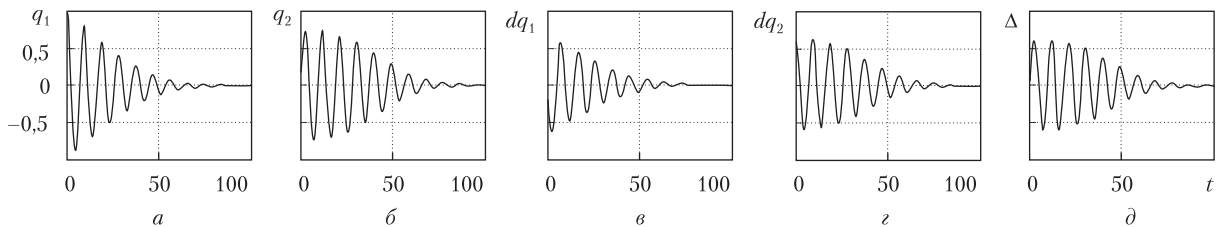


Рис. 2

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory Appl.* 2013. 7, Iss. 7. P. 921–935. doi: <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0505>
2. Хорошун А.С. О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика. *Прикл. механика.* 2016. 52, № 5. С. 125–137.
3. Yee R. K. Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque: Master's Thesis, Univ. California, Los Angeles, 1981.
4. Bupp R.T., Bernstein D.S., Coppola V.T. Vibration suppression of multi-modal translational motion using a rotational actuator. *Decision and Control: Proceedings of the 33rd IEEE Conference (Lake Buena Vista, 1994).* Lake Buena Vista, 1994, P. 4030–4034.
5. Zhang Y., Li L., Cheng B., Zhang X. An active mass damper using rotating actuator for structural vibration control. *Advances in Mech. Eng.* 2016. 8, Iss. 7. P. 1–9. doi: <https://doi.org/10.1177/1687814016657730>
6. Song B., Hedrick J.K. Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach. London: Springer, 2011. 268 p.

Поступило в редакцию 07.11.2017

REFERENCES

1. Liu, Y. & Yu, H. (2013). A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory Appl.*, 7, Iss. 7., pp. 921-935. doi: <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2012.0505>
2. Khoroshun, A. S. (2016). Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel. *Int. Appl. Mech.*, 52, Iss. 5. pp. 547-556. doi: <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0775-1>
3. Yee, R. K. (1981) Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque (unpublished master's thesis). Univ. California, Los Angeles, USA.
4. Bupp, R. T., Bernstein, D. S. & Coppola, V. T. (1994) Vibration suppression of multi-modal translational motion using a rotational actuator. *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 4030-4034), Lake Buena Vista.
5. Zhang, Y., Li, L., Cheng, B. & Zhang, X. An active mass damper using rotating actuator for structural vibration control. *Advances in Mech. Eng.*, 8, Iss. 7, pp. 1-9.
6. Song, B. & Hedrick, J. K. (2011). *Dynamic surface control of uncertain nonlinear systems. An LMI approach.* London: Springer.

Received 07.11.2017

А.С. Хорошун

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

ПРО ПОБУДОВУ КЕРУВАННЯ ПОСТУПАЛЬНИМ РУХОМ
ОБЕРТАННЯМ ЕКСЦЕНТРИКОВОГО МАХОВИКА

Розглянуто приклад малоприводної механічної системи TORA. Отримано у явному вигляді закон керування обертанням ексцентрикового маховика, який забезпечує стабілізацію положення рівноваги TORA.

Ключові слова: малоприводна механічна система, глобальна асимптотична стійкість, ексцентриковий маховик, положення рівноваги.

A.S. Khoroshun

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

ON THE CONSTRUCTION OF A CONTROL OVER THE TRANSLATIONAL MOTION
BY THE ROTATION OF AN ECCENTRIC FLYWHEEL

The underactuated mechanical system TORA is investigated. The explicit form of a control law for the eccentric flywheel rotation, which ensures the stabilization of the equilibrium position of TORA, is obtained.

Keywords: underactuated mechanical system, global asymptotic stability, eccentric flywheel, equilibrium position.