

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.03.036>

УДК 539.375

В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Гранична рівновага кусково-однорідного пружного тіла з міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком

Досліджено граничну рівновагу кусково-однорідного ізотропного пружного тіла з міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ. Точний розв'язок відповідної задачі теорії пружності для клиноподібного тіла побудовано методом Вінера—Гонфа.

Ключові слова: *межа поділу середовищ, кутова точка, міжфазні зсувні тріщини, гранична рівновага, метод Вінера—Гонфа.*

Як свідчать літературні джерела з механіки руйнування, в більшості праць, присвячених дослідженню плоских статичних задач теорії пружності для клиноподібних областей з тріщинами в вершині, а також інших задач про лінії розриву переміщення у кутових точках, тіло вважається однорідним [1–7]. У випадку кусково-однорідного тіла досліджувались лише задачі про лінії розриву переміщення в кінцях міжфазних тріщин та у кінці тріщини, що виходить на межу поділу середовищ [8, 9]. Задачі механіки руйнування, в яких досліджувався б напружено-деформований стан біля тріщин у кутових точках кусково-однорідних пружних тіл, не розглядалися.

Нижче проведено дослідження граничної рівноваги кусково-однорідного ізотропного пружного тіла з маломасштабними міжфазними зсувними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації в рамках статичної симетричної задачі розглянемо кусково-однорідне тіло з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яке складене з ізотропних пружних частин з модулями Юнга E_1, E_2 ($E_1 > E_2$) і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 (рис. 1).

У відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл, кутова точка межі поділу середовищ O являє собою концентратор напружень зі степеневою особливістю. Головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ є розв'язком однорідної задачі теорії пружності (задача К) для кусково-однорідної

площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, який породжується єдиним на інтервалі $]-1; 0[$ коренем λ_0 її характеристичного рівняння.

При цьому мають місце формули вигляду

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = Cg_1(\alpha, e_0, v_1, v_2)r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}),$$

$$\sigma_\theta(r, 0) = Cg_2(\alpha, e_0, v_1, v_2)r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}), \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2} \quad (r \rightarrow 0),$$

де функції g_1, g_2 визначаються з розв'язку задачі К, а стала C – з розв'язку кожної конкретної задачі теорії пружності, яка зображена на рис. 1. Сталу C , що залежить від зовнішнього навантаження, можна розглядати як коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ.

Результати розрахунків показують, що $\lambda_0 > -1/2$; $g_1(\alpha) < 0$ при $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$; $g_1(0) = g_1(\pi/2) = g_1(\pi) = 0$; $g_1 = 0$, якщо $E_1 = E_2, v_1 = v_2$; $g_2(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0; \alpha_1[\cup]\pi/2; \alpha_2[$; $g_2(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$; $g_2(0) = g_2(\alpha_1) = g_2(\pi/2) = g_2(\alpha_2) = g_2(\pi) = 0$; $g_2 = 0$, якщо $E_1 = E_2, v_1 = v_2$. Якщо e_0 збільшується, то α_1, α_2 зменшуються. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення α_1 (у градусах), які дорівнюють 38,2; 34,4; 29,3; 21,7 градусів, і значення α_2 , що дорівнюють 134,2; 133,4; 133,1; 131,3 градусів.

Якщо $C < 0$ (нижче показано, що повинна виконуватись саме ця умова) і $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$, то згідно з інформацією про функцію g_2 та формулою, що наведені вище, $\sigma_\theta(r, 0) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 0$, а тому на межі поділу середовищ біля кутової точки нормальні напруження є стискаючими. У цьому випадку внаслідок високої концентрації напружень у кутовій точці можливе зародження міжфазних зсувних тріщин, які виходять з неї, з повністю контактуючими берегами, їх довжина значно менша, ніж розміри тіла (рис. 2). Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$, тим ширша область значень кута α , при яких слід очікувати утворення таких тріщин.

Вважатимемо, що тертя між берегами тріщин відсутнє. Якщо $C < 0$ і $\alpha \in]0; \alpha_1[\cup]\pi/2; \alpha_2[$, то на межі поділу середовищ біля кутової точки має місце висока концентрація нормальних розтягуючих напружень. У цьому випадку слід очікувати зародження відкритих тріщин. Дослідження такого випадку не є темою даної роботи. Тому розглядатимемо лише випадок $C < 0, \alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$.

Ставиться задача визначення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} у кінці O_1 тріщини, установлення умови зрушення тріщин, дослідження їх рівноваги на стійкість та вивчення поведінки напружень біля кутової точки (див. рис. 2).

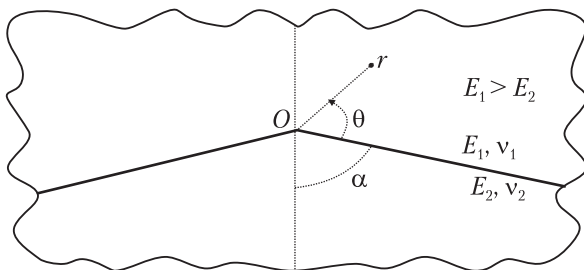


Рис. 1

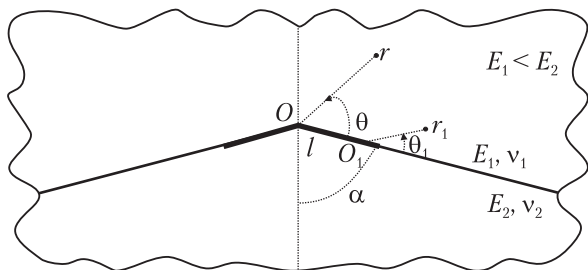


Рис. 2

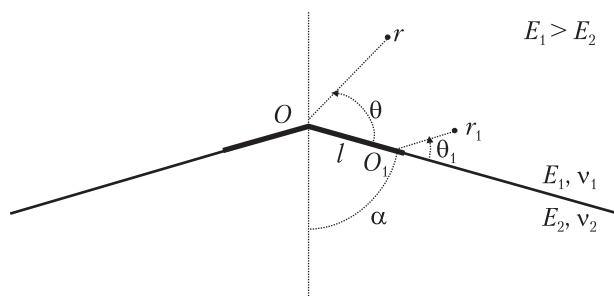


Рис. 3

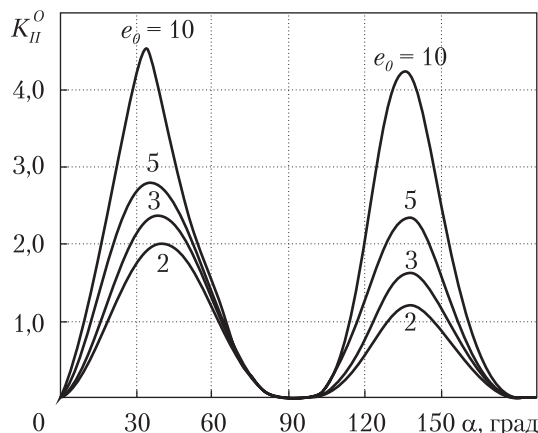


Рис. 4

При $r_1 \rightarrow 0$ у відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл реалізується асимптотика, що являє собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, яка містить на прямолінійній межі поділу середовищ напівнескінченну лінію розриву дотичного переміщення, що породжується коренем $-1/2$ її характеристичного рівняння. Зокрема,

$$\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi) \approx -\frac{K_{II} e'}{2(1+\kappa_2 e) \sqrt{2\pi r_1}} \quad (r_1 \rightarrow 0),$$

$$e' = 1 - \kappa_1 - (1 - \kappa_2)e, \quad e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad \kappa_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.$$

Оскільки $e' > 0$, а контактне напруження $\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi)$ від'ємне, повинна виконуватись умова $K_{II} > 0$.

З урахуванням малості тріщин приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, що містить розрізи скінченної довжини, які виходять з кутової точки та розташовані на цій межі (рис. 3).

На нескінченності задана асимптотика поля напружень, що являє собою розв'язок аналогічної задачі без розрізів — задачі К, про який йшлося вище. Довільна стала C , що входить до вказаного розв'язку, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля і повинна визначатися з розв'язку зовнішньої задачі.

Беручи до уваги симетрію, крайові умови задачі (рис. 3) запишемо так:

$$\theta = \pi - \alpha, \quad \theta = -\alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = C g_1 r^{\lambda_0} + o(1/r) \quad (-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha; \langle a \rangle. - \text{стрибок } a). \quad (3)$$

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (рис. 3) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша (задача 1) відрізняється від неї тим, що замість першої з умов (2)

маємо

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = -Cg_1 r^{\lambda_0}, \quad (4)$$

а на нескінченності напруження згасають як $o(1/r)$ (у (3) відсутній перший доданок). Друга задача — задача К. Оскільки розв'язок другої задачі відомий, достатньо побудувати розв'язок першої.

Для побудови точного розв'язку задачі 1 будемо використовувати метод Вінера — Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [10].

Розв'язок рівняння Вінера—Гопфа. Застосовуючи перетворення Мелліна з комплексним параметром p до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука, умов (1) та враховуючи другу з умов (2) і умову (4), приходимо до функціонального рівняння Вінера—Гопфа

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} = A \operatorname{ctg} p \pi G(p) \Phi^-(p), \quad (5)$$

$$A = \frac{(1 + \varepsilon_1)[1 + \varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_2)e]}{2[\varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)e + \varepsilon_2 e^2]}, \quad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p) = [\varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2)e + \varepsilon_2 e^2][a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi,$$

$$G_2(p) = [1 + \varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_2)e][b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi,$$

$$a_0(p) = (1 + \varepsilon_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha),$$

$$a_1(p) = (1 + \varepsilon_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha],$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varepsilon_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],$$

$$b_1(p) = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\varepsilon_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varepsilon_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha),$$

$$b_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varepsilon_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \quad \tau = -Cg_1 l^{\lambda_0},$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho$$

($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — досить малі додатні числа).

Розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$\Phi^+(p) = \frac{\tau K^+(p) G^+(p)}{p + \lambda_0 + 1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1) G^+(-\lambda_0 - 1)} - \frac{1}{K^+(p) G_1^+(p)} \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0), \quad (6)$$

$$\Phi^-(p) = \frac{\tau p G^-(p)}{AK^+(-\lambda_0 - 1) G^+(-\lambda_0 - 1) (p + \lambda_0 + 1) K^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p > 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0, \end{cases}$$

$$K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \mp p\right)} \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функція}).$$

Дослідження граничної рівноваги тіла з тріщинами. На основі розв'язку (6) рівняння (5) одержуємо наступну формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці O_1 тріщини:

$$K_{II} = g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) k(\alpha, e_0, v_1, v_2) Cl^{\lambda_0+1/2}, \quad (7)$$

$$k = \frac{2\sqrt{2}(1+\alpha_2 e) \Gamma(\lambda_0 + 3/2)}{[1+\alpha_1 + (1+\alpha_2)e] \Gamma(\lambda_0 + 2) G_1^+(-\lambda_0 - 1)}.$$

Оскільки $K_{II} > 0$, $g_1 < 0$, повинна виконуватись умова $C < 0$.

Залежності безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{II}^0 = -K_{II} / (Cl^{\lambda_0+1/2})$ від кута α для різних значень відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображено на рис. 4 ($v_1 = v_2 = 0,3$).

Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення $\alpha_{\max 1}$ і $\alpha_{\max 2}$ кута α , при яких функція $K_{II}^0(\alpha)$ буде найбільшою на кожному з інтервалів $]0; \pi/2[$, $]\pi/2; \pi[$, що дорівнюють 42,4; 37,1; 35,3; 33,5 і 139,2; 135,4; 134,1; 132,4 градусів.

З наведеної інформації випливає, що зі зростанням кута α від α_1 до $\pi/2$ і від α_2 до π концентрація напружень біля кінця O_1 тріщини спочатку посилюється, а потім послаблюється. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, які дорівнюють 42,4; 37,1; 35,3; 33,5 градусів.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кінця тріщини і меншими є гострий і тупий кути максимальної концентрації напружень.

Користуючись силовим критерієм руйнування і прирівнюючи праву частину (7) до критичного значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{IIc} , що являє собою задану сталу, приходимо до рівняння для визначення руйнуючого навантаження

$$C = \frac{K_{IIc}}{g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) k(\alpha, e_0, v_1, v_2) l^{\lambda_0+1/2}}. \quad (8)$$

Зрушення тріщин відбудеться тоді, коли параметр навантаження C , зростаючи за модулем зі зростанням зовнішнього навантаження, досягне свого граничного значення, яке визначається за формулою (8).

Оскільки $\lambda_0 > -1/2$, з (6) знаходимо

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial l} = (\lambda_0 + 1/2) k C g_1 l^{\lambda_0-1/2} > 0. \quad (9)$$

Використовуючи (9) і критерій стійкості рівноваги тріщин, можна сформулювати наступний висновок. Якщо у кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ зародилися міжфазні тріщини, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла, то у випадку повного гладкого контакту берегів їх рівновага є нестійкою. Після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Банцури Р.Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез. *Докл. АН СССР*. 1966. **167**, № 6. С. 1256–1259.
2. Сметанин Б.И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1968. № 2. С. 115–122.
3. Khrapkov A.A. Closed form solutions of problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with nonsymmetric notch at the apex. *J. Appl. Math. and Mech.* 1971. **35**, № 6. P. 1062–1069. doi: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90105-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90105-5)
4. Keer L.M., Mendelsohn D.A., Achenbach J.D. Crack at the apex of a loaded notch. *Int. J. Solids and Struct.* 1977. **13**, № 7. P. 615–623. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90044-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90044-0)
5. Ouchterlony F. Symmetric cracking of a wedge by concentrated loads. *Int. J. Eng. Sci.* 1977. **15**, No. 2. P. 109–116. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(77\)90026-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(77)90026-X)
6. Stone S.F., Westmann R.A. Stress intensity factors for cracked wedges. *Int. J. Solids and Struct.* 1981. **17**, № 3. P. 345–358. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90068-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90068-8)
7. Nekislykh E.M., Ostriuk V.I. Problems on elastic equilibrium of a wedge with cracks on the axis of symmetry. *Mechanics of Solids*. 2010. **45**, № 5. P. 743–756. doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654410050109>
8. Кулиев В.Д., Работнов Ю.Н., Черепанов Г.П. Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред. *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1978. № 4. С. 120–128.
9. Loboda V.V., Sheveleva A.E. Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies. *Int. Appl. Mech.* 2003. **39**, № 5. P. 566–572. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1025139625891>
10. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Надійшло до редакції 30.10.2017

REFERENCES

1. Bantsuri, R. D. (1966). Solution of the first fundamental problem of the theory of elasticity for a wedge having a finite cut. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 167, No. 6, pp. 1256-1259 (in Russian).
2. Smetanin, B. I. (1968). Some problems on a cracks in an elastic wedge and a layer. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mechanics of Solids*, No. 2, pp. 115-122 (in Russian).
3. Khrapkov, A. A. (1971). Closed form solutions of problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with nonsymmetric notch at the apex. *J. Appl. Math. and Mech.*, 35, No. 6, pp. 1062-1069. doi: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90105-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90105-5)
4. Keer, L. M., Mendelsohn, D. A. & Achenbach, J. D. (1977). Crack at the apex of a loaded notch. *Int. J. Solids and Struct.*, 13, No. 7, pp. 615-623. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90044-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90044-0)
5. Ouchterlony, F. (1977). Symmetric cracking of a wedge by concentrated loads. *Int. J. Eng. Sci.*, 15, No. 2, pp. 109-116. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(77\)90026-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(77)90026-X)
6. Stone, S. F. & Westmann, R. A. (1981). Stress intensity factors for cracked wedges. *Int. J. Solids and Struct.*, 17, No. 3, pp. 345-358. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90068-8](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90068-8)
7. Nekislykh, E. M. & Ostriuk, V. I. (2010). Problems on elastic equilibrium of a wedge with cracks on the axis of symmetry. *Mechanics of Solids*, 45, No. 5, pp. 743-756. doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654410050109>
8. Kuliev, V. D., Rabotnov, Yu. N. & Cherepanov, G. P. (1978). Braking of a crack at the interface of different elastic media. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mechanics of Solids*, No. 4, pp. 120-128 (in Russian).
9. Loboda, V. V. & Sheveleva, A. E. (2003). Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies. *Int. Appl. Mech.*, 39, No. 5, pp. 566-572. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1025139625891>

10. Nobl, B. (1962). Using of the Wiener – Hopf method for the solution the partial derivative equations. Moscow: Izda-vo Inostr. lit. (in Russian).

Received 30.10.2017

В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ТЕЛА
С МЕЖФАЗНЫМИ СДВИГОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Исследовано предельное равновесие кусочно-однородного изотропного упругого тела с межфазными сдвиговыми трещинами в угловой точке границы раздела сред. Точное решение соответствующей задачи теории упругости для клиновидного тела построено методом Винера–Хопфа.

Ключевые слова: граница раздела сред, угловая точка, межфазные сдвиговые трещины, предельное равновесие, метод Винера–Хопфа.

V.M. Nazarenko, A.L. Kipnis

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

LIMIT EQUILIBRIUM OF THE PIECE-HOMOGENEOUS ELASTIC BODY
WITH INTERFACIAL SHEAR CRACKS AT THE CORNER POINT
OF THE MEDIA-SEPARATING BOUNDARY

The limit equilibrium of the piece-homogeneous isotropic elastic body with an interfacial shear crack at the corner point of the media-separating boundary is investigated. The exact solution of the corresponding problem of the theory of elasticity for a wedge-shaped body is constructed by the Wiener–Hopf method.

Keywords: media-separating boundary, corner point, interfacial shear crack, limit equilibrium, Wiener–Hopf method.