ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.03.003
УДК 517.956.22

А.В. Аноп, О.О. Мурач

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

Однорідні еліптичні рівняння в розширеній соболєвській шкалі

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

У розширеній соболєвській шкалі досліджено однорідні еліптичні диференціальні рівняння, розв'язки яких задовольняють досить загальні крайові умови. Ця шкала складається з ізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить довільна функція, RO-змінна на нескінченності за Авакумовичем. Встановлено теореми про характер розв'язності цих рівнянь і локальну регулярність (аж до межі області) їх розв'язків у вказаній шкалі. Дано явний опис усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар підпросторів гільбертових просторів Соболєва, утворених розв'язками однорідного еліптичного рівняння.

Ключові слова: *еліптичне рівняння, простір Соболєва, простір Хермандера, нетерів оператор, регулярність розв'язку, інтерполяційний простір.*

Простори Соболєва відіграють фундаментальну роль у теорії еліптичних диференціальних рівнянь. Так, один із основних її результатів — теорема про нетеровість еліптичних крайових задач у підходящих парах соболєвських просторів додатного порядку [1, п. 2.4]. У важливому випадку, коли еліптичне рівняння однорідне, висновок цієї теореми є правильним для соболєвських просторів довільного дійсного порядку (див., наприклад, [2, розд. 2, п. 7.3] або [3, п. 3.3.1]).

У цій роботі досліджуються питання про розв'язність і властивості розв'язків загальних однорідних еліптичних рівнянь у розширеній соболєвській шкалі [4]. Вона складається з гільбертових просторів Хермандера H^{φ} [5, п. 2.2], для яких показником регулярності розподілів є довільна функція $\varphi:[1,\infty)\to(0,\infty)$, RO-змінна на нескінченності за В.Г. Авакумовичем [6, додаток 1]. Використання функціонального параметра φ замість числового дає змогу більш тонко охарактеризувати регулярність розподілів, ніж це можливо в рамках шкали соболєвських просторів. Важливо, що розширена соболєвська шкала отримується методом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва і складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для цих пар. Отже, вона є найбільш широким класом гільбертових функціональних просторів, на якому можна досліджувати властивості еліптичних рівнянь за допомогою інтерполяції соболєвських просторів. Для різних підкласів цієї шкали теореми про розв'язність еліптичних крайових задач встановлені в [7, 8] і окремо для однорідних еліптичних рівнянь — у [9, 10] (див. також [3, розд. 3, 4] і [11]).

Основні результати роботи — теорема про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі для однорідного еліптичного рівняння в розширеній соболєвській шкалі і теореми про породжені цією задачею ізоморфізми та локальну регулярність (аж до межі області) її узагальнених розв'язків у цій шкалі. Крім того, у термінах просторів Хермандера дано опис усіх гільбертових просторів, які є інтерполяційними для пар підпросторів гільбертових просторів Соболєва, утворених розв'язками однорідного еліптичного рівняння.

1. Постановка задачі. Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$, де $n \geqslant 2$. Припустимо, що межа Γ цієї області є замкненим (тобто компактним і без краю) многовидом вимірності $n-1$ класу C^∞, причому C^∞-структура на Γ породжена простором $\mathbf{R}^n$.

В області Ω розглядаємо однорідне лінійне диференціальне рівняння

$$Au(x) \equiv \sum_{|\mu| \leqslant 2q} a_\mu(x) D^\mu u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

довільного парного порядку $2q \geqslant 2$. Тут і надалі використано такі стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — мультиіндекс з цілими невід'ємними компонентами, $|\mu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \ldots D_n^{\mu_n}$, $D_k := i\partial/\partial x_k$, де $k \in \{1, \ldots, n\}$, i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbf{R}^n$.

Припускаємо, що рівняння (1) є еліптичним на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$, а усі його коефіцієнти a_μ є комплекснозначними функціями класу $C^\infty(\overline{\Omega})$. Взагалі, у роботі розглядаються комплекснозначні функції і розподіли та комплексні функціональні простори. У випадку, коли $n = 2$ і всі старші коефіцієнти a_μ є дійсними функціями, додатково припускаємо, що диференціальний оператор A є правильно (або, інакше кажучи, властиво) еліптичним на Γ [2, розд. 2, п. 1.2]. (У противному разі це припущення є наслідком еліптичності рівняння (1).)

У роботі досліджуються властивості розв'язків рівняння (1), які задовольняють крайові умови

$$B_j u(x) \equiv \sum_{|\mu| \leqslant m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu u(x) = g_j(x), \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

Тут кожне B_j — крайовий лінійний диференціальний оператор порядку $m_j \leqslant 2q-1$, заданий на Γ, з коефіцієнтами $b_{j,\mu} \in C^\infty(\Gamma)$. Припускаємо, що набір $B := (B_1, \ldots, B_q)$ крайових операторів задовольняє умову накриття (інакше кажучи, умову Я.Б. Лопатинського) щодо A на Γ [2, розд. 2, п. 1.4]. Отже, крайова задача (1), (2) є еліптичною на Ω.

Пов'яжемо з цією задачею відображення $u \mapsto Bu$, задане на лінійному просторі усіх функцій $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таких, що $Au = 0$ в Ω. Цей простір позначаємо через $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$. У роботі досліджуються властивості вказаного відображення в підходящих парах гільбертових функціональних просторів.

Для опису області значень оператора, породженого цим відображенням, знадобиться така спеціальна формула Гріна для крайової задачі (1), (2):

$$(Au, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, h_j)_\Gamma = (u, A^+ v)_\Omega + \sum_{r=1}^{2q} \left(D_\nu^{r-1} u, K_r v + \sum_{j=1}^{q} Q_{j,r}^+ h_j \right)_\Gamma \tag{3}$$

для довільних функцій $u, v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $h_1, \ldots, h_q \in C^{\infty}(\Gamma)$. Тут вирази $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ позначають скалярні добутки в гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій, квадрати яких інтегровні на Ω і Γ відповідно, а також продовження за неперервністю цих скалярних добутків. Окрім того, $D_{\nu} := i\partial/\partial_{\nu}$, де i — уявна одиниця, а ∂/∂_{ν} — похідна за напрямом внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω. Як звичайно, A^{+} — лінійний диференціальний оператор, формально спряжений до A відносно форми $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$. Далі, кожне K_r — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\Gamma)$, причому $\operatorname{ord} K_r \leqslant 2q - r$. Нарешті, кожне $Q^{+}_{j,r}$ — дотичний лінійний диференціальний оператор на Γ, формально спряжений до дотичного лінійного диференціального оператора $Q_{j,r}$ відносно $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$, а останній оператор узято із зображення крайового диференціального оператора B_j у вигляді

$$B_j = \sum_{r=1}^{2q} Q_{j,r} D_{\nu}^{r-1},$$

де покладаємо $Q_{j,r} := 0$, якщо $r > m_j + 1$. Формула (3) запропонована Б. Лавруком (див., наприклад, [12, теорема 3.1.1]).

З огляду на цю формулу розглянемо в області Ω таку крайову задачу:

$$A^{+} v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$K_r v(x) + \sum_{j=1}^{q} Q^{+}_{j,r} h_j(x) = \theta_r(x), \quad x \in \Gamma, \quad r = 1, \ldots, 2q. \tag{5}$$

Вона містить, крім невідомої функції v, ще q невідомих функцій $h_1, \ldots, h_q$ у крайових умовах (5). Ця задача є формально спряженою до задачі (1), (2) відносно формули Гріна (3). Оскільки остання крайова задача еліптична в Ω, то і формально спряжена крайова задача (4), (5) еліптична в Ω у деякому сенсі [12, теорема 3.1.2].

Позначимо через N лінійний простір усіх розв'язків $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ крайової задачі (1), (2) у випадку, коли всі $g_j = 0$ на Γ. Окрім того, позначимо через N_{*} лінійний простір усіх розв'язків $(v, h_1, \ldots, h_q) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^q$ крайової задачі (4), (5) у випадку, коли всі $\theta_r = 0$ на Γ. Оскільки ці задачі еліптичні, простори N і N_{*} скінченновимірні [12, лема 3.4.2]. Позначимо через M_{*} лінійний простір усіх векторів $(h_1, \ldots, h_q) \in (C^{\infty}(\Gamma))^q$ таких, що $(v, h_1, \ldots, h_q) \in N_{*}$ для деякої функції $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Звісно, $\dim M_{*} \leqslant \dim N_{*} < \infty$; тут може бути строга нерівність $\dim M_{*} < \dim N_{*}$, як випливає з [13, теорема 13.6.15].

2. Розширена соболєвська шкала складається з гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності розподілів служить довільний функціональний параметр з класу RO. За означенням, цей клас складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для яких існують числа $a > 1$ і $c \geqslant 1$ такі, що $c^{-1} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c$ для довільних $t \geqslant 1$ і $\lambda \in [1, a]$ (числа a і c можуть залежати від φ). Такі функції називають RO-(або OR-)змінними на нескінченності. Клас RO введений В.Г. Авакумовичем у 1936 р. і досить повно вивчений (див., наприклад, [6, додаток 1]).

Нам знадобиться така властивість класу RO [6, с. 88]: для кожної функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$, $s_0 \leqslant s_1$, і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0 \lambda^{s_0} \leqslant \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leqslant c_1 \lambda^{s_1} \text{ для довільних } t \geqslant 1, \lambda \geqslant 1. \tag{6}$$

Покладемо

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbf{R} : \text{виконується ліва нерівність у (6)}\}, \tag{7}$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbf{R} : \text{виконується права нерівність у (6)}\}. \tag{8}$$

Тут $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leqslant \sigma_1(\varphi) < \infty$. Числа $\sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської функції $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Клас RO є досить широким. Так, до нього належить кожна неперервна функція $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ така, що $\varphi(t) = t^s (\ln t)^{r_1} (\ln \ln t)^{r_2} \ldots (\ln \ldots \ln t)^{r_k}$ при $t >> 1$; тут довільно вибрано числа $k \in \mathbf{N}$ і $s, r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbf{R}$. Для неї $\sigma_0(\varphi) = \sigma_1(\varphi) = s$.

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. Дамо означення гільбертового простору Хермандера H^φ спочатку на $\mathbf{R}^n$, а потім на Ω і Γ.

За означенням, лінійний простір $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$, де $n \in \mathbf{N}$, складається з усіх розподілів $w \in S'(\mathbf{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\hat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbf{R}^n$ і задовольняє умову

$$\|w\|^2_{H^\varphi(\mathbf{R}^n)} := \int_{\mathbf{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle) |\hat{w}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

Тут $S'(\mathbf{R}^n)$ — лінійний топологічний простір Шварца повільно зростаючих розподілів, заданих в $\mathbf{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. У роботі розподіли трактуємо як *анти*лінійні неперервні функціонали на просторі $S'(\mathbf{R}^n)$ основних функцій. Простір $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ гільбертів і сепарабельний відносно норми $\|\cdot\|_{H^\varphi(\mathbf{R}^n)}$. У ньому щільна множина $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ фінітних основних функцій.

Простір $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ — гільбертів випадок простору $B_{p,k}$, введеного Л. Хермандером (див. [5, п. 2.2] або [13, п. 10.1]). А саме: $H^\varphi(\mathbf{R}^n) = B_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbf{R}^n$. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л.Р. Волевичем і Б.П. Панеяхом [14, §2].

Якщо функція φ степенева, тобто $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbf{R}$, то $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ є гільбертовим простором Соболєва $H^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ порядку s. Узагалі,

$$s_0 < \sigma_0(\varphi) \leqslant \sigma_1(\varphi) < s_1 \Rightarrow H^{(s_1)}(\mathbf{R}^n) \subset H^\varphi(\mathbf{R}^n) \subset H^{(s_0)}(\mathbf{R}^n), \tag{9}$$

причому обидва вкладення неперервні та щільні.

Клас просторів $\{H^\varphi(\mathbf{R}^n) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ виділений і досліджений в [4, 3, 15] та названий розширеною соболєвською шкалою на $\mathbf{R}^n$. Її версії для евклідової області Ω і замкненого многовиду Γ вводяться стандартним чином на основі простору $H^\varphi(\mathbf{R}^n)$. Дамо відповідні означення; тепер ціле $n \geqslant 2$.

За означенням, лінійний простір $H^\varphi(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω усіх розподілів $w \in H^\varphi(\mathbf{R}^n)$ і наділений нормою

$$\|u\|_{H^\varphi(\Omega)} := \inf\left\{\|w\|_{H^\varphi(R^n)} : w \in H^\varphi(\mathbf{R}^n), w = u \text{ в } \Omega\right\},$$

де $u \in H^\varphi(\Omega)$. Простір $H^\varphi(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми, причому множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в ньому.

Лінійний простір $H^{\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $h \in D'(\Gamma)$, які в локальних координатах на многовиді Γ дають елементи простору $H^{\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})$. Тут, як звичайно, $D'(\Gamma)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів на Γ. Дамо детальне означення. Виберемо довільним чином скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbf{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, де $j = 1, \ldots, p$. Тут $\{U_1, \ldots, U_p\}$ — відкрите покриття многовиду Γ. Окрім того, виберемо функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, підпорядковане умові $\operatorname{supp} \chi_j \subset U_j$.

За означенням, лінійний простір $H^{\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $h \in D'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_j h) \circ \alpha_j \in H^{\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тут розподіл $(\chi_j h) \circ \alpha_j$ є зображенням розподілу $\chi_j h$ у локальній карті α_j. Простір $H^{\varphi}(\Gamma)$ наділений нормою

$$\|h\|_{H^{\varphi}(\Gamma)} := \left(\|(\chi_1 h) \circ \alpha_1\|^2_{H^{\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})} + \ldots + \|(\chi_p h) \circ \alpha_p\|^2_{H^{\varphi}(\mathbf{R}^{n-1})} \right)^{1/2},$$

відносно якої є гільбертовим і сепарабельним. Важливо, що цей простір і топологія в ньому не залежать від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці [3, теорема 2.31]. Множина $C^{\infty}(\Gamma)$ щільна в $H^{\varphi}(\Gamma)$.

Означені щойно функціональні простори утворюють розширені соболєвські шкали $\{H^{\varphi}(\Omega) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ і $\{H^{\varphi}(\Gamma) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ на Ω і Γ відповідно. Ці шкали містять у собі гільбертові простори Соболєва довільного дійсного порядку. А саме: якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbf{R}$, то $H^{\varphi}(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ і $H^{\varphi}(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є просторами Соболєва порядку s. Властивість (9) залишається правильною, якщо в ній замінити $\mathbf{R}^n$ на Ω або Γ; при цьому вкладення стають компактними.

3. Результати. Позначимо через $H^{\varphi}(\Omega, A)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів $u \in H^{\varphi}(\Omega)$ таких, що $Au = 0$ в Ω. Тут і далі образ Au розуміємо в сенсі теорії розподілів. Простір $H^{\varphi}(\Omega, A)$ наділений нормою з простору $H^{\varphi}(\Omega)$ і є повним відносно неї. Оскільки оператор A еліптичний на $\overline{\Omega}$, то $H^{\varphi}(\Omega, A) \subset C^{\infty}(\Omega)$ [2, розд. 2, теорема 3.2]. Втім, $H^{\varphi}(\Omega, A) \not\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$. У соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbf{R}$, простір $H^{\varphi}(\Omega, A)$ позначаємо через $H^{(s)}(\Omega, A)$.

Теорема 1. *Для кожного параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *лінійний многовид* $C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$ *щільний у просторі* $H^{\varphi}(\Omega, A)$, *а відображення* $u \mapsto Bu$, *де* $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}, A)$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до деякого обмеженого оператора*

$$B_A : H^{\varphi}(\Omega, A) \to \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{-m_j - 1/2}}(\Gamma) =: \mathbf{H}_{\varphi}(\Gamma). \tag{10}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(g_1, \ldots, g_q) \in \mathbf{H}_{\varphi}(\Gamma)$ *таких, що*

$$(g_1, h_1)_{\Gamma} + \ldots + (g_q, h_q)_{\Gamma} = 0 \ \textit{для довільного} \ (h_1, \ldots, h_q) \in M_*. \tag{11}$$

Індекс оператора (10) *дорівнює* $\dim N - \dim M_*$ *і не залежить від* φ.

У формулі (10) і далі використовується функціональний параметр $\rho(t) := t$ аргументу $t \geqslant 1$. Це зроблено для того, щоб не писати аргумент t у позначеннях просторів Хермандера. Отже, $(\varphi\rho^s)(t) \equiv \varphi(t) t^s$, де $s \in \mathbf{R}$. Звісно, включення $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\varphi\rho^s \in \mathrm{RO}$ еквівалентні, причому $\sigma_j(\varphi\rho^s) = \sigma_j(\varphi) + s$ для кожного $j \in \{0, 1\}$.

З огляду на теорему 1 нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T: E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають нетеровим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2 / T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо оператор T нетерів, то його область значень $T(E_1)$ замкнена в E_2, а індекс $\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(E_2 / T(E_1))$ скінченний.

Візначимо також, що у формулі (11) величина $(g_j, h_j)_\Gamma$, де $j \in \{1, \ldots, q\}$, є значенням розподілу $g_j \in D'(\Gamma)$ на основній функції $h_j \in C^\infty(\Gamma)$.

У випадку, коли функція φ правильно змінна на нескінченності і еліптична крайова задача (1), (2) регулярна, теорема 1 доведена В.А. Михайлецем і О.О. Мурачем у [9, теорема 1.1] (див. також монографію [3, п. 3.3]). При цьому для опису області значень оператора B_A була використана класична формула Гріна. Зокрема, у соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і дійсне $s \notin \{1/2 - k : k \in \mathbf{N}\}$, ця теорема міститься в результаті Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [2, розд. 2, п. 7.3]. Для нерегулярних еліптичних крайових задач і правильно змінних функцій φ вона встановлена І.С. Чепурухіною [10, теорема 1].

Якщо $N = \{0\}$ і $M_* = \{0\}$, то оператор (10) є ізоморфізмом простору $H^\varphi(\Omega, A)$ на простір $\mathbf{H}_\varphi(\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор породжує ізоморфізм між їх підпросторами скінченної ковимірності. У зв'язку з цим розглянемо розклади просторів, у яких діє оператор (10), у вигляді таких прямих сум (замкнених) підпросторів:

$$H^\varphi(\Omega, A) = N \dotplus \{u \in H^\varphi(\Omega, A) : (u, w)_\Omega = 0 \text{ для усіх } w \in N\}, \tag{12}$$

$$\mathbf{H}_\varphi(\Gamma) = M_* \dotplus \{(g_1, \ldots, g_q) \in \mathbf{H}_\varphi(\Gamma) : \text{виконується (11)}\}. \tag{13}$$

У формулі (12) півторалінійна форма $(u, w)_\Omega$ коректно означена для довільних функцій $u \in H^\varphi(\Omega, A)$ і $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ за формулою

$$(u, w)_\Omega := \lim_{k \to \infty} (u_k, w)_\Omega,$$

де $(u_k)_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність, яка лежить у $C^\infty(\overline{\Omega}, A)$ і прямує до u у просторі $H^\varphi(\Omega, A)$. Позначимо через P і Q проектори відповідно просторів $H^\varphi(\Omega, A)$ і $\mathbf{H}_\varphi(\Gamma)$ на другий доданок у сумах (12) і (13) паралельно першому доданку. Ці проектори (як відображення) не залежать від φ.

Теорема 2. *Для кожного* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *звуження оператора* (10) *на* $P(H^\varphi(\Omega, A))$ *є ізоморфізмом підпростору* $P(H^\varphi(\Omega, A))$ *на підпростір* $Q(\mathbf{H}_\varphi(\Gamma))$.

Дослідимо локальну регулярність (аж до межі області) узагальненого розв'язку u крайової задачі (1), (2). Спочатку дамо його означення. Позначимо через $S'(\Omega)$ множину звужень в область Ω усіх розподілів з простору $S'(\mathbf{R}^n)$. Нехай $g := (g_1, \ldots, g_q) \in (D'(\Gamma))^q$; розподіл $u \in S'(\Omega)$ називаємо узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2), якщо $Au = 0$ в Ω (тоді $u \in H^\varphi(\Omega, A)$ для деякого $\varphi \in \mathrm{RO}$) і $B_A u = g$, де B_A позначає оператор (10).

Нехай Γ_0 — довільна відкрита непорожня підмножина многовиду Γ. Позначимо через $H^\varphi_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_0)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів $u \in S'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^\varphi(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, носій якої лежить в $\Omega \cup \Gamma_0$. Крім того, позначимо через $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, лінійний простір усіх розподілів $h \in D'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in H^\alpha(\Gamma)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$, носій якої лежить в Γ_0.

Теорема 3. *Припустимо, що розподіл* $u \in S'(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2), де

$$g_j \in H_{\mathrm{loc}}^{\varphi\rho^{-m_j-1/2}}(\Gamma_0)$$

для усіх $j \in \{1,\ldots,q\}$ *і деякого* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Тоді* $u \in H_{\mathrm{loc}}^{\varphi}(\Omega, \Gamma_0)$.

Зокрема, якщо $\Gamma_0 = \Gamma$, то простори $H_{\mathrm{loc}}^{\varphi}(\Omega, \Gamma_0)$ і $H_{\mathrm{loc}}^{\alpha}(\Gamma_0)$ дорівнюють $H^{\varphi}(\Omega)$ і $H^{\alpha}(\Gamma)$ відповідно; отже, у цьому випадку висновок теореми 3 стосується глобальної регулярності розв'язку u, тобто регулярності в усій області Ω аж до її межі Γ.

Наскільки нам відомо, теорема 3 (якщо $\Gamma_0 \neq \Gamma$) є новим результатом навіть у соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і s — довільне дійсне число.

На завершення роботи в термінах просторів $H^{\varphi}(\Omega, A)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, дамо опис усіх інтерполяційних гільбертових просторів для довільної пари соболєвських гільбертових просторів $H^{(s_0)}(\Omega, A)$ і $H^{(s_1)}(\Omega, A)$, де $s_0 < s_1$. У цьому зв'язку нагадаємо відповідне означення.

Нехай задано пару гільбертових просторів X_0 і X_1 таку, що X_1 — лінійний многовид у X_0 і вкладення $X_1 \subset X_0$ неперервне. Гільбертів простір H називають інтерполяційним для цієї пари, якщо він задовольняє такі дві умови:

1) H – лінійний многовид у X_0 і виконуються неперервні вкладення $X_1 \subset H \subset X_0$;

2) для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, правильна така імплікація: якщо T є обмеженим оператором на X_0 і звуження відображення T на X_1 є обмеженим оператором на X_1, то і звуження відображення T на H є обмеженим оператором на H.

Теорема 4. *Нехай числа* $s_0, s_1 \in \mathbf{R}$ *такі, що* $s_0 < s_1$. *Гільбертів простір* H *є інтерполяційним для пари гільбертових просторів* $H^{(s_0)}(\Omega, A)$ *і* $H^{(s_1)}(\Omega, A)$ *тоді і лише тоді, коли* $H = H^{\varphi}(\Omega, A)$ *з точністю до еквівалентності норм для деякого параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$, *який задовольняє умову (6).*

Нагадаємо, що в умові (6) числа c_0 і c_1 не залежать від t і λ. Цю умову можна подати в термінах індексів Матушевської функціонального параметра φ. А саме: вона еквівалентна такій парі умов:

i) $s_0 \leqslant \sigma_0(\varphi)$, та, окрім того, $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, якщо в (7) не досягається супремум;

ii) $\sigma_1(\varphi) \leqslant s_1$ та, окрім того, $\sigma_1(\varphi) < s_1$, якщо в (8) не досягається інфімум.

Як показано в [15, теорема 2.7], розширена соболєвська шкала $\{H^{\varphi}(\Omega) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва $H^{(s_0)}(\Omega)$ і $H^{(s_1)}(\Omega)$, де $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$. Згідно з теоремою 4 ця властивість зберігається для відповідних підпросторів, утворених розподілами, які задовольняють однорідне еліптичне рівняння (1).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Agranovich M.S. Elliptic boundary problems. *Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX.* Berlin: Springer, 1997. P. 1—144.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Мир, 1971. 372 с.
3. Mikhailets V.A., Murach A.A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter, 2014. xii+297 p.
4. Михайлец В.А., Мурач А.А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы. *Укр. мат. журн.* 2013. **65**, № 3. С. 368—380.
5. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. Москва: Мир, 1965. 380 с.
6. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Москва: Наука, 1985. 144 с.

7. Михайлец В.А., Мурач А.А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II. *Укр. мат. журн.* 2006. **58**, № 3. С. 352—370.
8. Anop A.V., Kasirenko T.M. Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces. *Methods Funct. Anal. Topology.* 2016. **22**, № 4. P. 295—310.
9. Михайлец В.А., Мурач А.А. Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств. *Укр. мат. журн.* 2006. **58**, № 11. С. 1536—1555.
10. Чепурухіна І.С. Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями в крайових умовах. *Допов. Нац. акад. наук. Укр.* 2015. № 7. С. 20—28.
11. Mikhailets V.A., Murach A.A. The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems. *Banach J. Math. Anal.* 2012. **6**, № 2. P. 211—281.
12. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997. x+414 p.
13. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Москва: Мир, 1986. 456 с.
14. Волевич Л.Р., Панеях Б.П. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. *Успехи мат. наук.* 1965. **20**, № 1. С. 3—74.
15. Mikhailets V.A., Murach A.A. Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces. *Results Math.* 2015. **67**, № 1. P. 135—152.

Надійшло до редакції 07.11.2017

REFERENCES

1. Agranovich, M. S. (1997). Elliptic boundary problems. Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Partial differential equations, IX. Berlin: Springer.
2. Lions, J.-L. & Magenes, E. (1972). Non-Homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 1. New York, Heidelberg: Springer.
3. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2014). Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. Berlin, Boston: De Gruyter.
4. Mikhailets, V.A. & Murach, A.A. (2013). Extended Sobolev scale and elliptic operators. Ukr. Math. J., 65, No. 3, pp. 435-447.
5. Hörmander, L. (1963). Linear partial differential operators. Berlin: Springer.
6. Seneta, E. (1976). Regularly varying functions. Berlin: Springer.
7. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2006). Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems. II. Ukr. Math. J., 58, No. 3, pp. 398-417.
8. Anop, A. V. & Kasirenko, T. M. (2016). Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces. Methods Funct. Anal. Topology, 22, No. 4, pp. 295-310.
9. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2006). Regular elliptic boundary-value problem for homogeneous equation in two-sided refined scale of spaces. Ukr. Math. J., 58, No. 11, pp. 1748-1767.
10. Chepurukhina, I. S. (2015). A semihomogeneous elliptic problem with additional unknown functions in boundary conditions. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 7, pp. 20-28 (in Ukrainian).
11. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2012). The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems. Banach J. Math. Anal., 6, No. 2., pp. 211-281.
12. Kozlov, V. A., Maz'ya, V. G. & Rossmann, J. (1997). Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc.
13. Hörmander, L. (1983). The analysis of linear partial differential operators, vol. II, Differential operators with constant coefficients. Berlin: Springer.
14. Volevich, L. R. & Paneah B. P. (1965). Certain spaces of generalized functions and embedding theorems. Russ. Math. Surv., 20, No. 1, pp. 1-73.
15. Mikhailets, V. A. & Murach, A. A. (2015). Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces. Results Math. 67, No. 1, pp. 135-152.

Received 07.11.2017

А.В. Аноп, А.А. Мурач

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

ОДНОРОДНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
В РАСШИРЕННОЙ СОБОЛЕВСКОЙ ШКАЛЕ

В расширенной соболевской шкале исследованы однородные эллиптические дифференциальные уравнения, решения которых удовлетворяют общим краевым условиям. Эта шкала состоит из изотропных гильбертовых пространств Хермандера, для которых показателем регулярности служит произвольная функция, RO-меняющаяся на бесконечности по Авакумовичу. Установлены теоремы о характере разрешимости этих уравнений и локальной регулярности (вплоть до границы области) их решений в указанной шкале. Дано явное описание всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пар подпространств гильбертовых пространств Соболева, образованных решениями однородного эллиптического уравнения.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, пространство Соболева, пространство Хермандера, нетеров оператор, регулярность решения, интерполяционное пространство.*

A.V. Anop, A.A. Murach

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

HOMOGENEOUS ELLIPTIC EQUATIONS IN AN EXTENDED SOBOLEV SCALE

In an extended Sobolev scale, we investigate homogeneous elliptic differential equations, whose solutions satisfy general enough boundary conditions. This scale consists of isotropic Hilbertian Hörmander spaces for which the regularity index is an arbitrary function RO-varying at infinity in the sense of Avakumović. We establish theorems on the character of solvability of these equations and the local regularity (up to the boundary of the domain) of their solutions in the scale indicated. We give an explicit description of all Hilbert spaces that are interpolation ones for pairs of subspaces of Hilbert Sobolev spaces formed by solutions of a homogeneous elliptic equation.

Keywords: *elliptic equation, Sobolev space, Hörmander space, Fredholm operator, regularity of a solution, interpolation space.*