УДК 622.73

Н. С. ПРЯДКО, Е. В. ТЕРНОВАЯ

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИКИ ТОНКОГО ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: np-2006@ukr.net

Проведен анализ кинетики тонкого измельчения руд. Для описания изменения функции распределения частиц по размерам в ходе измельчения использован вид интегро-дифференциального уравнения кинетики измельчения, предложенный А. И. Загустиным. Цель работы – модифицировать вид уравнения кинетики измельчения с учетом особенностей струйного измельчения материалов. Для этого используются установленные зависимости характеристик акустических сигналов, фиксируемых в зоне измельчения, от технологических параметров процесса, от размера частиц и свойств материала измельчения. Распределительная и селективная функции измельчения (или функция отбора и разрушения) выражаются через максимальную амплитуду акустических сигналов. Получено частное решение уравнения кинетики струйного измельчения шамота. Проведено сравнение результатов расчета кинетики измельчения с данными экспериментального измельчения на лабораторной струйной мельнице.

Проведено аналіз кінетики тонкого подрібнення руд. Для опису зміни функції розподілу часток за розмірами в ході подрібнення використано вид інтегро-дифференційного рівняння кінетики подрібнення, запропонований А. І. Загустиним. Ціль роботи – модифікувати вид рівняння кінетики подрібнення з урахуванням особливостей струминного подрібнення матеріалів. Для цього використано встановлені залежності характеристик акустичних сигналів, що фіксуються в зоні подрібнення, від технологічних параметрів процесу, від розміру часток і властивостей матеріалу. Розподільна і селективна функції подрібнення (чи функція відбору і руйнування) виражаються через максимальну амплітуду акустичних сигналів. Отримано частинний розв’язок рівняння для струминного подрібнення шамота. Проведено порівняння результатів розрахунку кінетики подрібнення з даними експериментального подрібнення на лабораторному струминному млині.

Kinetics for fine grinding the ore is analyzed. The form of an integral-differential Zagustin’s equation of the grinding kinetics is employed to describe variations in the distribution function of particles by sizes in grinding. The research objective is to modify the form of a kinetic equation for grinding considering the special features for material jet grinding. To attain this, the derived dependences of characteristics of the acoustic signals fixed in the grinding zone on the technological parameters of the process, particles sizes, and properties of the grinding material are used. Distributive and selective functions of grinding (or a function of selection and failure) are expressed by a maximal amplitude of the acoustic signals. A partial solution of the kinetic equation for jet grinding chamotte is obtained. The results of computations of the grinding kinetics are compared with the data of experimental grinding using the laboratory jet mill.

Ключевые слова: *тонкое измельчение, акустические сигналы, уравнение кинетики, амплитуда, узкая фракция.*

Введение. Вопросам теоретического анализа кинетики измельчения посвящено много исследований. Ведущее место среди моделей, посвященных описанию эволюции гранулометрического состава измельчаемых материалов, занимают популяционно-балансовые модели. Основой этих уравнений являются уравнения материальных балансов, записанные для фракций измельчаемого материала. Эти уравнения включают в себя селективную и распределительную функции, которые называются иногда функциями измельчения. Селективная функция характеризует вероятность разрушения частиц узкой фракции в единицу времени. Распределительная функция определяет плотность распределения вероятности образования частиц мелкой фракции при разрушении частиц крупной фракции.

Состояние вопроса. Для создания моделей необходим явный вид этих функций, который получают из специальных экспериментальных исследований. Иногда для этих целей используют «энергетические» законы измельчения Кирпичева–Кика, Бонда, Риттингера [1].

Впервые наиболее полную и теоретически обоснованную популяционно-балансовую модель кинетики измельчения создал А. И. Загустин. Эволюция функции распределения частиц по размерам $¥(l,t)$ $(0<l<l_{max})$ была описана с помощью интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial ¥(l,t)}{\partial t} = al^k \int_l^{l_{\max}} \frac{\partial ¥(¶,t)}{\partial ¶} \frac{d¶}{¶^{k-1}},$$

где t – время измельчения; a, k – параметры функций разрушения; $l, l_{\max}, ¶$ – фиксированный, максимальный и текущий размеры частиц соответственно. Для замыкания модели А. И. Загустин предложил частный вид измельчительных функций. В частности, селективная функция $S(¶)$ была представлена в виде линейной функции размера частиц, т. е. $S(¶) = a¶$. Распределительная функция была описана степенной функцией вида $¨(¶,l) = \frac{kl^{k-1}}{¶^k}$. Для данного представления функций измельчения в частном случае (при $k = 1$) было получено аналитическое решение уравнения в виде $R(l) = R(l_0)\exp(alt)$. Это уравнение широко используется для обработки экспериментальных данных и анализа кинетики измельчения.

Цель работы – рассмотреть вид интегро-дифференциального уравнения кинетики тонкого измельчения с учетом особенностей струйного измельчения материалов.

Материалы исследования. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение А. И. Загустина в виде:

$$\frac{\partial ¥(l,t)}{\partial t} = \int_l^{l_{\max}} f(R)¥_{втор}(R,l)¥(R,l)dR - f(l)¥(l,t), \qquad (1)$$

где $f(R)$, $f(l)$ – относительная скорость разрушения кусков исходной R и текущей l крупности, соответственно, мин$^{-1}$; $¥_{втор}(R,l)$ – дифференциальная характеристика крупности вторичной мелочи, т. е. материала, получаемого после разрушения начального куска размером R, см$^{-1}$, причем $0 < l < R$. Если известны функции $f(R)$, $¥_{втор}(R,l)$, то по решению уравнения (1) можно определить изменение во времени (кинетику) гранулометрической характеристики материала, т. е. функции $¥(l,t)$.

В работе зарубежных авторов [2] были выведены аналогичные (1) уравнения, которые стали основой моделирования процесса измельчения. Функция $f(R)$ получила название функции отбора (selection function), функция $¥_{втор}(R,l)$ – функции разрушения (breakage function). Однако вид функций измельчения определяли на основе экспериментальных измельчений различных материалов в разных мельницах.

Проведенные авторами исследования струйного измельчения материалов различных свойств (плотности, измельчаемости, исходной крупности) с применением акустического мониторинга процесса позволили установить связь технологических и акустических параметров [3]. Акустические сигналы фиксировались пьезокерамическими датчиками через волновод, установленный в зоне измельчения. Далее данные передавались через аналого-цифровой преобразователь на компьютер и обрабатывались в режиме текущего времени [3, 4].

Исследования позволили установить логарифмическую зависимость величины максимальной амплитуды *A* сигналов от размера частиц *d* измельченного продукта для различных материалов. На рис. 1 показаны логарифмические зависимости максимальной амплитуды от размера частиц при лабораторном струйном измельчении материалов. В частности, уравнение обобщенной экспериментальной зависимости, показанной на рис.1 имеет вид $\lg A = 0{,}92 \lg d + 0{,}71$ (*A*, мВ; *d*, мкм). Обозначение крупности параметром *d* указывает на экспериментальный характер полученных зависимостей. Его можно понимать как размер отверстий сита при определении гранулометрического состава продукта измельчения.

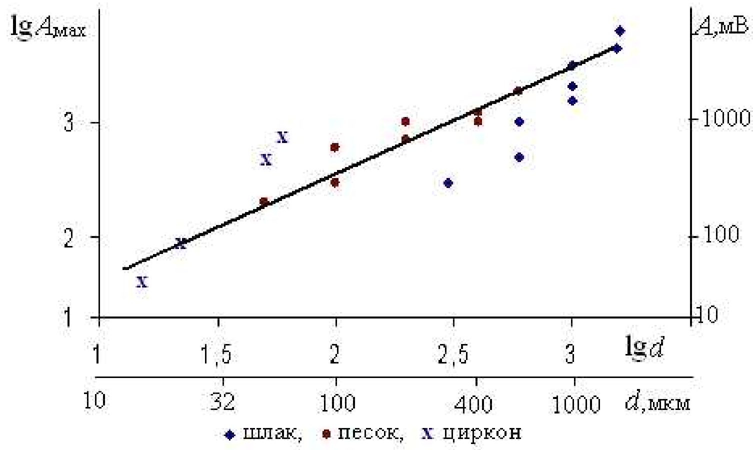


Рис. 1

На основе этих связей параметров определены уравнения зависимостей размера частиц от максимальной амплитуды при измельчении материалов: шлака lg*d* = 0,5 lg*A* + 1,3; с точностью ¯ = 0,97, кварца – lg*d* = 1,09 lg*A* + 0,81, ¯ = 0,95, циркона – lg*d* = 0,49 lg*A* + 0,37, ¯ =0,99 и при промышленном измельчении циркона – lg*d* = 0,52 lg*A* + 0,86, ¯ =0,98. Таким образом, в общем случае зависимость размера частиц от максимальной амплитуды сигналов зоны струйного измельчения можно определить уравнением:

$$\lg d = a \lg A + b \quad \text{или} \quad d = A^a \cdot 10^b, \qquad (2)$$

где коэффициенты a, b зависят от свойств материала.

На основании анализа экспериментальных данных в [3] установлена трехпараметрическая зависимость $k_A(A, d, {}^\circ)$ величины максимальной амплитуды акустических сигналов мониторинга от размера частиц измельченного продукта и плотности материала. Исследования показали, что наибольшее влияние оказывает плотность материала. Зависимость (2) можно представит в виде (см. рис. 2):

$$A = d \cdot 10^{0,4° +0,3}. \qquad (3)$$

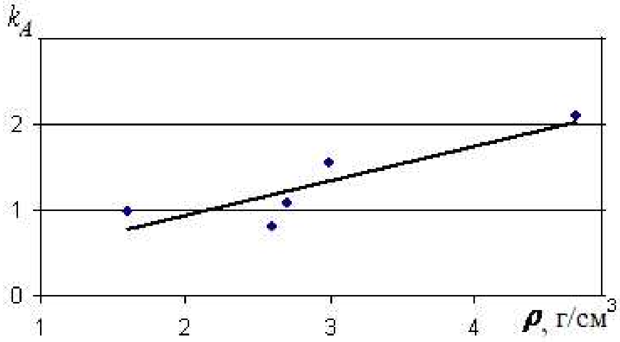


Рис. 2

Между величиной максимальной амплитуды и размером частиц продукта существует прямо пропорциональная зависимость (2), тогда как между амплитудой и плотностью – показательная зависимость с основанием десять.

На основании этого предлагается для тонкого измельчения материалов принять вид функции отбора в форме показательной функции:

$$f(R) = f(R, A) = R \cdot 10^{0,4° +0,3}, \qquad (4)$$

где A – максимальные значения амплитуды акустических сигналов, ° – плотность материала.

Рассмотрим вид функции разрушения. В своих исследованиях А. И. Загустин допускал ее вид:

$$¥_{втор}(R, r) = (k+1) r^k / R^{k+1}, \qquad (5)$$

где k – параметр Загустина, учитывающий неоднородность материала. Некоторые ученые экспериментально определяли другой вид функции разрушения. Так, Остин [2] в 1973 г. обобщил исследования по измельчению антрацита в шаровых мельницах и ввел функцию отбора параболического вида: $f(R) = f_{мах} + a(R - R_{крит})^2$. Д. Келсалл экспериментально показал, что интеграл от функции разрушения $Г^-(R, r)$ (кумулятивная функция разрушения «на минус», т. е. функция от суммарного выхода зерен крупности меньше размера отверстий на сите r) удовлетворяет уравнению [2]:

$$Г^-(R, r) = (r / R)^n, \text{ при } n = 0{,}9 \div 0{,}95, \qquad (6)$$

что близко к формуле Загустина (5) при $k \to 0$.

Примем для дальнейших рассуждений, что функция разрушения имеет вид степенной функции типа $¥_{втор}(R, l) = (l / R)^n$, где для определенности полагаем $n = 0{,}9$. С учетом установленной зависимости амплитуды акустических сигналов от размера частиц в потоке полагаем, что функция разрушения является функцией вида

$$¥_{втор}(R,r) = ¥_{втор}(R,r,A) \,. \qquad (7)$$

Тогда, используя формулу (2), получаем

$$¥_{втор}(R,r,A) = (r/R)^n = \left(\frac{A^r}{A^R}\right)^{an} . \qquad (8)$$

Исследования процесса измельчения в мельницах разного типа [3, 5] показали возможность описания его на основе оценивания математического ожидания *Mx* и среднеквадратичного отклонения гранулометрического состава материала ± вида:

$$\begin{cases} Mx = a_1 t^2 - a_2 t + a_3 \\ ± = b_1 t^2 - b_2 t + b_3 \end{cases} , \qquad (9)$$

где *t* – время измельчения, коэффициенты a_i, b_i зависят от материала и вида мельницы. Рассмотрим аналог дифференциальной функции крупности $¥(R,t)$, но в виде математического ожидания распределения по крупности, т. е. в этом случае функция разрушения имеет вид

$$¥(R,t) = M(R,t) = \sim_1 t^2 + \sim_2 t + \sim_3 \,. \qquad (10)$$

Перейдем к интегро-дифференциальному уравнению А. И. Загустина. Подставляем в (1) полученные значения функций $f(R), ¥_{втор}(R,l), ¥(R,L)$, входящих в уравнения из (4), (8), (10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial ¥(l,t)}{\partial t} &= \int_l^{l\max} f(R,A) ¥_{втор}(R,l,A) ¥(R,l) dR - f(l) ¥(l,t) = \\ &= 10^{0,4°+0,3} \left(\frac{A^r}{A^R}\right)^{an} \int_l^{l\max} RM(R,t) dR - f(l) ¥(l,t). \end{aligned} \qquad (11)$$

Обозначая выражение перед интегралом как коэффициент *C*, где

$$C = 10^{0,4°+0,3} \left(\frac{A^r}{A^R}\right)^{an} , \qquad (12)$$

получаем окончательный вид интегро-диференциального уравнения кинетики тонкого измельчения:

$$\frac{\partial ¥(l,t)}{\partial t} = C \int_l^{l\max} RM(R,t) dR - f(l) ¥(l,t) \,. \qquad (13)$$

Физический смысл уравнения (13) следующий: скорость изменения доли узкого класса $\frac{\partial ¥(l,t)}{\partial t}$ равна разности притока в него из более крупных ($R>l$) классов, которая оценивается интегралом в правой части, и оттока из него в более мелкие ($r<l$) классы, который оценивается последним членом правой части уравнения.

При решении уравнения (13) для конкретного случая задаются коэффициенты всех функций, входящих в величину *C*, и математическое ожидание гранулометрического состава материала.

Задача экспериментального изучения кинетики – нахождение численных значений коэффициентов и функций, входящих в уравнение кинетики, для заданного типа материала (руды) и условий измельчения. Так, для уравнения А. И. Загустина вида (1) необходимо найти пару функций: функцию отбора $f(R)$ и функцию разрушения $¥_{втор}(R,l)$.

Покажем вид предлагаемого уравнения (13) для случая струйного измельчения шамота. Выражение для дифференциальной функции крупности шамота $¥(R,t)$ через математическое ожидание имеет вид:

$$¥(R,t) = M(R,t) = 0{,}001t^2 - 0{,}06t + 1{,}07\ ,\ ¯ = 0{,}999\ . \qquad (14)$$

Рассмотрим кинетику измельчения узкой фракции, например (-1,0+0,63) за время измельчения 18 мин [6].

В таблице 1 представлены результаты выхода продукта (остатки на сите) в процентах по классам крупности за 7 циклов измельчения.

Таблица 1

Кинетика измельчения фракции (-1,0+0,63 мм) шамота в струйной лабораторной мельнице

t, мин	Классы крупности, мм; выход %									
	- 1,0 + 0,63	- 0,63 + 0,4	-0,4 + 0,315	- 0,315 + 0,2	- 0,2 + 0,16	- 0,16 + 0,1	- 0,1 + 0,063	- 0,063 + 0,05	- 0,05	Цикл
0	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	67,3	14,11	3,51	3,54	1,39	2,25	1,97	3,41	2,52	1
2	63,7	9,73	4,79	4,43	2,22	4,26	4,5	4,33	2,04	2
4	60,4	10,84	4,9	3,9	2,08	2,52	5,39	7,12	2,85	3
6	56,1	9,54	4,98	3,06	1,9	3,82	5,11	12,2	3,29	4
10	45,4	5,54	4,28	4,12	2,64	9,11	9,95	13,29	5,67	5
14	39,3	4,98	5,27	4,89	3,1	10,3	11,06	16,67	4,43	6
18	30,2	10,4	4,2	3,52	2,61	5,6	15,28	23,13	5,06	7

На рис. 3 представлена кинетика струйного измельчения шамота на примере выхода , % мелких фракций материала по результатам экспериментальных измельчений на лабораторной мельнице Института технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины производительностью 20 кг/ч.

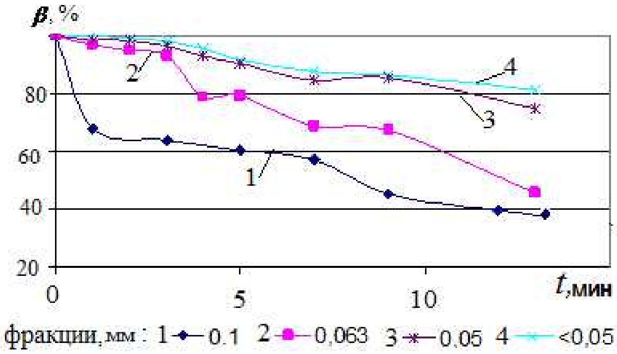


Рис. 3

Методика проведения экспериментального измельчения узких фракций следующая. Исходный материал (шамот) рассеивался на узкие фракции по остаткам на ситах с помощью специального механического гранулометра. Затем каждый класс крупности (узкая фракция одинаковой массы) измельчался на струйной установке при давлении воздуха 0,3 МПа несколько циклов по Δt = 1–4 мин (в первой колонке табл. 1 показано текущее суммарное время измельчения). В конце каждого цикла полученный измельченный продукт и материал циркулирующей нагрузки смешивались, определялся полученный грансостав, и вся смесь вновь запускалась на измельчение на следующий цикл. При этом проводился акустический мониторинг процесса. Согласно разработанной аппаратной схеме [4] сигналы, улавливаемые датчиком, соединенным с волноводом в камере измельчения, передавались на аналого-цифровой преобразователь, компьютер и обрабатывались в режиме текущего времени. По результатам акустического мониторинга и исследованиям, проведенным ранее при измельчении шамота, были определены необходимые параметры и коэффициенты для уточнения предлагаемого интегро-дифференциального уравнения тонкого измельчения (13).

Уравнение зависимости максимальной амплитуды акустических сигналов от величины частиц при струйном измельчении шамота имеет вид $\lg A = 1{,}1\lg d + 0{,}1$ при ¯ =0,92. Поэтому показатель степени в выражении (12) $an = 0{,}9 \cdot \frac{1}{1{,}1} = 0{,}82$. Учитывая, что плотность шамота ° $= 2{,}7$, отношение максимальных амплитуд сигналов акустического мониторинга процесса измельчения шамота $\left(\frac{A^d}{A^R}\right) = 0{,}2$, тогда получаем коэффициент $C = 6{,}4$.

В таком случае получаем частный вид интегро-дифференциального уравнения кинетики струйного измельчения шамота:

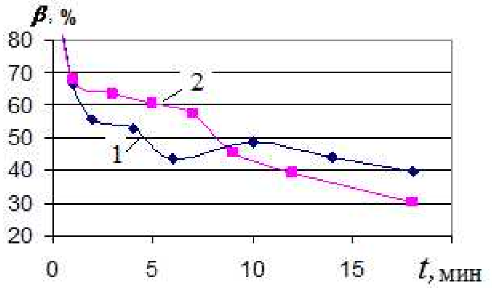
$$\frac{\partial \text{¥}(l,t)}{\partial t} = C\int_{l}^{l_{\max}} RM(R)dR - f(l)\text{¥}(l,t) =$$
$$= 6{,}4\int_{l}^{l_{\max}} R(0{,}001t^2 - 0{,}06t + 1{,}07)dR - f(l)\text{¥}(l,t). \qquad (15)$$

Преобразовав (15), получаем решение уравнения кинетики струйного измельчения шамота:

$$\text{¥}(l,t) = (0{,}0032t^2 - 0{,}192t + 3{,}424)(l_{\max}^2 - l^2) - f(l)\text{¥}(l,t)\,, \qquad (16)$$

где $f(l)\text{¥}(l,t)$ – отток мелких фракций, t – время измельчения, l, l_{max} – верхняя граница исследуемого класса и исходного материала соответственно.

На рис. 3 приведены результаты сравнения кинетики гранулометрического состава фракции (-0,1+0,63) на основе расчетов по формуле (13) или (16) и по экспериментальным данным, при этом среднеквадратичная погрешность составляет 0,84.



1–расчетные 2–экспериментальные данные

Рис. 3

Таким образом, имея предварительные данные для определения коэффициентов уравнения по (13), в любой момент измельчения можно определить состав исследуемой фракции материала.

Выводы. Установлен модифицированный вид интегро-дифференциального уравнения кинетики тонкого измельчения руд с учетом зависимости характеристик сигналов акустического мониторинга от размера частиц. Получено частное решение уравнения для струйного измельчения шамота. Проведено сравнение результатов расчета кинетики измельчения узкой фракции шамота по интегро-дифференциальному уравнению кинетики и по данным экспериментального измельчения на лабораторной струйной мельнице.

1. *Линч А. Д.* Циклы дробления и измельчения. Моделирование, оптимизация, проектирование и управление: пер с англ. М. : Недра, 1981. 343 с.

2. *Андреев Е. Е., Тихонов О. Н.* Дробление, измельчение и подготовка сырья к обогащению. СПб: Санкт-Петербургский гос. горный ун-т. 2007. 439 с.

3. *Прядко Н. С.* Развитие теории тонкого измельчения полезных ископаемых: автореферат дисс. … д-ра техн. наук: 05.15.08 НГУ. – Днепропетровск, 2015. 36 с.

4. Прядко Н.С. Акустико-эмиссионный мониторинг процесса струйного измельчения // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. 2012. № 6. С. 46 – 52.

5. *Прядко Н. С., Стрельников Г. А., Терновая Е. В., Грушко В. А., Пясецкий Н. Ю.* О скорости тонкого измельчения руд мельницами различного типа. Техническая механика. 2014. №3. С. 114 – 121.

6. *Пилов П. И. Прядко Н. С., Терновая Е. В.* Кинетика измельчения смеси фракций крупности. Збагачення корисних копалин. Дн-ск.: НГУ. 2014. №58 (99). С. 101 – 106.

Получено 15.11.2016,
в окончательном варианте 20.12.2016