УДК 621.66

И. А. ТАРАН, М. Н. ТРУБИЦИН

ДВИЖЕНИЕ РОТОРА НА ВЫБЕГЕ ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ СОЧЕТАНИИ СЛАГАЕМЫХ СУММАРНОГО МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ВРАЩЕНИЮ

Работа посвящена актуальной проблеме аналитического обоснования определения интегральных характеристик роторных систем, знание которых необходимо для проведения дальнейшей балансировки роторов на выбеге (пуске). Это позволит отказаться от использования контактных вибрационных датчиков и другой специальной аппаратуры для мониторинга процесса балансировки. Цель работы – разработка алгоритма определения интегральных характеристик роторной системы на выбеге при специальном соотношении (положительный дискриминант) коэффициентов моментов-слагаемых суммарного момента сопротивления вращению. Построен однозначный последовательный алгоритм определения осевого момента инерции ротора, необходимых коэффициентов уравнения суммарного момента сопротивления вращению ротора, суммарной фрикционной характеристики, приведенной массы ротора и осевого расположения центра масс. Для определения всех этих величин достаточно провести четыре пуска. Выполнена градация вносимых возмущений в роторную систему. Показан общий подход к решению задачи без применения метода наименьших квадратов в полном объеме, исключающем решение многомодальных оптимизационных задач и выбор критерия оптимизации.

Робота присвячена актуальній проблемі аналітичного обґрунтування визначення інтегральних характеристик роторних систем, знання яких необхідно для проведення подальшого балансування ротора на вибізі (пуску). Це дозволить відмовитись від контактних вібродатчиків і апаратури для моніторингу процесу балансування. Мета роботи – розробка алгоритму визначення інтегральних характеристик роторної системи на вибізі при спеціальному співвідношенні (позитивний дискримінант) коефіцієнтів моментів-складових сумарного моменту опору обертанню ротора. Побудовано послідовний алгоритм обчислення моменту інерції ротора, необхідних коефіцієнтів рівняння сумарного моменту опору обертанню ротора, сумарної фрикційної характеристики, приведеної маси ротора та розташування його центру мас на вісі. Для визначення цих величин достатньо провести чотири пуски. Виконано градацію внесення змін до роторної системи. Показано загальний підхід до рішення задачі без використання методу найменших квадратів у повному обсязі, що виключає рішення багатомодальних оптимізаційних задач і вибір критерію оптимізації.

The study focuses on the pressing problem of an analytical validation of the integral characteristics of the rotor systems for further balancing the rotors at rundown (at start). This allows dismissing the contact vibration pickups and other special instruments for monitoring the balancing process. The work aim is to develop an algorithm of the determination of the integral characteristics of the rundown rotor system in the presence of a special relation (a positive discriminant) of the coefficients of moments, which are summands of a total moment of rotational drag. A one-to-one sequent algorithm is built to determine an axial moment of the rotor inertia, the needed coefficients of the equation of a total moment of rotational drag, a total frictional characteristic, a reduced mass of the rotor, and an axial location of the center of mass. Four starts would suffice to determine these magnitudes. The presented disturbances of the rotor system are graded. A general approach to the solution of the problem without the method of least squares in full measure is presented. This obviates the solution of the multi-modal optimization problems and a choice of an optimization criterion.

Ключевые слова*: роторная система, балансировка, выбег, фрикционные, массовые и геометрические характеристики ротора, момент сопротивления вращению.*

Введение. Любой вид или способ современной балансировки роторных систем производится: а) внесением последовательных известных возмущений (например, пробных дебалансов); б) отслеживанием реакции роторной системы на эти возмущения (чаще всего – только амплитуды или амплитуды плюс фазы колебаний опор ротора); в) обработкой полученных экспериментальных данных с получением значений корректирующих дебалансов. Проводимые здесь измерения относятся к косвенным, т. к. размерности дебалансов соответствуют размерностям статического момента (кг·м, г·см и т. д.) и эта специфика (одновременное присутствие в размерности и массовых, и линейных величин) не дает возможности проведения непосредственного прямого измерения дебалансов. Следовательно, разработка новых, более надежных, уточняющих и обоснованных подходов к проведению балансировки роторных систем должна базироваться на измерениях более простых, чем параметры колебаний опор, косвенных величин. В плане измерения и дальнейшей обработки зависимостей наиболее простыми величинами являются угол поворота ротора $\varphi(t)$ и его производные: угловая скорость $\omega(t)$ и замедление вращения $\varepsilon(t)$. При производстве замеров на выбеге ротора можно за один пуск (выбег) получить достаточное количество точек (условий) за время t для определения текущих параметров самой роторной системы с дальнейшим использованием метода наименьших квадратов (МНК) в полном объеме либо аналитического нахождения 2…4 искомых параметров при произвольных $\phi, \omega, \varepsilon$. Использование процесса выбега во время штатных остановок роторных систем с определением текущих наиболее значимых интегральных параметров:

- геометрических – приведенного момента инерции ротора J_P, кг·см^2, осевой координаты центра масс ротора x_P, см;
- массового – приведенной силы тяжести ротора G_P, кгс;
- технологического – коэффициента m, кг·м^2/с, линейного слагаемого $m{\cdot}\omega$, Н·см, общего момента сопротивления вращению ротора $M_{СОПР}$, Н·м;
- фрикционного – приведенного радиуса трения $r_п \cdot f$, см, одинаковых подшипников статически определимого ротора

позволит перейти к решению задачи балансировки ротора с одновременным мониторингом состояния его основных элементов. Таким образом, задачи балансировки и мониторинга на выбеге оказываются взаимосвязанными, поэтому актуальность данной работы заключается в аналитическом обосновании определения перечисленных интегральных характеристик роторных систем, знание которых необходимо для проведения дальнейшей балансировки роторов на выбеге.

В последнем случае появляется реальная возможность: отказа от специальных контактных датчиков и аппаратуры для измерения и фиксации параметров колебаний опор ротора; использования штатных остановок работы ротора для проведения мониторинга его узлов; представления выбега как отдельного пробного пуска для балансировки методом амплитуд (МА). При этом задача определения геометрических, массовых, фрикционных и технологических параметров является предшествующей задаче балансировки ротора.

Состояние вопроса. Известно два основных современных уточняющих приема при производстве балансировки роторных систем [1]: внесение корректирующих масс (дебалансов) и специальная обработка цапф ротора в месте контакта их с опорными подшипниками. Реакция балансируемой (исследуемой) роторной системы определяется с помощью вибродатчиков, позволяющих экспериментально определить виброперемещение, скорость или ускорение опор ротора. Четких рекомендаций по применению типов этих контактных вибродатчиков в специальной литературе [1, 2 и др.] нами не обнаружено. Переходя к другим, более простым видам проводимых косвенных измерений при балансировке, приходим к возможному использованию выбега. В [3] рассматривается балансировка ротора на выбеге, но при обязательном прохождении системой резонансной скорости. Последнее, очевидно, связано с усилением эффекта действия возмущающей силы (произведения дебаланса и квадрата угловой скорости) при прохождении системой резонансной частоты. Величиной, измеренной при пуске, здесь опять является более ярко выраженная амплитуда колебаний опоры ротора.

Отказ от использования контактных вибродатчиков позволит упростить производство косвенных измерений при одновременном усложнении проводимых расчетов и получении более «объемных» суммарных (отражающих влияние изменения скорости вращения), а не текущих, величин-характеристик роторной системы при фиксированном значении ω.

Цель работы – разработка алгоритма определения интегральных характеристик роторной системы на выбеге при специальном соотношении (положительный дискриминант) коэффициентов моментов-слагаемых суммарного момента сопротивления вращению. Тогда идея работы будет состоять в троекратном использовании одной величины времени полного выбега (ПВ) ротора при равномерном делении (на 4 отрезка) временного интервала.

Постановка задачи. Второй закон Ньютона для замедленного вращательного движения ротора по инерции – на выбеге – имеет вид

$$-J \cdot \varepsilon = -J\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \mu \cdot \omega^2 + m \cdot \omega + M \ ,$$

где J – момент инерции ротора, μ – коэффициент винтеляторного момента, M – постоянное слагаемое момента сопротивлению вращения, замедление вращения $\varepsilon = d\omega / dt$ берется с положительным знаком, а суммарный момент сопротивления вращению M представим ограниченно, а именно, первыми тремя членами степенного ряда по основному параметру процесса замедленного вращения – угловой скорости ω. Тогда первый интеграл дифференциального уравнения имеет вид уравнения с разделяющимися переменными

$$-J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \mu \cdot \omega^2 + m \cdot \omega + M \quad \text{или}$$

$$J \int_{\omega}^{\omega_0} \frac{d\omega}{\mu\omega^2 + m\omega + M} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 \ ,$$

где t_0 – начальное время.

Вводя для интеграла обозначение первообразной F, можно записать, с учетом начального условия $\omega\big|_{t=t_0} = \omega_0$, общее решение

$$t(\omega) = t_0 + J[F(\mu, m, M, \omega_0) - F(\mu, m, M, \omega)], \qquad (1)$$

где в зависимости от соотношения коэффициентов μ, m, M и величины дискриминанта $\Delta = 4\mu M - m^2$ первообразная принимает одно из четырех значений

$$F(\mu, m, M, \omega) = J \cdot \begin{cases} \dfrac{\omega}{M}, & \text{при} \quad \mu = 0, m = 0, \Delta = 4\mu M - m^2 = 0 \\ \dfrac{-2}{m + 2\mu\omega}, & \text{при} \quad \Delta = 0, \mu + m \neq 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{m + 2\mu\omega}{\sqrt{\Delta}}\right), & \text{при} \quad \Delta > 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{m + 2\mu\omega}{\sqrt{-\Delta}}\right), & \text{при} \quad \Delta < 0 \end{cases} .$$

В настоящей работе рассматривается только один третий вариант, соответствующий условию $\Delta = 4\mu M - m^2 > 0$. Два первых варианта $\Delta = 0$ были рассмотрены нами ранее в [4, 5]. Надеемся, что четвертый, последний вариант соотношения коэффициентов μ, m, M, рассмотрение которого выходит за рамки данной работы, не будет принципиально отличаться от предлагаемого.

Нужное решение теперь будет выбираться из четырех возможных по МНК – либо по критерию минимальности суммы квадратов невязок; либо по минимуму наибольшей невязки; либо по какому-то другому специальному критерию. В силу существенной трансцендентности первообразной $F(\mu, m, M, \omega)$ и, следовательно, еще более сложного вида второго интеграла дифференциального уравнения (для угла поворота ротора) минимизация по МНК не даст гарантированного нужного решения – набора μ, m, M. Наличие нескольких возможных решений задачи минимизации по МНК потребует выбора нужного решения по неизвестному пока критерию. А перебор четырех вариантов получаемых решений значительно усложнит логику выхода на единственно нужный и правильный ответ всей поставленной задачи. В связи с этим, покажем получение решения рассматриваемого третьего варианта (Δ>0) в законченном аналитическом виде, аналогичном решениям [4, 5].

Материалы исследований. Получение решений рассматриваемых дифференциальных уравнений не представляет собой какой-либо сложной процедуры и поэтому схематично представлено в табл. 1.

Таблица 1

№	Параметры	Аналитические выражения для случая $\Delta = 4\mu M - m^2 > 0$
1	2	3
1	Исходный интеграл	$\int \frac{J\,d\omega}{\mu\omega^2 + m\omega + M} = \frac{2J}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\frac{m + 2\mu\omega}{\sqrt{\Delta}}\right) + C$
2	I-й интеграл дифференциального уравнения	$t(\omega) = t_0 + \frac{2J}{\sqrt{\Delta}} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{(\omega_0 - \omega)\sqrt{\Delta}}{2M + m\omega_0 + (2\mu\omega_0 + m)\omega}\right]$
3	Время полного выбега	$t_{ПВ} := t(0)\Big\vert_{t_0=0} = \frac{2J}{\sqrt{\Delta}} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{\omega_0\sqrt{\Delta}}{2M + m\omega_0}\right]$
4	Изменение скорости вращения	$\omega(t) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\mu} \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{m + 2\mu\omega_0}{\sqrt{\Delta}}\right) - \frac{(t - t_0)\sqrt{\Delta}}{2J}\right] - \frac{m}{2\mu}$, проверка: $\omega(t_{ПВ})=0$
5	II-й интеграл дифференциального уравнения	$\varphi(t) = \frac{J}{\mu} \ln\cos\left[Z - \frac{\sqrt{\Delta}}{2J}(t - t_0)\right] \cdot \cos^{-1}[Z] - \frac{m}{2\mu}(t - t_0)$, где $Z = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\mu\omega_0 + m}{\sqrt{\Delta}}\right)$

1	2	3
6	Угол поворота в зависимости от скорости вращения:	$$\phi(\omega)=\frac{J}{2\mu}\left[\ln\left(\frac{\mu\omega_0^2+m\omega_0+M}{\mu\omega^2+m\omega+M}\right)-\right.$$ $$\left.-\frac{2m}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\mu(\omega_0-\omega)\sqrt{\Delta}}{\Delta+(m+2\mu\omega)(m+2\mu\omega_0)}\right)\right]$$
7	Угол полного выбега	$$\varphi(t_{\text{ПВ}})\Big\vert_{t_0=0}=\phi_{\text{ПВ}}=\phi(0)=\frac{J}{2\mu}\left[\ln\left(\frac{\mu\omega_0^2+m\omega_0+M}{M}\right)-\right.$$ $$\left.-\frac{2m}{\sqrt{\Delta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_0\sqrt{\Delta}}{m\omega_0+2M}\right)\right]$$

Наиболее простой вид полученных зависимостей имеет место, как и следовало ожидать, в первом интеграле и выражается суммарной характеристикой – временем ПВ $t_{ПВ}$ (строка № 3, табл. 1). Решения $\omega(t), \varphi(t), \varphi_{ПВ}$ и закона движения $\varphi(\omega)$ (строки № 4, 7 табл. 1) имеют более сложный вид, чем $t_{ПВ}$, и поэтому в дальнейшем не рассматриваются. Отметим, что суммарная оценка роторной системы $t_{ПВ}$ также самым простым образом замеряется во время проведения экспериментального пуска (выбега) – обычным секундомером.

Пример получаемых графических зависимостей $\omega(t), \varphi(t), \varphi(\omega)$ приведен в табл. 2, где средствами пакета MathCad-14 построены графики аналитических решений (сплошные линии), функции-решения дифференциальных уравнений встроенными процедурами (светлые пунктирные линии), формальные интегральные решения, их аргументы соответствуют своим пределам интегрирования.

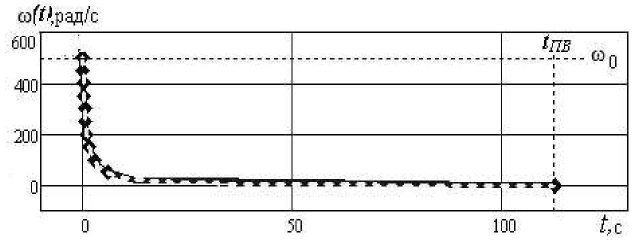
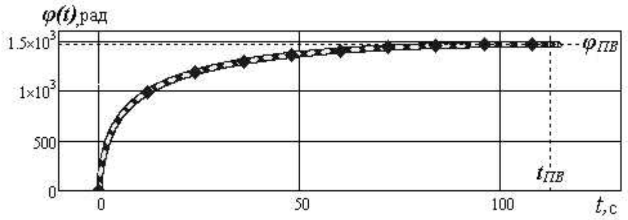
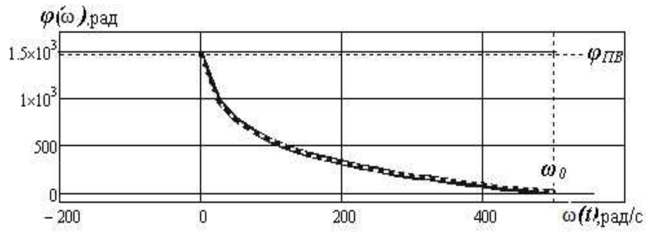
Такое дублирование графических зависимостей было с «запасом» принято ради перестраховки – 2–3 кратной проверки совпадения получаемых аналитических и, следовательно, графических результатов.

Уточненную формулировку задачи теперь можно представить так: по известной зависимости выбега $\varphi(t)$, а следовательно, и $\omega(t)$ или $\varepsilon(t)$, а также граничным величинам $t_{ПВ}, \varphi_{ПВ}, \omega_0$ определить следующие интегральные характеристики роторной системы:

- момент инерции ротора J_P;
- коэффициент μ квадратичного слагаемого $\mu\omega^2$ (инерционный момент);
- коэффициент m линейного слагаемого $m\omega$ (линейный момент);
- постоянное слагаемое $M=(r_П f)\cdot G_p$ (гравитационный момент);

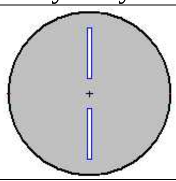
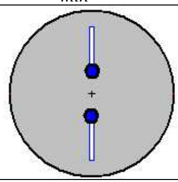
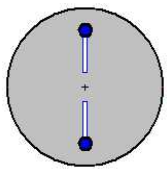
последние три слагаемые будут представлять собой суммарный момент сопротивления вращению $M_{СОП\,Р}=\mu\omega^2+m\omega+(r_П\cdot f)\cdot G_p$ ротора.

Таблица 2

Графики полученных зависимостей	
В расчетах принято:	J = 700 кг·м^2; M = 23 Н·м; μ = 2 кг·м^2; m = 10 кг·м^2/с; Δ = 84 (кг·м^2/с)^2; t_0 = 0 с; φ_0 = 0 рад; ω_0 = 500 рад/с.
Время полного выбега	$t_{ПВ}$ = 112,625 с
Угол полного выбега	$\varphi_{ПВ}$ = 1468 рад = 233,639 об
Скорость вращения в зависимости от времени – гиперболическая зависимость	
Угол поворота ротора в зависимости от времени – логарифмическая зависимость, экстремум в точке ($t_{ПВ}$; $\varphi_{ПВ}$)	
Угол поворота ротора в зависимости от скорости вращения – логарифмическая зависимость, экстремум в точке (0; $\varphi_{ПВ}$)	

Первое и второе возмущения, вносимые в роторную систему – это пары уравновешенных грузов $G_Г$ с различными моментами инерции $J_Г$ и, следовательно, одинаковыми суммарными моментами сопротивления вращению $M_{СОПР}$, в силу неизменности всех остальных параметров, табл. 3.

Таблица 3

Параметры	Расположение двух грузиков по m=70 г		
	отсутствуют	на r_{min}= 4 см	на r_{max}= 9 см
Схема нагружения плоскости коррекции (диска)			
Обозначение схемы	0	*min*	*max*
Момент инерции $J_Г = 2 \cdot m \cdot r^2$, кг·см^2	0	2,24	11,34

В случае использования одинаковых подшипников (с одинаковым износом) в статически определимом уравновешенном однопролетном роторе, примем для третьего возмущения системы одновременное изменение $G_Г$ и J_P. Это позволит на основании 4-х пусков (выбегов), предлагаемая схема которых представлена на рис. 1, определить искомые величины $\mu, m, \left(r_П \cdot f\right), G_p, x_p$, использовав алгоритм МНК в полном объеме или упрощенный вариант определения коэффициентов μ, m, M, основанный на использовании кратных углов tg(1δ; 2δ; 3δ) и дающий нужное и единственное решение задачи.

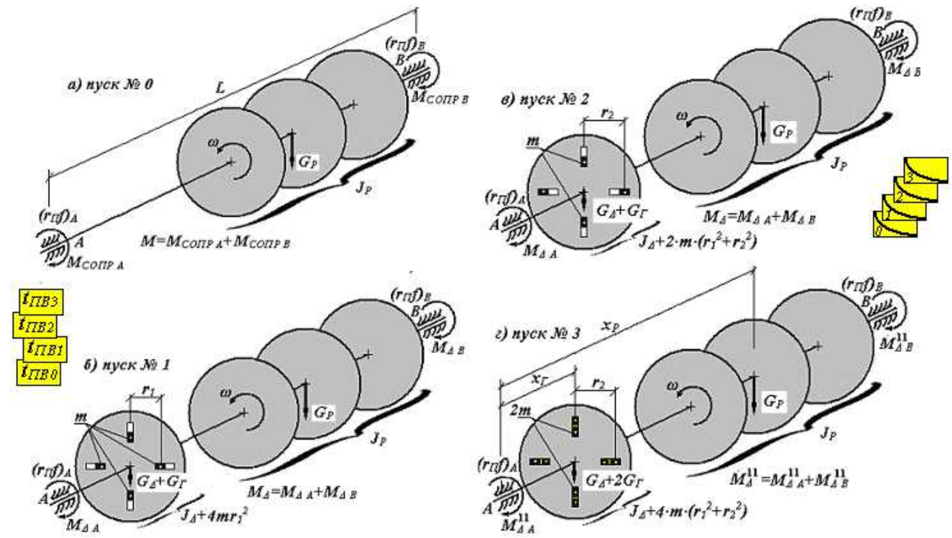


Рис. 1

Принятие условия эквивалентности подшипников ротора $\left(r_П \cdot f\right) = \left(r_П \cdot f\right)_A = \left(r_П \cdot f\right)_B \cdot \left(r \cdot f\right)$ дает существенную возможность упрощения дальнейших выкладок и непосредственного получения величин массовых G_P и геометрических x_P характеристик. В случае отличия подшипников ротора $(r_П f)_A \neq (r_П f)_B$, за счет дублирования 3-х условий равновесия плоской задачи механики, имеем одно недостающее уравнение и, как следствие отсюда, условие связи $G_p\left(x_p\right)$ или $x_p\left(G_p\right)$, а не два несвязанных условия для отдельного определения G_p и x_p. Аналогичные результаты будем иметь и для консольного ротора с одинаковыми или различными подшипниками. Разница будет заключаться только в превышении величины суммарной вертикальной реакции подшипников ротора над силой тяжести G_p [4] за счет выноса центра тяжести ротора из межопорной части на консольную. Очевидно, что разрабатываемый алгоритм должен соответствовать естественному требованию и балансировки, и мониторинга ротора – проведению процесса за минимальное количество пусков (в нашем случае – выбегов). Взаимосвязь задач балансировки и выбега роторов можно также показать и с точки зрения формирования слагаемых суммарного момента сопротивления вращению, рис. 2: *а*), *б*) инерционный и винтеляторный момент $M_W = \mu\omega^2$; *в*) линейный момент $M_N = m\omega$; *г*) гравитационный момент $M_G = \left(r_П \cdot f\right) \cdot G_p = \left(r_П f\right) \cdot \left(R_A + R_B\right)$.

Идентичность определения и формирования выражений для слагаемых суммарного момента сопротивления вращению $M_{СОПР}$ подтверждает тесную взаимосвязь задач балансировки и мониторинга роторных систем, в т. ч. и на выбеге.

Алгоритм определения характеристик ротора на выбеге разобьем на последовательные три этапа. На первом будем определять осевой момент инерции J_p ротора, на втором – коэффициенты μ, m, M ; на третьем – $(r_П \cdot f), G_p, x_p$.

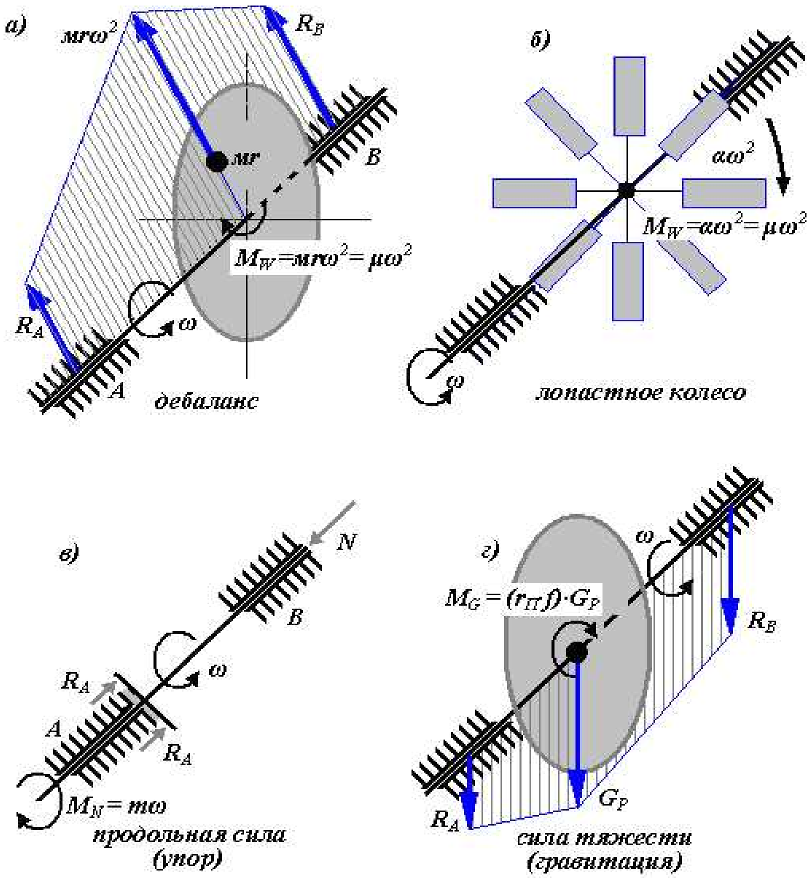


Рис. 2

1. Определение момента инерции J_P. Согласно (1) время полного выбега для пусков № 1, 2 составит:

$$t_{ПВ1} = (J_P + J_{Г1}) \cdot [F(\mu, m, M, \omega_0) - F(\mu, m, M, 0)] ;$$
$$t_{ПВ2} = (J_P + J_{Г2}) \cdot [F(\mu, m, M, \omega_0) - F(\mu, m, M, 0)] .$$

Считая неизменными все характеристики ротора, кроме J_P, приравняем сомножители в квадратных скобках, получим выражение

$$J_P = \frac{J_{Г2} t_{ПВ2} - J_{Г1} t_{ПВ1}}{t_{ПВ1} - t_{ПВ2}}, \tag{2}$$

которое экспериментально проверим на лабораторной установке ТММ-35, рис. 3, где 1, 2, 3 – диски нагрузочных плоскостей; А, В – диски плоскостей коррекции; Р – разгонный диск. Выбеги, соответствующие пускам № 1, 2, табл. 3 и рис. 1, будем производить из плоскостей А, 2, В – схемы табл. 4.

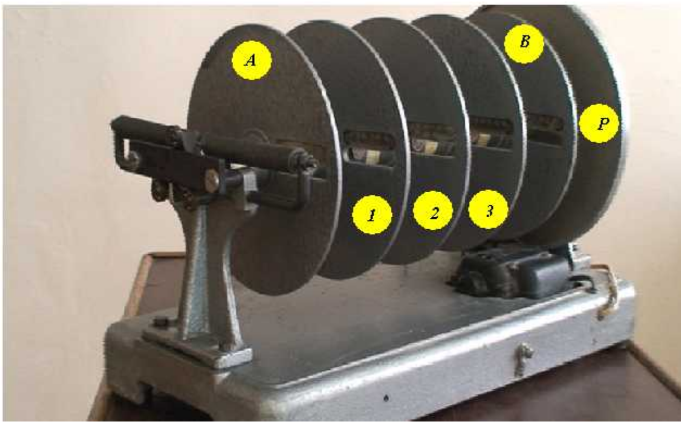
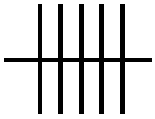
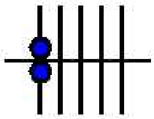
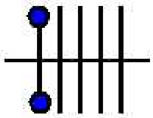
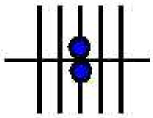
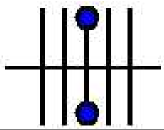
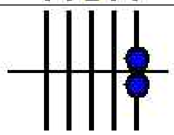
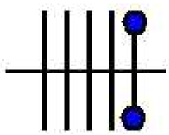


Рис. 3

Результаты расчета момента инерции по (2) показаны в табл. 4, где окончательный формальный (при большом разбросе J_P) результат дан в последней строке. После определения величины осевого момента инерции ротора J_P перейдем к следующим этапам разрабатываемого алгоритма.

Таблица 4

№	Схема расположения грузиков на ТММ-35	Обозн.	Время полных выбегов $t_{ПВ}$, с				J_P, кг·см^2
			№ опытов			среднее	
			1	2	3		
1		***0***	100,03	101,88	99,31	100,407	-
2		***min***	108,81	114,61	102,87	108,763	1387,90 (диск А)
3		***max***	110,47	108,13	109,84	109,48	
4		***min***	102,1	106,65	104,35	104,367	534,491 (диск 2)
5		***max***	103,54	109,62	105,34	106,167	
6		***min***	91,08	96,3	97,56	94,98	230,391 (диск В)
7		***max***	100,75	97,69	98,1	98,847	
Среднее значение момента инерции ротора					J_P, кг·см^2		717,594

2. Определение коэффициентов μ, *m*, *M*. Предлагаем трижды использовать наиболее простое аналитическое выражение для $t_{ПВ}$ (табл. 1) по количеству искомых неизвестных в виде:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{t_{ПВ}\cdot\sqrt{\Delta}}{2J}\right)=\frac{\omega_0\sqrt{\Delta}}{2M+m\omega_0}.$$

Разобьем временной интервал ПВ $0 \le t \le t_{ПВ}$ на четыре одинаковых подинтервала $\delta = t_{ПВ}/4$, рис. 4.

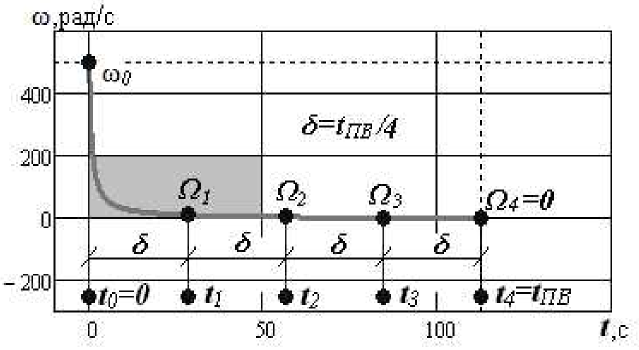


Рис. 4

Составим систему минимального количества уравнений (трех) по кратным углам тангенсов для каждого выбега, рис. 1. При этом, в идеальном случае, получаемые значения μ и *m* для различных выбегов должны будут совпасть. Это свойство можно использовать как проверку точности получения и обработки экспериментальных величин выбега. Согласно рис. 4, при троекратном использовании эффекта ПВ исходная система будет иметь вид:

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\left(\dfrac{1\delta\cdot\sqrt{\Delta}}{2J}\right)=\dfrac{\Omega_3\sqrt{\Delta}}{2M+m\Omega_3}\\ \mathrm{tg}\left(\dfrac{2\delta\cdot\sqrt{\Delta}}{2J}\right)=\dfrac{\Omega_2\sqrt{\Delta}}{2M+m\Omega_2}\\ \mathrm{tg}\left(\dfrac{3\delta\cdot\sqrt{\Delta}}{2J}\right)=\dfrac{\Omega_1\sqrt{\Delta}}{2M+m\Omega_1}\end{cases}. \qquad (3)$$

Таким образом избавляемся от расчетов в крайних, нежелательных точках t_0 и $t_{ПВ}$ и сдвигаемся к середине временного интервала, приближаясь к его нужному участку (серый прямоугольник, рис. 4), на котором исследуемая функция $\omega(t)$ имеет наиболее ярко выраженный характер (кривизна в принятых масштабах графика – максимальна).

Применяя выражения кратных углов функции tg, исключая из первых двух уравнений $\mathrm{tg}^2(\ldots)$, избавимся от трансцендентности. Производя дальнейшие традиционные алгебраические упрощения, получим единственное окончательное решение системы в виде

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mu}{M} = \dfrac{\Omega_1\Omega_3 + \Omega_2\Omega_3 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2}{\Omega_2\Omega_3^2(\Omega_1 - \Omega_2)} \\
\dfrac{m}{M} = \dfrac{\Omega_1\Omega_2 - 3\Omega_1\Omega_3 + \Omega_2\Omega_3 + \Omega_3^2}{\Omega_3^2(\Omega_1 - \Omega_2)} \\
M = \dfrac{2J}{t_1\sqrt{4\dfrac{\mu}{M} - (\dfrac{m}{M})^2}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\Omega_3\sqrt{4\dfrac{\mu}{M} - (\mu/M)^2}}{2 + \dfrac{m}{M}\Omega_3}\right)
\end{cases}. \tag{4}
$$

Выполнение сокращений в уравнениях такой системы, как (3), в общем случае может отбросить ее возможные частные решения. Покажем, табл. 5, что такие действия при переходе от (3) к (4) и вне зависимости от кратности повторения возможных решений не дадут подходящих результатов. Найденные значения μ, *M*, *m* позволяют перейти к последнему этапу нахождения суммарных характеристик роторной системы.

3.1. Определение приведенной фрикционной характеристики $(r_П f)$.

Ограничимся четырьмя пусками, рис. 1, где будем использовать одновременное массовое и геометрическое возмущение в роторной системе, т. к. произвести заданное изменение фрикционных свойств подшипников ротора затруднительно. При известном J_p и обработанных экспериментальных данных выбегов пусков № 2, 3 составим матрицу найденных коэффициентов слагаемых суммарного момента сопротивления вращению ротора. Номера пусков обозначим в нижних индексах коэффициентов

$$
\begin{bmatrix}
\mu_2 & m_2 & M_2 = (r_П f)(G_P + G_{Г2}) \\
\mu_3 & m_3 & M_3 = (r_П f)(G_P + G_{Г3})
\end{bmatrix}
$$

Таблица 5

<table>
<tr><th>Сокращаемый сомножитель, коэффициент</th><th colspan="2">Условие несоответствия возможного решения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sqrt{4\mu M - m^2} = 0$</td><td colspan="2">$\sqrt{\Delta} = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">в работе рассматривается частный случай Δ > 0</td></tr>
<tr><td>$2M + m\omega_{1,2,3} = 0$</td><td>$\dfrac{M}{m} = -\dfrac{\omega_{1,2,3}}{2} < 0$</td><td rowspan="2">*M* и *m* – положительные</td></tr>
<tr><td>$3\omega_3(2M + m\omega_2) = \omega_2(2M + m\omega_3)$</td><td>$\dfrac{M}{m} = \dfrac{\omega_2\omega_3}{\omega_2 - 3\omega_3} < 0$</td></tr>
<tr><td>*M*=0</td><td colspan="2">При этом случай $\Delta = 4\mu M - m^2 < 0$ в работе не рассматривается</td></tr>
</table>

Разница элементов последнего столбца этой матрицы даст

$$\left(r_П f\right) = \frac{M_2 - M_3}{G_{Г2} - G_{Г3}}. \qquad (5)$$

3.2. Определение массовой и геометрической характеристик G_P **и** x_P имеет существенное значение для эксплуатации, мониторинга и балансировки составных роторов, а также отслеживания износа и перераспределения их массы. Отметим, что выбору вида возмущений пусков № 2, 3 соответствует тип искомых характеристик. При найденных ранее величинах M_n и $\left(r_П f\right)$ легко определяется вес ротора, при обработанных данных выбега любого пуска n = 1, 2, 3 и нулевого

$$G_P = \frac{M_n}{\left(r_П f\right)} - G_{Гn} = \frac{M_0}{\left(r_П f\right)}. \qquad (6)$$

Для определения осевого расположения центра масс ротора воспользуемся любым пуском с внесенными грузиками – $G_Г$, рис. 1, 2. Вертикальные реакции подшипников ротора на действия сил тяжести $G_Г$ и G_P составят, рис. 2, *г*):

$$\begin{cases} R_A = G_P \dfrac{x_P - l}{l} + G_Г \dfrac{x_Г - l}{l} \\ R_B = G_P \dfrac{x_P}{l} + G_Г \dfrac{x_Г}{l} \end{cases}.$$

Из условия моментного баланса $M = \left(r_П f\right)\left(R_A + R_B\right)$ подшипников получим:

$$x_P = \frac{l}{2}\left[1 + \frac{M}{\left(r_П f\right)G_P} - \frac{G_Г}{G_P} \cdot \frac{2x_Г - l}{l}\right], \qquad (7)$$

где $x_Г$ – осевая координата расположения плоскости установки грузиков, а l – длина ротора (расстояние между подшипниками).

Результаты исследований. Построенный алгоритм по выражениям (2), (4) – (7) позволяет последовательно определить суммарные характеристики уравновешенной роторной системы: J_P, μ, m, M, $\left(r_П f\right)$, G_P, x_P для случая $4\mu M - m^2 > 0$ и соблюдения условия эквивалентности подшипников. В случае существенного отличия (различного износа или типа) подшипников найденную фрикционную характеристику $\left(r_П f\right)$ можно считать начальным приближением задачи поиска различных характеристик подшипников $(r_П f)_{A,B} \approx \frac{1}{2}(r_П f)$. Сформулированная фрикционная задача является более общим случаем, чем приведенная в статье, т. к. она вполне может иметь симметричное решение $(r_П f)_A = (r_П f)_B$.

Большой интерес представляет выбор типа минимального количества возмущений (массовые, геометрические, продольные силы, раздельные, совместные и др.), вносимых в роторную систему для определения максимального количества характеристик. Рассмотренная задача является предшествующей дальнейшей задаче балансировки на выбеге при минимальном количестве пусков. В обеих задач используются однотипные косвенные измерения экспериментально получаемых величин : времени вращения и угла поворота ротора, по сравнению с амплитудой и фазой колебаний опор при традиционной балансировке на современной аппаратуре.

Элементы разработанной методики позволят в дальнейшем перейти к определению реальной фрикционной реакции подшипника при двух разнонаправленных радиальных составляющих усилий нагружения. Это задача существенна в плане обоснованного подсчета и выбора суммы составляющих усилий подшипника – алгебраической или геометрической, для суммирования гравитационного и инерционного (от дебалансов) воздействий. Проведение специальной серии экспериментов на выбеге позволит выявить влияние скорости вращения и величины радиального усилия на формирование момента сопротивления подшипника.

Важное значение для обоснованного мониторинга основных элементов роторных систем имеет определение принципов и правил изменения динамических коэффициентов влияния (ДКВ, [2]) от плоскости коррекции до соответствующей опоры по длине ротора (вала). Разработанный в данной работе подход должен связать значения изменяемых по длине главных моментов инерции поперечных сечений вала со значениями ДКВ как масштабных коэффициентов (величина), так и угловых (сдвиг фазы) возмущающей силы.

Выводы.

1. Разработан алгоритм определения основных характеристик роторной системы на выбеге J_P, μ, m, M, $(r_П f)$, G_P, x_P, дающий единственное решение при сочетании $4\mu M - m^2 > 0$ для коэффициентов слагаемых суммарного момента сопротивления вращению ротора $M_{СОПР}=\mu\omega^2+m\omega+M$.

2. Геометрические, массовые и фрикционные характеристики уравновешенной роторной системы определяются как исходные данные для последующей задачи балансировки на выбеге.

3. Показан общий подход без применения МНК в полном объеме, исключающем решение многомодальных оптимизационных задач и выбор критерия оптимизации.

4. Сформулированы дальнейшие задачи: определение суммарной фрикционной реакция подшипника ротора от двух разнонаправленных радиальных усилий (геометрическая или алгебраическая); уточнение изменения ДКВ по длине ротора; градация вносимых в роторную систему возмущений и реакция системы на них.

5. Использование рассматриваемых суммарных усредненных характеристик позволит в дальнейшем отказаться от контактных вибродатчиков, упростит сбор и обработку экспериментальных данных.

6. Разработанный алгоритм позволяет не придерживаться строго одинаковых начальных скоростей ω_0 в различных опытах (выбегах).

1. *Ден-Гартог Дж. П.* Механические колебания / *Дж. П. Ден-Гартог.* – М. : ГИФМЛ, 1960. – 580 с.

2. *Гольдин А. С.* Вибрации роторных машин / *А. С. Гольдин.* – М. : Машиностроение, 2000. – 344 с.

3. *Левит М. Е.* Справочник по балансировке/ *М. Е. Левит.* – М. : Машиностроение, 1992. – 464 с.

4. *Волошенко В. В.* Определение массовых геометрических и фрикционных характеристик роторных систем на выбеге в случае постоянства момента сопротивления вращению / *В. В. Волошенко, М. Н. Трубицин //* VII Науково-технічна конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Наукова весна -2016», Дніпропетровськ. – Дніпропетровськ : ДВНЗ НГУ, 2016. – Т. 5. – С. 18 – 20.

5. *Таган Е. Р.* Движение ротора на выбеге в случае пулевого дискриминанта суммарного момента сопротивления вращению / *Е. Р. Таган, М. Н. Трубицин //* VII Науково-технічна конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Наукова весна -2016», Дніпропетровськ. – Дніпропетровськ : ДВНЗ НГУ, 2016. – Т. 5. – С. 8 – 9.

Государственное Высшее Учебное
Заведение «Национальный
Горный Университет»,
Днепр

Получено 10.09.2016,
в окончательном варианте.21.09.2016