Е.А.Бабенко[1], А.А.Мартынюк[2]

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

[1] *Черкасский национальный университет им. Б. Хмельницкого, бульвар Шевченко, 81, 18000, Черкассы, Украина; e-mail: kutsokon78@gmail.com*
[2] *Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: amartynyuk@voliacable.com*

Abstract. A stability of motion of the control system with many executive organs is studied under the interval initial conditions. The motions equation of such system form a nonlinear system of differential equations with the interval initial conditions. To obtain the estimate of the integral norm of the motion of system, the method is used that is based on application of the nonlinear integral inequalities. Basing on this estimate, the conditions of stabilization of the motion of system are obtained. As an example, the mechanical system is considered which consists of two linked mathematical pendulums, each of which is under motion of operating forces.

Key words: interval vector, stability, nonlinear integral inequality, control system.

Введение.

Анализ динамики механических и другой природы систем при неточных начальных данных движения формализован при помощи интервального анализа [7, 8]. Монография [14], содержит первые результаты по интервальному оцениванию решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Вопросам численного исследования уравнений возмущенного движения с интервальными начальными данными посвящены многие работы [5]. Задача об устойчивости при интервальных начальных условиях исследуется в работе [2].

Проблема стабилизации и устойчивости движения линейных и нелинейных систем обсуждается во многих статьях и монографиях [1, 3]. Наряду с методом функций Ляпунова при решении этой проблемы применяются и другие подходы.

В данной статье предлагается конструктивное применение нелинейных интегральных неравенств [4, 12] при оценке движений и получении условий стабилизации движения нелинейной системы со многими управляющими органами при интервальных начальных условиях. Во многих работах, посвященных данной проблеме, применяется линейное интегральное неравенство [9].

1. Элементы интервального анализа.

При исследовании движения систем с интервальной неопределённостью начальных условий предполагается неполное (частичное) знание о решениях соответствующей системы уравнений возмущенного движения, т.е. в этой ситуации можно указать лишь границы возможных значений нормы решений. Соответственно, интервальный анализ – это отрасль математического знания, исследующая задачи с интервальными неопределённостями и методы их решения. Приведем некоторые сведения из интервального анализа [8, 6].

Интервалом a называется множество вида

$$a := \left[\underline{a}, \overline{a}\right] = \left\{x \in R \,\middle|\, \underline{a} \le x \le \overline{a}\right\}. \quad (1)$$

Вещественные числа a отождествляются с интервалами нулевой ширины $[a,a]$, называемыми также вырожденными интервалами. Если a – интервал, то $(-a)$ обозначает интервал $(-1)\cdot a$, так что $-a := \left[-\overline{a}, -\underline{a}\right]$. На множестве интервалов вида (1) вводят интервальные арифметические операции:

1) сложение

$$a + b = \left[\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right]; \quad (2)$$

2) вычитание

$$a - b = \left[\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}\right]; \quad (3)$$

3) умножение

$$a \cdot b = \left[\min\left\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right\}, \max\left\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right\}\right]; \quad (4)$$

4) деление

$$a / b = a \cdot \left[1/\overline{b}, 1/\underline{b}\right] \text{ для } 0 \notin b. \quad (5)$$

Определение 1. Алгебраическая система $\langle IR, +, -, \cdot, / \rangle$, образованная множеством всех вещественных интервалов (1) с бинарными операциями сложения, вычитания, умножения и деления, которые определены формулами (2) – (5), называется классической интервальной арифметикой.

Определение 2. Абсолютной величиной (модулем) интервала a называется величина $|a| = \max\left\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\right\}$.

Определение 3. Упорядоченный кортеж из интервалов, расположенных вертикально (вектор-столбец) или горизонтально (вектор-строка), называется интервальным вектором.

Таким образом, если a_1, a_2, ... , a_n – некоторые интервалы, то $a = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)^T$ – интервальный вектор-столбец, а $a = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ – интервальный вектор-строка.

Множество интервальных векторов, компоненты которых принадлежат IR, обозначается через IR^n. Геометрическим образом интервального вектора является прямоугольный параллелепипед в пространстве R^n со сторонами, параллельными координатным осям – брус.

Определение 4. Нормой интервального вектора a называется вещественная величина, обозначаемая $\|a\|$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1) $\|a\| \ge 0$, причем $\|a\| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ – неотрицательность;

2) $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$, для $\alpha \in R$ – абсолютная непрерывность;

3) $\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$ – неравенство треугольника;

4) $a \subseteq b \Rightarrow \|a\| \le \|b\|$ – монотонность по включению.

Ниже приведены примеры норм интервальных векторов

$$\|a\|_1 := |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|; \quad (6)$$

$$\|a\|_\infty := \max_{1\le i\le n}|a_i|; \quad (7)$$

$$\|a\|_2 := \sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2}. \quad (8)$$

2. Постановка задачи.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений управляемого движения

$$\frac{dy}{dt}=F(t,y,u), \quad (9)$$

где $y\in R^n$, $F\in C\left(R_+\times R^n\times R^m, R^n\right)$, $u(t)\in U\subset R^m$ – управление движением. Пусть для фиксированного управления $u_p(t)\in U$ заданы интервальные начальные данные для решения $y(t)$

$$y(t_0)=y_0\in\left[\underline{y}_0,\overline{y}_0\right]. \quad (10)$$

При широких предположениях о системе (9) ее решение $y=y_p(t)=y\left(t,t_0,y_0,u_p\right)$ существует на любом конечном интервале $I\subset R_+$.

Представляет интерес задача об оценке движения при интервальных начальных условиях (10) и условиях стабилизации движения к экспоненциально устойчивому.

В системе (9) проведем замену переменных x и u по формулам $y=y_p+x$, $u=u_p+v$. Тогда система (9) примет вид

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,v), \quad (11)$$

где $f(t,x,v)=F\left(t,y_p+x,u_p+v\right)-F\left(t,y_p,u_p\right)$.

При этом $f(t,0,0)\equiv 0$ и при $v=0$ система (11) имеет движение $x=0$.

Далее систему уравнений (11) рассматриваем в виде

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+g(t,x,v), \quad (12)$$

где $f(t,x)=f(t,x,0)$ и $g(t,x,v)=f(t,x,v)-f(t,x)$.

Рассмотрим задачу об оценке нормы решения $x(t)$ при интервальных начальных условиях

$$x(t_0)=x_0\in\left[\underline{x}_0,\overline{x}_0\right], \quad (13)$$

где $\underline{x}_0,\overline{x}_0$ – заранее заданные величины.

3. Оценки движений системы (12).

Здесь и далее применяется интервальная норма в виде (8). О системе (12) сделаем следующие предположения.

H₁. Существует интегрируемая неотрицательная функция $m(t)$ при всех $t\ge 0$ такая, что

$$\|f(t,x)\|\le m(t)\|x\| \quad (14)$$

при всех $(t,x)\in R_+\times R^n$;

H_2. Существует интегрируемая неотрицательная функция $l(t)$ и постоянная $p>1$ такие, что

$$\left\|g(t,x,v)\right\| \le l(t)\left\|x\right\|^p \tag{15}$$

при всех $(t,x,v)\in R_+\times R^n\times U$. Имеет место такое утверждение.

Теорема 1. Если выполняются условия предположений H_1 – H_2, тогда для нормы решения $l(t)$ уравнения (12) верна оценка

$$\left\|x(t)\right\| \le \frac{\left\|x_0\right\|\exp\left(\int\limits_0^t m(s)\,ds\right)}{\left(1-(p-1)\left\|x_0\right\|^{p-1}\int\limits_0^t l(s)\exp\left[(p-1)\int\limits_0^s m(\tau)\,d\tau\right]ds\right)^{\frac{1}{p-1}}}$$

при всех $t\ge s\ge 0$, как только

$$(p-1)\left\|x_0\right\|^{p-1}\int\limits_0^t l(s)\exp\left[(p-1)\int\limits_0^s m(\tau)\,d\tau\right]ds<1\,.$$

Доказательство. Уравнение (12) представим в виде

$$x(t)=x(t_0)+\int\limits_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds+\int\limits_{t_0}^t g(s,x(s),v(s))\,ds\,, \tag{16}$$

при всех $t\ge t_0\ge 0$. Из соотношения (16) при условиях H_1 – H_2 получим оценку

$$\left\|x(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| + \int\limits_0^t m(s)\left\|x(s)\right\|ds+\int\limits_{t_0}^t l(s)\left\|x(s)\right\|^p\,ds\,. \tag{17}$$

Пусть $\left\|x(t)\right\|=\psi(t)$ при всех $t\ge 0$. Из неравенства (17) следует, что

$$\psi(t)\le \left\|x_0\right\| + \int\limits_0^t \left(m(s)+l(s)\psi^{p-1}(s)\right)\psi(s)\,ds\,. \tag{18}$$

Применяя к псевдолинейному неравенству (18) лемму Гронуолла – Беллмана, получаем оценку

$$\psi(t)\le \left\|x_0\right\|\exp\left(\int\limits_0^t \left(m(s)+l(s)\psi^{p-1}(s)\right)ds\right). \tag{19}$$

Неравенство (19) эквивалентно следующему:

$$\psi^{p-1}(t)\le \left\|x_0\right\|^{p-1}\exp\left[(p-1)\int\limits_0^t \left(m(s)+l(s)\psi^{p-1}(s)\right)ds\right]. \tag{20}$$

Умножая обе стороны неравенства (20) на отрицательное выражение

$$-(p-1)l(t)\exp\left[-(p-1)\int\limits_0^t l(s)\psi^{p-1}(s)\,ds\right],$$

получаем следующее неравенство:

$$-(p-1)l(t)\psi^{p-1}(t)\exp\left[-(p-1)\int_0^t l(s)\psi^{p-1}(s)ds\right]\geq$$

$$\geq -(p-1)\|x_0\|^{p-1}l(t)\exp\left[(p-1)\int_0^t m(s)ds\right].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[-(p-1)\int_0^t l(s)\psi^{p-1}(s)ds\right]\right\}\geq -(p-1)\|x_0\|^{p-1}l(t)\exp\left[(p-1)\int_0^t m(s)ds\right]. \quad (21)$$

Интегрируя неравенство (21) от 0 до t, получаем

$$\exp\left[-(p-1)\int_0^t l(s)\psi^{p-1}(s)ds\right]\geq 1-(p-1)\|x_0\|^{p-1}\int_0^t l(s)\exp\left[(p-1)\int_0^s m(\tau)d\tau\right]ds$$

и далее имеем

$$\exp\left[(p-1)\int_0^t l(s)\psi^{p-1}(s)ds\right]\leq\left[1-(p-1)\|x_0\|^{p-1}\int_0^t l(s)\exp\left[(p-1)\int_0^s m(\tau)d\tau\right]ds\right]^{-1} \quad (22)$$

при всех $t\geq s\geq 0$. Учитывая неравенство (22), оценка (20) принимает вид

$$\psi^{p-1}(t)\leq\frac{\|x_0\|\exp\left((p-1)\int_0^t m(s)ds\right)}{1-(p-1)\|x_0\|^{p-1}\int_0^t l(s)\exp\left((p-1)\int_0^t m(\tau)d\tau\right)ds}. \quad (23)$$

Из неравенства (23) следует оценка нормы решений системы (12). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть существуют интегрируемые при всех $t\geq 0$ функции $m_k(t)$ ($k=1,2,...,n$) такие, что

$$\|f(t,x)+g(t,x,v)\|\leq\sum_{k=1}^n m_k(t)\|x\|^k \quad (24)$$

при всех $(t,x,v)\in R_+\times R^n\times V$. Тогда для нормы решения $x(t)$ системы (12) верна оценка

$$\|x(t)\|\leq\frac{\|x_0\|\exp\left(\int_0^t m_1(s)ds\right)}{\left(1-(n-1)\int_0^t\sum_{k=2}^n\|x_0\|^{k-1}m_k(s)\exp\left(\int_0^s(n-1)m_1(\tau)d\tau\right)ds\right)^{\frac{1}{n-1}}} \quad (25)$$

при всех $t\geq s\geq 0$, как только

$$1-(n-1)\int_0^t\sum_{k=2}^n\|x_0\|^{k-1}m_k(s)\exp\left(\int_0^s(n-1)m_1(\tau)d\tau\right)ds>0.$$

Доказательство. Из соотношения (16) при условии (24) получим оценку

$$\left\|x(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| + \int_0^t \sum_{k=1}^n m_k(s)\left\|x^k(s)\right\| ds\,, \tag{26}$$

которую представим в псевдолинейном виде

$$\left\|x(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| + \int_0^t \left(m_1(s) + \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| \right)\left\|x(s)\right\| ds \tag{27}$$

при всех $t \ge 0$. Применив к неравенству (27) лемму Гронуолла – Беллмана, получим оценку

$$\left\|x(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| \exp\left(\int_0^t \left(m_1(s) + \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| \right) ds \right) \tag{28}$$

при всех $t \ge 0$. Из неравенства (28) следует, что

$$\begin{aligned} \left\|x^{k-1}(t)\right\| &\le \left\|x_0\right\|^{k-1} \exp\left[(k-1)\int_0^t \left(m_1(s) + \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| \right) ds \right] \le \\ &\le \left\|x_0\right\|^{k-1} \exp\left[(n-1)\int_0^t \left(m_1(s) + \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| \right) ds \right] \end{aligned} \tag{29}$$

при всех $t \ge 0$ и $k = 2,...,n$.

Умножая обе стороны неравенства (29) на отрицательный множитель

$$-(n-1)m_k(t)\exp\left[-(n-1)\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| ds \right],$$

получаем

$$\begin{aligned} -(n-1)m_k(t)\left\|x^{k-1}(t)\right\| \exp\left[-(n-1)\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| ds \right] \ge \\ \ge -(n-1)m_k(t)\left\|x_0\right\|^{k-1} \exp\left[(n-1)\int_0^t m_1(s)\,ds \right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Далее суммируем обе стороны неравенства (30)

$$\begin{aligned} -(n-1)\sum_{k=2}^n m_k(t)\left\|x^{k-1}(t)\right\| \exp\left[-(n-1)\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| ds \right] \ge \\ \ge -(n-1)\sum_{k=2}^n m_k(t)\left\|x_0\right\|^{k-1} \exp\left[(n-1)\int_0^t m_1(s)\,ds \right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Интегрируя (31) неравенство от 0 до t, получаем

$$\exp\left[-(n-1)\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\| ds \right] \ge$$

$$\geq 1-(n-1)\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\|x_0\|^{k-1}\exp\left[(n-1)\int_0^s m_1(\tau)\,d\tau\right]ds.$$

Отсюда следует, что

$$\exp\left[\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\left\|x^{k-1}(s)\right\|ds\right]\leq$$

$$\leq \frac{1}{\left[1-(n-1)\int_0^t \sum_{k=2}^n m_k(s)\|x_0\|^{k-1}\exp\left((n-1)\int_0^s m_1(\tau)\,d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{n-1}}}. \qquad (32)$$

Учитывая оценку (32) в неравенстве (28), получаем оценку (25), составляющую утверждение Теоремы 2. Теорема 2 доказана.

4. Стабилизация движения.

Рассмотрим нелинейную систему со многими управляющими органами

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+\sum_{i=1}^m G_i(t,x(t))u_i(t)+Bu_0(t),$$

$$y(t)=Cx(t), \qquad x(t_0)=x_0\in\left[\underline{x}_0,\overline{x}_0\right], \qquad (33)$$

где $x\in R^n$, $A(t)$ – ($n\times n$)-матрица, элементы которой являются непрерывными на любом конечном интервале движения функциями, $G_i(t,x)$ – ($n\times m$)-матрица, векторы управлений $u_i(t)\in R^m$ при всех $i=1,2,...,m$, B – ($n\times m$)-матрица, управление $u_0(t)\in R^m$, C – постоянная ($n\times n$)-матрица, x_0 – интервальный вектор начальных состояний системы (33). О системе (33) сделаем следующие предположения:

H$_3$. Функции $G_i(t,0)=0$, $i=1,2,...,m$ при всех $t\geq 0$;

H$_4$. Существует постоянная ($n\times m$)-матрица K_0 такая, что для системы

$$\frac{dy}{dt}=\left(A(t)-BK_0C\right)y$$

фундаментальная матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$\left\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right\|\leq Me^{-\alpha(t-s)} \qquad (34)$$

при $t\geq s\geq t_0$, где M и α – некоторые положительные постоянные.

H$_5$. Существуют постоянные $\gamma_i>0$ и $q>1$ такие, что $\left\|G_i(t,x)\right\|\leq\gamma_i\|x\|^q$ при всех $i=1,2,...,m$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполняются условия предположений *H*$_3$ – *H*$_5$. Тогда управления

$$u_i(t)=-K_iy(t),\ i=1,2,...,m;\ u_0(t)=-K_0y(t) \qquad (35)$$

стабилизируют движение системы (33) к экспоненциально устойчивому.

Доказательство. Пусть $m < n$ и применяются управления $u_i(t) = -K_i y(t)$, $u_0(t) = -K_0 y(t)$ для стабилизации движения системы (33). При этом имеем

$$\frac{dx}{dt} = \left(A(t) - BK_0 C\right)x(t) - \sum_{i=1}^{m} G_i\left(t, x(t)\right)\left(K_i Cx(t)\right). \tag{36}$$

Из соотношения (36) следует, что

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\sum_{i=1}^{m} G_i\left(s, x(s)\right)\left(K_i Cx(s)\right)ds\,, \tag{37}$$

где $x_0 \in \left[\underline{x}_0, \overline{x}_0\right]$. Учитывая условия Теоремы 3, из соотношения (37) получим оценку нормы решения системы (33) в виде

$$\left\|x(t)\right\| \le \left\|x_0\right\| Me^{-\alpha t} + \int_{0}^{t} \gamma Me^{-\alpha(t-s)} \sum_{i=1}^{m} \left\|K_i C\right\| \left\|x(s)\right\|^{q+1} ds\,. \tag{38}$$

Преобразуем неравенство (38) к виду

$$\left\|x(t)e^{\alpha t}\right\| \le \left\|x_0\right\| M + \int_{0}^{t} \gamma Me^{-\alpha qs} \sum_{i=1}^{m} \left\|K_i C\right\| \left\|x(s)e^{\alpha s}\right\|^{q+1} ds\,. \tag{39}$$

Применяя оценку (25) к неравенству (39), получаем

$$\left\|x(t)e^{\alpha t}\right\| \le \frac{M\left\|x_0\right\|}{\left(1 - \gamma q M^{q+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\left\|K_i C\right\|\right)\left\|x_0\right\|^q \int_{0}^{t} e^{-\alpha qs} ds\right)^{\frac{1}{q}}} =$$

$$= \frac{M\left\|x_0\right\|}{\left(1 + \frac{\gamma M^{q+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\left\|K_i C\right\|\right)\left\|x_0\right\|^q}{\alpha}\left(e^{-\alpha qt} - 1\right)\right)^{\frac{1}{q}}}$$

при всех $t \ge 0$.

Предположим выполнение условия

$$\frac{\gamma M^{q+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\left\|K_i C\right\|\right)\left\|x_0\right\|^q}{\alpha} < 1, \tag{40}$$

тогда при всех $t \ge 0$ будет выполняться оценка

$$\left\|x(t)e^{\alpha t}\right\| \le \frac{M\left\|x_0\right\|}{\left(1 - \frac{\gamma M^{q+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\left\|K_i C\right\|\right)\left\|x_0\right\|^q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

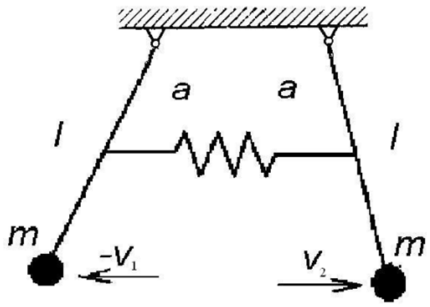
и для нормы решения $x(t)$ получим оценку $\|x(t)\| \le M_0 \|x_0\| e^{-\alpha t}$ при всех $t \ge 0$, где

$$M_0 = \frac{M}{\left(1 - \frac{\gamma M^{q+1} \sum_{i=1}^{m} \left(\|K_i C\|\right) \|x_0\|^q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Теорема 3 доказана.

5. Приложения.

В качестве иллюстрации результатов, полученных в предыдущем разделе, рассмотрим механическую систему, состоящую из двух связанных математических маятников длины l каждый, соединенных пружиной на расстоянии a от точек подвеса (рисунок)



Их точки подвеса находятся на одной и той же высоте. Маятники управляются двумя противоположно направленными силами v_1 и v_2, которые приложены к маятниковым грузам массы m каждый. Кроме того, каждый из маятников подвержен действию управляемых обобщенных сил $Q_1 = -u_1\theta_1^2$ и $Q_2 = -u_2\theta_2^2$, где θ_1 и θ_2 – углы, которые образуют маятники с вертикалью.

Уравнения движения предложенной механической системы можно записать в виде

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + ka^2(\theta_1 - \theta_2) + mgl\theta_1 = -v_1 - u_1\theta_1^2, \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + ka^2(\theta_2 - \theta_1) + mgl\theta_2 = v_2 - u_2\theta_2^2. \end{cases} \tag{41}$$

Предположим также, что начальное состояние системы определяется некоторым интервальным вектором

$$\Theta_0 = \left(\theta_{10}, \dot{\theta}_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{20}\right) \in \left[\underline{\Theta}_0, \overline{\Theta}_0\right]. \tag{42}$$

Выясним, какими должны быть управления $u = (u_1, u_2)^T$ и $v = (v_1, v_2)^T$, чтобы стабилизировать движение системы (41) с интервальными начальными значениями (42) к экспоненциально устойчивому.

Запишем систему (41) в нормальной форме; для этого введем новые переменные x_1, x_2, x_3 и x_4 так:

$$x_1 = \theta_1,\ x_2 = \dot{\theta}_1,\ x_3 = \theta_2,\ x_4 = \dot{\theta}_2. \tag{43}$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \left(-\dfrac{ka^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l} \right) x_1 + \left(-\dfrac{ka^2}{ml^2} \right) x_3 - \dfrac{u_1}{ml^2} x_1^2 - \dfrac{v_1}{ml^2}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \left(\dfrac{ka^2}{ml^2} \right) x_1 + \left(-\dfrac{ka^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l} \right) x_3 - \dfrac{u_2}{ml^2} x_3^2 + \dfrac{v_2}{ml^2} \end{cases} \tag{44}$$

с интервальными начальными условиями:

$$x(t_0) = \Theta_0 \in \left[\underline{\Theta}_0, \overline{\Theta}_0 \right]. \tag{45}$$

Систему (44) можно представить также в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = px_1 - qx_3 - ru_1x_1^2 - rv_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = qx_1 + px_3 - ru_2x_3^2 + rv_2. \end{cases} \tag{46}$$

где $p = -\dfrac{ka^2}{ml^2} - \dfrac{g}{l}$, $q = \dfrac{ka^2}{ml^2}$, $r = \dfrac{1}{ml^2}$.

Используя обозначения раздела 4 настоящей статьи, систему перепишем так:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x)u + Bv; \tag{47}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & p & 0 \end{bmatrix}, \; G(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -rx_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -rx_3^2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix};$$

$$u = (u_1, u_2)^T, \; v = (v_1, v_2)^T.$$

Вектор выхода y будем считать равным фазовому вектору x, т. е. матрица C равна единичной.

Проверим, удовлетворяет ли система (47) предположениям H_3 – H_5. Поскольку $G(0) = 0$, то предположение H_3 выполняется. Проверим условие H_4. В качестве K_0 рассмотрим матрицу

$$K_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha - p}{r} & \dfrac{\beta}{r} & \dfrac{q}{r} & 0 \\ \dfrac{q}{r} & 0 & \dfrac{p - \alpha}{r} & -\dfrac{\beta}{r} \end{bmatrix},$$

где α, β – отрицательные действительные числа. Тогда $A - BK_0C$ будет равна

$$A - BK_0C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Определим собственные значения матрицы $A - BK_0C$. Характеристическое уравнение имеет вид $\left(\lambda^2 - \beta\lambda - \alpha\right)^2 = 0$. Поскольку параметры α, β – отрицательные, то все собственные значения имеют отрицательные действительные части, т. е. существует $\mu > 0$ такое, что

$$\max_{i=1,4} \Re\lambda_i\left(A - BK_0C\right) = -\mu < 0. \tag{48}$$

Оценим норму матрицы $\Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \left(A - BK_0C\right)y.$$

Поскольку матрица $A - BK_0C$ – постоянная, то $\Phi(t) = e^{\left(A - BK_0C\right)t}$ и $\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = e^{\left(A - BK_0C\right)(t-s)}$ при всех $t \ge s \ge t_0$. Воспользовавшись известной оценкой матричной экспоненты $\left\|e^{At}\right\| \le Me^{\chi t}$, где $\chi = \max_i \Re\lambda_i(A)$, $t \ge 0$, и равенством (48), получим оценку $\left\|\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\right\| \le Me^{-\mu(t-s)}$. Предположение H_4 выполняется. А поскольку $\left\|G(x)\right\| \le r\|x\|^2$, то предположение H_5 также выполняется.

Таким образом, согласно Теореме 3 управления $u = -Ky$ и $v = -K_0y$, где матрица

$$K_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha - p}{r} & \dfrac{\beta}{r} & \dfrac{q}{r} & 0 \\ \dfrac{q}{r} & 0 & \dfrac{p - \alpha}{r} & -\dfrac{\beta}{r} \end{bmatrix},$$

в которой α и β – отрицательные действительные числа, стабилизируют движение системы (41) с интервальными начальными условиями (42) к экспоненциально устойчивому. При этом, матрица K удовлетворяет неравенству (40), которое с использованием обозначений данной задачи имеет такой вид:

$$\|K\| \cdot \|\Theta_0\|^2 < \frac{\mu}{rM^3}. \tag{49}$$

6. Заключительные замечания.

В общем, для управляемых систем представляет интерес не только вопрос об устойчивости, но и задача об оценке переходного процесса, а также оценка границы изменения решений. Полученные в статье новые интервальные оценки нормы решений нелинейных неавтономных систем имеют значительный потенциал для решения указанных задач. Эффективность полученных оценок показана на примере управляемой системы со многими управляющими органами. Применение развитой техники для механической системы, состоящей из двух связанных маятников в среде с сопротивлением может представить интерес для инженерных приложений.

Оценки движения на основе интегральных неравенств были предметом многих статей и обобщающих монографий [3, 4, 9, 12]. Основным инструментом таких оценок была известная лемма Гронуолла – Беллмана для линейного интегрального неравества. Предложенные в данной статье интервальные оценки решений нелинейных систем имеют практический интерес во многих прикладных задачах [10, 11, 13, 15].

В связи с развитой здесь теорией остаются открытыми многие проблемы для систем вида (12) и/или (33). Некоторые из них состоят в оценке времени переходного процесса и его минимизация, условия устойчивости на конечном интервале и ряд других.

Р Е З Ю М Е . Досліджено рух системи управління з багатьма виконавчими органами при інтервальних початкових умовах. Рівняння руху такої системи утворюють нелінійну систему диференціальних рівнянь з інтервальними початковими умовами. Для отримання оцінки інтервальної норми руху системи використано метод, що базується на використанні нелінійних інтегральних нерівностей. На основі отриманої оцінки отримано умови стабілізації руху системи. Як приклад, розглянуто механічну систему, що складається з двох зв'язаних маятників, кожний з яких підданий дії керуючих сил.

1. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 496 с.
2. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения при интервальных начальных условиях // Доп. НАН України. – 2013. – № 1. – С. 24–29.
3. *Мартынюк А. А., Гутовски Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. – К: Наук. думка, 1979. – 271 с.
4. *Перов А.И.* Об интегральных неравенствах // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж. – 1957. – № 5. – С. 87 – 97.
5. *Рогалев А.Н.* Границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными данными // Вычислит. технологии. – 2004. – **9**, № 1. – С.86 – 94.
6. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск:Изд-во XYZ, 2013. – 606 с.
7. *Adams E., Kulisch U. (Eds.)* Scientific Computing with Automatic Result Verification. – Boston: Academic Press, 1993.
8. *Alefeld G., Mayer G.* Interval analysis: theory and applications // J. Comp. Appl. Math. – 2000. – **121.** – P. 421 – 464.
9. *Bellman R.* Stability Theory of Differential Equations. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 176 p.
10. *Larin V.B.* Algorithms for Solving a Unilateral Quadratic Matrix Equation and the Model Updating Problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 107 – 123.
11. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Improving the Quality of Tracking the Trajectory of the Aircraft Program // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 137 – 143.
12. *Louartassi Y., Mazoudi H., Elalami N.* A new generalization of lemma Gronwall–Bellman // Appl. Math. Sci. – 2012. – **6**, N 13. – P. 621–628.
13. *Martynyuk A.A., Khoroshun A.S.* To the Finite Time Stability of Motion // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 124 – 132.
14. *Moore R.E.* Interval Analysis. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966. – 145p.
15. *Zekevic A.I., Siljak D.D.* Stabilization of nonlinear systems with moving equilibria // IEEE Trans. on Autom. Control. – 2003. – **48**, N6. – P. 1036 – 1040.

Поступила 12.09.2014 Утверждена в печать 22.12.2015