

В. П. Голуб, Б. П. Маслов, П. В. Фернати

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЯДЕР НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ИЗОТРОПНЫХ  
ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. 1. СУПЕРПОЗИЦИЯ СДВИГОВОЙ И  
ОБЪЕМНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,  
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; creep@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The dependences among the creep kernels, that define the shear and volume viscoelastic properties of an isotropic linear viscoelastic medium in conditions of the combined stress state, and the kernels of longitudinal and transverse creep, that are built for the unilateral tension and pure torsion, are formulated. The constitutive equations of viscoelasticity for the combined stress state are chosen in the form of superposition of the equation for shears and equation for volume deformations. The heredity kernels are given by the fractional-exponential Rabotnov's functions. The problems on creep deformations of thin-wall pipes are solved and experimentally approved for conditions of combined loading by tension with torsion and tension with internal pressure.

**Key words:** linear viscoelasticity, isotropic material, complex stress state, creep kernel, relaxation kernel, fractional-exponential function.

**Введение.**

В теории вязкоупругости большое внимание уделяется разработке методов определения вязкоупругих характеристик материалов, которые в случае использования определяющих уравнений наследственного типа сводятся к отысканию ядер ползучести и релаксации [7 – 9, 12 – 14]. Ядра задаются некоторыми заранее выбранными функциями, содержащими необходимое число неизвестных параметров, удовлетворяющих условию затухающей памяти и позволяющих достаточно простым способом получать решения интегральных уравнений теории. В стационарном температурном поле указанные характеристики должны быть инвариантны по отношению к любым процессам нагружения и видам напряженного состояния.

При одноосном напряженном состоянии ядра наследственности и параметры ядер определяются непосредственно по результатам аппроксимации данных прямых измерений деформаций или напряжений в процессе ползучести или релаксации функциями, задающими ядра. Детальный анализ методов выбора функций, задающих ядра наследственности, и методов определения параметров ядер линейно- и нелинейно-вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии представлен в [7, 10, 11, 14].

Задача определения ядер наследственности и параметров ядер при сложном напряженном состоянии является более сложной и включает также установление зависимости между ядрами наследственности при сложном и одноосном напряженных состояниях [4, 5]. Одноосное напряженное состояние реализуется непосредственно в эксперименте и рассматривается как базовое.

В работе [5] для изотропных линейно-вязкоупругих материалов установлена зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и ядрами продольной и поперечной ползучести, построенными по результатам испытаний на одноосное растяжение. Этот подход в работе [2] обобщен на изотропные нелинейно-вязкоупругие

материалы, исходя из нелинейной модели вязкоупругости типа модели Работнова. Трудности практической реализации такого подхода связаны с отсутствием данных измерений деформаций поперечной ползучести.

В настоящей работе устанавливается зависимость между ядрами ползучести, задающими сдвиговые и объемные свойства изотропных линейно-вязкоупругих тел при сложном напряженном состоянии, и ядрами продольной и сдвиговой ползучести, построенными по результатам испытаний на ползучесть при одноосном растяжении и чистом кручении.

### §1. Постановка задачи.

Определяющие уравнения линейной теории вязкоупругости Больцмана – Вольтерра, задающие зависимость между деформациями, напряжениями и временем, при сложном напряженном состоянии могут быть представлены в виде уравнений для сдвигов и уравнений объемного деформирования. В этом случае определяющие уравнения ползучести имеют вид [5, 14]

$$\begin{aligned} e_{ij}(t) &= \frac{s_{ij}(t)}{2G} + \frac{\lambda_s}{2G} \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (i, j = \overline{1,3}) ; \\ \varepsilon_v(t) &= \frac{\sigma_0(t)}{B} + \frac{\lambda_v}{B} \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.1)$$

решением которых являются уравнения релаксации

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2Ge_{ij}(t) - 2G\lambda_s \int_0^t R_s(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \quad (i, j = \overline{1,3}) ; \\ \sigma_0(t) &= B\varepsilon_v(t) - B\lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varepsilon_v(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $e_{ij}(t)$  – компоненты девиатора тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}(t)$ ;  $s_{ij}(t)$  – компоненты девиатора тензора напряжений  $\sigma_{ij}(t)$ ;  $\varepsilon_v(t)$  – объемная деформация;  $\sigma_0$  – среднее напряжение;  $K_s(t-\tau)$ ,  $R_s(t-\tau)$  – ядра сдвиговой ползучести и релаксации;  $K_v(t-\tau)$ ,  $R_v(t-\tau)$  – ядра объемной ползучести и релаксации;  $G$  – модуль сдвига;  $B$  – объемный модуль;  $\lambda_s$ ,  $\lambda_v$  – реологические параметры.

В качестве базовых экспериментов используются испытания образцов материала на ползучесть при одноосном растяжении и чистом кручении и постоянных значениях напряжений. Одномерные модели, описывающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем изотропных линейно-вязкоупругих материалов в базовых экспериментах, задаются уравнениями

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \quad \gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\lambda_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

которые при  $\sigma_{11} = \text{const}$  и  $\sigma_{21} = \text{const}$  сводятся к уравнениям

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[ 1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right]; \quad \gamma_{21}(t) = \frac{\tau_{21}}{G} \left[ 1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right]. \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma_{11}(t)$  и  $\tau_{21}(t)$  – одноосные растягивающие напряжения и касательные напряжения кручения;  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\gamma_{21}(t)$  – одноосные продольные и угловые деформации;  $K_{11}(t-\tau)$  и  $K_{21}(t-\tau)$  – ядра продольной и сдвиговой ползучести;  $\lambda_{11}$  и  $\lambda_{21}$  – реологические параметры;  $E$  – модуль упругости.

Ядра ползучести  $K(t-\tau)$  в (1.1), (1.3) и (1.4) и релаксации  $R(t-\tau)$  в (1.2) аппроксимируются дробно-экспоненциальными функциями [14]

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]};$$

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (1.5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры ядер ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ );  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функция Эйлера.

Задача заключается в установлении зависимости между ядрами ползучести  $K_s(t-\tau)$ ,  $K_v(t-\tau)$  и релаксации  $R_s(t-\tau)$ ,  $R_v(t-\tau)$  линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии и ядрами ползучести  $K_{11}(t-\tau)$ ,  $K_{21}(t-\tau)$  – при одноосном растяжении и чистом кручении и в определении параметров ядер, задаваемых дробно-экспоненциальными функциями.

## §2. Идентификация ядер наследственности.

Процесс деформирования при сложном напряженном состоянии задается уравнениями ползучести (1.1) и уравнениями релаксации (1.2). Идентификации подлежат ядра сдвиговой  $K_s(t-\tau)$  и объемной  $K_v(t-\tau)$  ползучести и ядра сдвиговой  $R_s(t-\tau)$  и объемной  $R_v(t-\tau)$  релаксации.

**2.1. Зависимость между ядрами наследственности.** Устанавливается зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и релаксации и ядрами ползучести при одноосном растяжении.

Для компонент тензора деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}(t)$ , которые можно представить в виде суперпозиции компонент сдвиговой и объемной ползучести в (1.1), получаем уравнение

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G} \left[ s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{3B} \delta_{ij} \left[ \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right], \quad (2.1)$$

которое при одноосном растяжении постоянными напряжениями  $\sigma_{11}$  приводится к уравнению

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{3G} \left[ 1 + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) d\tau \right] + \frac{\sigma_{11}}{9B} \left[ 1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.2)$$

или, с учетом соотношения [3]  $\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9B}$ , – к уравнению

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[ 1 + \frac{E}{3G} \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) d\tau + \frac{E}{9B} \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.3)$$

$$\left( s_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{11}; \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}; \varepsilon_0 = \frac{1}{9B} \sigma_{11} \right).$$

Из сопоставления уравнения (2.3) и первого уравнения в (1.4) следует соотношение

$$\lambda_{11}K_{11}(t-\tau) = \frac{E}{3G}\lambda_s K_s(t-\tau) + \frac{E}{9B}\lambda_v K_v(t-\tau), \quad (2.4)$$

устанавливающее зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести и ядром ползучести при одноосном растяжении.

**2.2. Ядра сдвиговой ползучести и релаксации.** Для идентификации ядер сдвиговой ползучести  $K_s(t-\tau)$  и релаксации  $R_s(t-\tau)$  в качестве базового достаточно рассмотреть эксперимент на чистое кручение и использовать соответствующее ему в (1.4) определяющее уравнение.

Действительно, при чистом кручении из девяти компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  только две касательные компоненты  $\sigma_{21} = \sigma_{12} \neq 0$ , а из девяти компонент тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  – только две сдвиговые компоненты  $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{21}}{2} \neq 0$ , а остальные компоненты равны нулю. В этом случае для девиатора тензора напряжений  $s_{ij}(t)$  в (1.1) получаем

$$s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \sigma_{21}(t) & 0 \\ \sigma_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow s_{21}(t) = \sigma_{21}(t), \quad (2.5)$$

а для компонент девиатора тензора деформаций  $e_{ij}(t)$  –

$$e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \delta_{ij}\varepsilon_0(t) = \begin{Bmatrix} 0 & \varepsilon_{21}(t) & 0 \\ \varepsilon_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow e_{21}(t) = \varepsilon_{21}(t), \quad (2.6)$$

так как

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = 0 \text{ и } \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{B} = 0.$$

Соотношения (2.5) и (2.6) показывают, что при чистом кручении уравнение сдвиговой ползучести в девиаторной форме в (1.1) и одномерное уравнение сдвиговой ползучести в (1.4) приводят к одним и тем же значениям деформаций сдвиговой ползучести  $\varepsilon_{21}(t)$ . Отсюда следует, что

$$\lambda_s = \lambda_{21}; \quad K_s(t-\tau) = K_{21}(t-\tau); \quad R_s(t-\tau) = R_{21}(t-\tau) \quad (2.7)$$

и определяющие уравнения сдвиговой ползучести и релаксации при сложном напряженном состоянии принимают вид

$$e_{ij}(t) = \frac{s_{ij}(t)}{2G} + \frac{\lambda_{21}}{2G} \int_0^t K_{21}(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau; \quad s_{ij}(t) = 2G e_{ij}(t) - 2G \lambda_{21} \int_0^t R_{21}(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где параметры ядер  $K_{21}(t-\tau)$  и  $R_{21}(t-\tau)$  определяются на основе результатов испытаний на ползучесть при чистом кручении.

**2.3. Ядра объемной ползучести и релаксации.** Ядро объемной ползучести  $K_v(t-\tau)$  определяется из соотношения (1.4) с учетом равенства между ядрами сдвиговой ползучести при сложном напряженном состоянии и чистом кручении (2.7).

Подставляя (2.7) в (1.4), для ядра объемной ползучести  $K_\nu(t-\tau)$  получаем

$$\lambda_\nu K_\nu(t-\tau) = \frac{3}{1-2\nu} \lambda_{11} K_{11}(t-\tau) - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \lambda_{21} K_{21}(t-\tau), \quad (2.9)$$

где  $\nu = \frac{E}{2G} - 1$  – коэффициент Пуассона.

В этом случае определяющие уравнения объемной ползучести и релаксации при сложном напряженном состоянии принимаются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu(t) &= \frac{\sigma_0(t)}{B} + \frac{1}{B} \int_0^t \left[ \frac{3}{1-2\nu} \lambda_{11} K_{11}(t-\tau) - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \lambda_{21} K_{21}(t-\tau) \right] \sigma_0(\tau) d\tau; \\ \sigma_0(t) &= B\varepsilon_\nu(t) - B\lambda_\nu \int_0^t R_\nu(t-\tau) \varepsilon_\nu(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где ядро объемной релаксации  $R_\nu(t-\tau)$  является резольвентой ядра объемной ползучести  $K_\nu(t-\tau)$ .

Практический интерес представляет также задача установления непосредственной зависимости между ядром объемной релаксации  $R_\nu(t-\tau)$  при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной  $K_{11}(t-\tau)$  и сдвиговой  $K_{21}(t-\tau)$  ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении. Для этого воспользуемся фундаментальным свойством резольвентных операторов вязкоупругости Работнова [14], которое в случае использования ядер наследственности (1.5) может быть представлено соотношением

$$1 - \lambda R(t-\tau, \lambda + \beta) = \frac{1}{1 + \lambda K(t-\tau, \beta)}, \quad (2.11)$$

где принято, что параметр  $\beta$  оказывает более существенное влияние на процессы ползучести и релаксации по сравнению с параметром  $\alpha$ .

Поскольку оператор объемной ползучести с ядром (2.9) задается линейным агрегатом 2-х резольвентных операторов, то фундаментальное соотношение (2.11) для обращения линейного агрегата резольвентных операторов можно представить в виде

$$1 - \lambda_\nu R_\nu(t-\tau, \beta_\nu) = 1 - \sum_{r=1}^2 x_r K(t-\tau, y_r) = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^2 a_n K(t-\tau, b_n)}, \quad (2.12)$$

где  $K(\cdot)$  – ядра ползучести, задаваемые аналогично ядру (2.9) в виде суммы ядер продольной  $K_{11}(\cdot)$  и сдвиговой  $K_{21}(\cdot)$  ползучести, а коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  задаются соотношениями

$$a_1 = -\frac{3}{1-2\nu} \lambda_{11}; \quad a_2 = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \lambda_{21}; \quad b_1 = -\beta_{11}; \quad b_2 = -\beta_{21}. \quad (2.13)$$

Здесь  $\lambda_{11}$ ,  $\beta_{11}$ ,  $\lambda_{21}$ ,  $\beta_{21}$  – параметры ядер ползучести и релаксации в (1.5), определяемые в базовых экспериментах.

В итоге, для ядра объемной релаксации  $R_\nu(\cdot)$ , исходя из (2.12), получаем соотношение

$$\lambda_\nu R_\nu(t-\tau) = \frac{(y_1 - b_1)(b_2 - y_1)}{y_1 - y_2} K_{11}(t-\tau) + \frac{(y_2 - b_2)(y_2 - b_1)}{y_1 - y_2} K_{21}(t-\tau), \quad (2.14)$$

где реологические параметры  $y_1$  и  $y_2$  определяются из совместного решения следующих уравнений:

$$1 - \frac{a_1}{b_1 - y} - \frac{a_2}{b_2 - y} = 0; \quad 1 - \frac{x_1}{b_n - y_1} - \frac{x_2}{b_n - y_2} = 0 \quad (n = 1, 2),$$

полученных путем приведения уравнения (2.12) к общему знаменателю.

### §3. Методы определения параметров ядер наследственности.

Параметры ядер сдвиговой и объемной ползучести и релаксации в определяющих уравнениях (1.1) и (1.2) определяются, исходя из соотношений (2.7), (2.9) и (2.14), связывающих эти ядра с ядрами продольной и сдвиговой ползучести, задаваемых в одномерных базовых экспериментах.

**3.1. Определение параметров ядер ползучести в базовых экспериментах.** В качестве базовых экспериментов рассматриваются испытания тонкостенных трубчатых образцов на ползучесть при одноосном растяжении и при чистом кручении и постоянных значениях приложенных напряжений. По данным испытаний на одноосное растяжение определяются параметры ядер продольной ползучести  $K_{11}(t - \tau)$ , а на чистое кручение – параметры ядер сдвиговой ползучести  $K_{21}(t - \tau)$ .

Параметры ядер продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении определяются по результатам аппроксимации экспериментальных значений функций ползучести соответствующими аналитическими выражениями ядер ползучести.

Задача, исходя из (1.4) и (1.5), сводится к минимизации функционала [10]

$$F(\alpha_{11}, \beta_{11}, \lambda_{11}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\varepsilon_{11}(\sigma_k, t_i)}{\sigma_k} - \frac{1}{E} \left[ 1 + \lambda_{11} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{11})^n t^{(1+n)(1+\alpha_{11})}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_{11})]} \right] \right\}^2 \quad (3.1)$$

и, соответственно, функционала

$$F(\alpha_{21}, \beta_{21}, \lambda_{21}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{\gamma_{21}(\tau_k, t_i)}{\tau_k} - \frac{1}{G} \left[ 1 + \lambda_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_{21})^n t^{(1+n)(1+\alpha_{21})}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_{21})]} \right] \right\}^2. \quad (3.2)$$

Здесь  $\sigma_k, \tau_k$  – набор постоянных значений нормальных и касательных напряжений;  $\varepsilon_{11}, \gamma_{21}$  – значения продольных линейных и угловых деформаций ползучести;  $t_i$  – временные интервалы разбиения функции ползучести;  $i$  – число интервалов разбиения;  $\alpha_{11}, \beta_{11}, \lambda_{11}$  – параметры ядер продольной ползучести;  $\alpha_{21}, \beta_{21}, \lambda_{21}$  – параметры ядер сдвиговой ползучести.

**3.2. Определение параметров ядер сдвиговой и объемной ползучести.** Параметры  $\alpha_s, \beta_s, \lambda_s$  ядер сдвиговой ползучести  $K_s(t - \tau)$  при сложном напряженном состоянии совпадают, исходя из условия (2.7), с параметрами  $\alpha_{21}, \beta_{21}, \lambda_{21}$  ядер сдвиговой ползучести при чистом кручении, так что

$$\alpha_s = \alpha_{21}; \quad \beta_s = \beta_{21}; \quad \lambda_s = \lambda_{21}, \quad (3.3)$$

методика определения которых изложена в разделе 3.1.

Параметры  $\alpha_v, \beta_v, \lambda_v$  ядер объемной ползучести  $K_v(t - \tau)$  при сложном напряженном состоянии определяются по результатам аппроксимации дискретных значений ядер  $K_{vj}(t)$  дробно-экспоненциальной функцией (1.5). Дискретные значения ядер  $K_{vj}(t)$  рассчитываются по уравнению (2.9) для нескольких моментов времени  $t_j$ .

В области сингулярности ( $t \rightarrow 0$ ) дискретные значения ядер объемной ползучести учитываются с помощью весовых функций [2]. В этом случае задача определения параметров ядер объемной ползучести сводится к минимизации функционала

$$F(\alpha_v, \beta_v, \lambda_v) = \sum_{j=1}^{n_s} \left\{ p_j(t) \left[ K_v(t_j) - \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_s}^n \left\{ K_v(t_j) - \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v) \right\}^2, \quad (3.4)$$

где весовая функция  $p_j(t)$  задается соотношением

$$p_j(t) = \left\{ 1 + \left[ \frac{K_v(t_j) - \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v)}{K_v(t_*) - \lambda_v K_v(t_*, \alpha_v, \beta_v)} \right]^m \right\}^{-1},$$

причем  $p_j(t) \rightarrow 0$ , когда  $\lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v) \rightarrow \infty$  и  $p_j(t) = 1$ , когда  $K_v(t_j) = \lambda_v K_v(t, \alpha_v, \beta_v)$ . Здесь  $K_v(t_j)$  – набор дискретных значений ядер объемной ползучести;  $K_v(t, \alpha_v, \beta_v)$  – функция, задающая ядро объемной ползучести аналитически;  $t_*$  – некоторый критический момент времени, ограничивающий область проявления динамических эффектов;  $n_s$  – число дискретных значений ядер ползучести в области  $\{0, t_*\}$ ;  $m$  – порядок моментов разностей ( $m = 2, 3, 4, 5, \dots$ ).

**3.3. Определение параметров ядер сдвиговой и объемной релаксации.** Ядра релаксации  $R_s(t-\tau)$  и  $R_v(t-\tau)$  в (1.2) являются резольвентами ядер ползучести  $K_s(t-\tau)$  и  $K_v(t-\tau)$  в (1.1). Эти ядра связаны интегральным соотношением

$$-K(t) + R(t) = \lambda \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau, \quad (3.5)$$

откуда следует, что ядро релаксации  $R(t)$  может быть построено по ядру ползучести  $K(t)$ , а параметры соответствующих ядер будут совпадать.

Параметры  $\alpha_v, \beta_v, \lambda_v$  ядер объемной релаксации  $R_v(t-\tau)$  в (1.2) могут быть также определены по результатам аппроксимации дискретных значений ядер  $\bar{R}_{v,j}(t)$  дробно-экспоненциальной функцией (1.5). Дискретные значения ядер  $\bar{R}_{v,j}(t)$  рассчитываются по уравнению (2.14) для нескольких моментов времени  $t_j$ .

Задача определения параметров ядер объемной релаксации, по аналогии с задачей определения параметров ядер объемной ползучести согласно (3.4), сводится к минимизации функционала

$$F(\bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v, \bar{\lambda}_v) = \sum_{j=1}^{n_s} \left\{ p_j(t) \left[ \bar{R}_v(t_j) - \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v) \right] \right\}^2 + \sum_{j=n_s}^n \left\{ \bar{R}_v(t_j) - \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v) \right\}^2, \quad (3.6)$$

где весовая функция  $p_j(t)$  задается соотношением

$$p_j(t) = \left\{ 1 + \left[ \frac{\bar{R}_v(t_j) - \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)}{\bar{R}_v(t_*) - \bar{\lambda}_v R_v(t_*, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)} \right]^m \right\}^{-1},$$

причем  $p_j(t) \rightarrow 0$ , когда  $\bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v) \rightarrow \infty$ , и  $p_j(t) = 1$ , когда  $\bar{R}_v(t_j) = \bar{\lambda}_v R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)$ .

Здесь  $\bar{R}_v(t_j)$  – набор дискретных значений ядер объемной релаксации;  $R_v(t, \bar{\alpha}_v, \bar{\beta}_v)$  – функция, задающая ядро объемной релаксации аналитически. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (3.4).

#### §4. Расчет деформаций ползучести.

Методы идентификации ядер наследственности линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, изложенные в разделах 2 и 3, апробируются экспериментально на задачах расчета деформаций ползучести тонкостенных трубчатых образцов при нагружении растяжением с кручением и растяжением с внутренним давлением. Рассчитываются деформации продольной, сдвиговой и окружной ползучести, а также деформации объемной ползучести.

**4.1. Объект исследования. Упругие постоянные. Параметры ядер.** В качестве объекта исследования выбраны тонкостенные трубчатые образцы из полиэтилена высокой плотности ПВП наружным диаметром 51 мм и толщиной стенки 5,6 мм. В экспериментах реализованы одноосное растяжение, чистое кручение и кручение с растяжением. Экспериментальные данные заимствованы из [6].

Область линейности вязкоупругих свойств рассматриваемых материалов при сложном напряженном состоянии обосновывается, исходя из соблюдения условия однородности процессов продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и при чистом кручении.

Примем, что материал является линейно-вязкоупругим, если функция продольной ползучести  $J_{11}(t)$

$$J_{11,1}(t_j) = \frac{\varepsilon_{11,1}(t_j; \sigma_{11,1})}{\sigma_{11,1}} = J_{11,2}(t_j) \frac{\varepsilon_{11,2}(t_j; \sigma_{11,2})}{\sigma_{11,2}} = \dots = J_{11,q}(t_j) \frac{\varepsilon_{11,q}(t_j; \sigma_{11,q})}{\sigma_{11,q}} \quad (4.1)$$

инвариантна по отношению к уровню напряжений растяжения  $\sigma_{11,q}$  ( $q = \bar{1}, \bar{\ell}$ ) для нескольких моментов времени  $t_j$  ( $j = \bar{1}, \bar{r}$ ), а расчетное значение квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$

$$t_{\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{s_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m J_{11,q}(t_j) = \frac{\sqrt{n^*}}{s_j(t_j)} \delta \bar{J}_{11}(t_j) > t_{\alpha,k}^*, \quad (4.2)$$

больше его критического значения  $t_{\alpha,k}^*$  и, соответственно, функция сдвиговой ползучести  $J_{21}(t_j)$

$$J_{21,1}(t_j) = \frac{\gamma_{21,1}(t_j; \tau_{21,1})}{\tau_{21,1}} = J_{21,2}(t_j) \frac{\gamma_{21,2}(t_j; \tau_{21,2})}{\tau_{21,2}} = \dots = J_{21,q}(t_j) \frac{\gamma_{21,q}(t_j; \tau_{21,q})}{\tau_{21,q}} \quad (4.3)$$

инвариантна по отношению к уровню напряжений кручения  $\tau_{21,q}$  ( $q = \bar{1}, \bar{\ell}$ ) для нескольких моментов времени  $t_j$  ( $j = \bar{1}, \bar{r}$ ), а расчетные значения квантиля статистики  $t_{\alpha,k}$

$$t_{\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{s_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m J_{21,q}(t_j) = \frac{\sqrt{n^*}}{s_j(t_j)} \delta \bar{J}_{21}(t_j) > t_{\alpha,k}^*, \quad (4.4)$$

больше его критического значения  $t_{\alpha,k}^*$ . Здесь  $J_{11,q}(t_j)$  и  $J_{21,q}(t_j)$  – значения функций продольной и сдвиговой ползучести в момент времени  $t_j$ ;  $\bar{J}_{11}(t_j)$  и  $\bar{J}_{21}(t_j)$  – выборочные средние значения функций ползучести  $J_{11,q}(t_j)$  и  $J_{21,q}(t_j)$ ;  $n$  – объем выборки (число функций ползучести);  $\delta$  – максимальная погрешность между значениями  $J_{11,q}(t_j)$  и  $\bar{J}_{11}(t_j)$  и между значениями  $J_{21,q}(t_j)$  и  $\bar{J}_{21}(t_j)$ .



Согласно условиям (4.1) – (4.4), область линейности вязкоупругих свойств полиэтилена высокой плотности ПВП ограничивается напряжениями  $\sigma_{11} = 5,2$  МПа и  $\tau_{21} = 3,3$  МПа. В табл. 1 приведены значения упругих постоянных полиэтилена ПВП, а в табл. 2 – значения параметров ядер наследственности, полученных согласно изложенной в разделе 3 методике.

Таблица 1

| Материал       | $E$ , МПа | $G$ , МПа | $B$ , МПа         | $\nu$ |
|----------------|-----------|-----------|-------------------|-------|
| Полиэтилен ПВП | 2190,4    | 740,0     | $1,83 \cdot 10^4$ | 0,48  |

Таблица 2

| Материал       | $K_{11}(t), R_{11}(t)$ , час <sup>-1</sup> |              |                | $K_s(t), R_s(t)$ , час <sup>-1</sup> |           |             | $K_v(t), R_v(t)$ , час <sup>-1</sup> |           |             |
|----------------|--|--------------|----------------|--------------------------------------|-----------|-------------|--------------------------------------|-----------|-------------|
|                | $\alpha_{11}$                              | $\beta_{11}$ | $\lambda_{11}$ | $\alpha_s$                           | $\beta_s$ | $\lambda_s$ | $\alpha_v$                           | $\beta_v$ | $\lambda_v$ |
| Полиэтилен ПВП | -0,81                                      | 0,12         | 5,36           | -0,83                                | 0,13      | 5,40        | -0,45                                | 0,53      | 39,37       |

**4.2. Продольная, сдвиговая и окружная ползучесть.** Рассмотрим задачу расчета деформаций продольной ползучести при одноосном растяжении, деформаций продольной и сдвиговой ползучести при растяжении с кручением и деформаций продольной и окружной ползучести при растяжении с внутренним давлением. Решение строится на основе трехмерной модели ползучести (2.1) с использованием значений упругих постоянных и значений параметров ядер наследственности, приведенных в табл. 1 и 2.

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}(t)$  при комбинированном нагружении тонкостенных трубчатых образцов растяжением с кручением и растяжением с внутренним давлением представим, соответственно, в виде

$$\sigma_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ и } \sigma_{ij}(t) = h(t) \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.5)$$

где  $\sigma_{11}$  – нормальное растягивающее напряжение;  $\tau_{21}$  – касательное напряжение кручения;  $\sigma_{22}$  – окружное растягивающее напряжение;  $h(t)$  – единичная функция Хевисайда.

При комбинированном нагружении растяжением с кручением для деформаций продольной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  из (2.1) с учетом (1.5) и первого соотношения в (4.5) при  $\sigma_{11}(t) = const$  получаем уравнение

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{3G} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_s)^n (t)^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + \frac{1}{9B} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_v)^n (t)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}, \quad (4.6)$$

а для деформаций сдвиговой ползучести  $\varepsilon_{21}(t)$  при  $\tau_{21}(t) = const$  – уравнение

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \tau_{21} \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_s)^n (t)^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left( s_{11} = \frac{2}{3} \sigma_{11}; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}; \quad s_{21} = \tau_{21} \right).$$

При комбинированном нагружении растяжением с внутренним давлением для деформаций продольной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  из (2.1) с учетом (1.5) и второго соотношения в (4.5) при  $\sigma_{11}(t) = \text{const}$  и  $\sigma_{22}(t) = \text{const}$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = & \frac{1}{6G} (2\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_s)^n (t)^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + \\ & + \frac{1}{9B} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_v)^n (t)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

а для деформаций окружной ползучести  $\varepsilon_{22}(t)$  при  $\sigma_{11}(t) = \text{const}$  и  $\sigma_{22}(t) = \text{const}$  – уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(t) = & \frac{1}{6G} (2\sigma_{22} - \sigma_{11}) \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_s)^n (t)^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + \\ & + \frac{1}{9B} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_v)^n (t)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\left( s_{11} = \frac{1}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22}); \quad s_{22} = \frac{1}{3} (2\sigma_{22} - \sigma_{11}); \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right).$$

На рис. 1, в качестве примера, приведены результаты расчетов (линии) деформацией продольной и сдвиговой ползучести (рис. 1, *a*) тонкостенных трубчатых образцов при нагружении чистым растяжением, чистым кручением и растяжением с кручением и деформаций продольной и окружной ползучести (рис. 1, *б*) тонкостенных трубчатых образцов при чистом растяжении, чистом внутреннем давлении и растяжении с внутренним давлением. Точками нанесены экспериментальные данные.

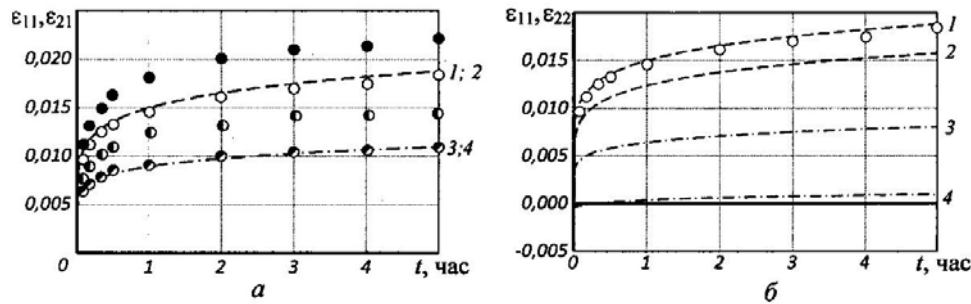


Рис. 1

При чистом растяжении и растяжении с кручением деформации продольной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  рассчитываются по уравнению (4.6) при напряжениях  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\tau_{21} = 0$  (рис. 1, *a*: кривая 1;  $\circ$ ) и напряжениях  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\tau_{21} = 2,22$  МПа (рис. 1, *a*: кривая 2;  $\bullet$ ). Деформации сдвиговой ползучести  $\varepsilon_{21}(t)$  при чистом кручении и растяжении с кручением рассчитываются по уравнению (4.7) при напряжениях  $\sigma_{11} = 0$  и  $\tau_{21} = 2,22$  МПа (рис. 1, *a*: кривая 3;  $\circ$ ) и напряжениях  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\tau_{21} = 2,22$  МПа (рис. 1, *a*: кривая 4;  $\bullet$ ).

При чистом растяжении и растяжении с внутренним давлением деформации продольной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  рассчитываются по уравнению (4.8) при напряжениях  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\sigma_{22} = 0$  (рис. 1, б: кривая 1;  $\circ$ ) и при напряжениях  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\sigma_{22} = 2,22$  МПа (рис. 1, б: кривая 2). Деформации окружной ползучести  $\varepsilon_{22}(t)$  рассчитываются по уравнению (4.9) при напряжениях  $\sigma_{11} = 0$  и  $\sigma_{22} = 2,22$  МПа (рис. 1, б: кривая 3) и напряжениях  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\sigma_{22} = 2,22$  МПа (рис. 1, б: кривая 4).

Как и следовало ожидать, исходное определяющее уравнение ползучести (2.1), построенное исходя из принципа суперпозиции сдвиговой и объемной ползучести, не позволяет учесть взаимовлияние нормальных и касательных компонент тензора напряжений на процесс ползучести. В частности, из рис. 1, а видно, что расчетные кривые продольной ползучести (кривые 1 и 2) не зависят от величины касательного напряжения и совпадают. Расчетные кривые сдвиговой ползучести (кривые 3 и 4) не зависят от величины нормального напряжения и также совпадают. Экспериментальные же данные (точки) свидетельствуют о существенном увеличении (до 30%) деформаций продольной и сдвиговой ползучести от воздействия соответственно касательных и нормальных напряжений.

Исходное определяющее уравнение ползучести (2.1) позволяет учесть влияние на процесс ползучести двухосности напряженного состояния, заданного комбинациями нормальных напряжений. Действительно, при комбинированном нагружении тонкостенных трубчатых образцов растяжением с внутренним давлением осевое напряжение растяжения оказывает влияние на окружную ползучесть, а окружное напряжение – на продольную ползучесть (рис. 1, б). Характерно, что окружное напряжение снижает деформации продольной ползучести (кривые 1 и 2), а осевое напряжение снижает деформации окружной ползучести (кривые 3 и 4). Это снижение может достигать 80%.

**4.3. Объемная ползучесть.** Рассчитывается деформация объемной ползучести при одноосном растяжении, при растяжении с кручением, под внутренним давлением и при растяжении с внутренним давлением. Решение строится на основе определяющего уравнения (1.1) с использованием значений упругих постоянных и значений параметров ядра объемной ползучести, приведенных в табл. 1 и 2.

Для деформации объемной ползучести  $\varepsilon_v(t)$  из (1.1) с учетом (1.5) при растяжении с кручением и  $\sigma_{11}(t) = \text{const}$  получаем уравнение

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{3B} \sigma_{11} \left[ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_v)^n t^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \right], \quad (4.10)$$

а при растяжении с внутренним давлением при  $\sigma_{11}(t) = \text{const}$  и  $\sigma_{22}(t) = \text{const}$  – уравнение

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{3B} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \left[ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{n=100} \frac{(-\beta_v)^n t^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \quad (4.11)$$

$$\left( \varepsilon_0(t) = \frac{1}{3} \varepsilon_v(t); \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11} \text{ и } \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right).$$

Результаты расчетов (штриховые линии) деформаций объемной ползучести  $\varepsilon_v(t)$ , выполненных по уравнениям (4.10) и (4.11), приведены на рис. 2 для трубчатых тонкостенных образцов из полиэтилена высокой плотности ПВП при растяжении с кручением (а) и при растяжении с внутренним давлением (б). Точками нанесены данные, полученные исходя из соотношения

$$\varepsilon_v(t) = (1 - 2\nu) \varepsilon_{11}(t), \quad (4.12)$$

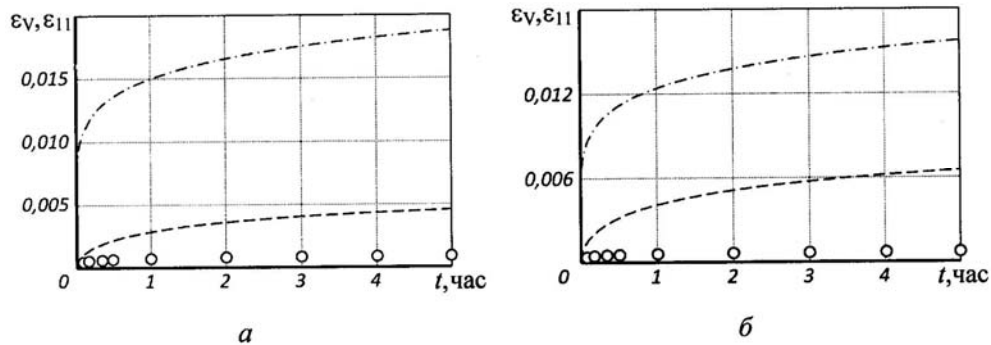


Рис. 2

где  $\varepsilon_{11}(t)$  – деформации продольной ползучести, измеренные в эксперименте;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

При растяжении с кручением деформации объемной ползучести  $\varepsilon_v(t)$  рассчитывались для напряжений  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\sigma_{21} = 2,22$  МПа, а при растяжении с внутренним давлением – для напряжений  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа и  $\sigma_{22} = 2,22$  МПа. Для сравнения штрих-пунктирными линиями нанесены значения деформаций продольной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$ , рассчитанные для  $\sigma_{11} = 5,18$  МПа.

Расчетные значения деформаций объемной ползучести, как следует из рис. 2, существенно отличаются от экспериментальной интерпретации согласно (4.12). Это расхождение может быть обусловлено тем обстоятельством, что в (4.12) коэффициент  $\nu$  принят не зависящим от времени. В действительности, по-видимому, величина  $\nu$  со временем уменьшается.

#### Заключение.

Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии выполнена для условий, когда закон линейного деформирования можно представить в виде уравнения для сдвигов и уравнения объемного деформирования. В результате сформулированы зависимости между ядрами сдвиговой и объемной ползучести при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении. В рамках выбранного подхода могут быть решены задачи расчета деформаций продольной и окружной ползучести под действием внутреннего давления и внутреннего давления с растяжением. Под действием растяжения с кручением и внутреннего давления с кручением взаимовлияние нормальных и касательных компонент на процесс ползучести не учитывается.

РЕЗЮМЕ. Сформульовано залежності між ядрами повзучості, що задають зсувні та об'ємні в'язкопружні властивості ізотропного лінійно-в'язкопружного середовища за умов складного напруженого стану, та ядрами повздовжньої та зсувної повзучості, що побудовані для одновісного розтягу та чистого кручення. Визначальні рівняння в'язкопружності для складного напруженого стану вибрано у вигляді суперпозиції рівняння для зсувів та рівняння об'ємного деформування. Ядра спадковості задано дробово-експоненційною функцією Работнова. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій повзучості тонкостінних труб за умов комбінованого навантаження розтягом із крученням та розтягом із внутрішнім тиском.

1. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 70 – 80.
2. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. Определение параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии // Теорет. и прикл. механика. – 2012. – № 5(51). – С. 26 – 35.

3. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 248 с.
4. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука. – 1970. – 240 с.
5. Колтунов А.А. Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие) // Механика полимеров. – 1969. – № 4. – С. 754 – 758.
6. Крегерс А.Ф., Вилкс У.К., Лейтмане М.Я. Прямая и обратная ползучесть физически нелинейного полимерного материала // Механика полимеров. – 1973. – № 5. – С. 786 – 795.
7. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York and London: Academic Press Inc., 1971. – 338 p.
8. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. – Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.
9. Golub V. P., Ragulina V. S., Fernati P. V. Determining the Parameters of the Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Isotropic Materials in Torsion // Int. App. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 196 – 206.
10. Golub V.P., Fernati P.V., Lyashenko Ya.G. Determining the Parameters of the Fractional Exponential Heredity Kernels of Linear Viscoelastic Materials // Int. App. Mech. – 2008. – **40**, N 9. – P. 963 – 974.
11. Golub V.P., Pavluk Ya.V., Fernati P.V. Determining the Parameters of Fractional Exponential Hereditary Kernels for Nonlinear Viscoelastic Materials // Int. App. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 220 – 232.
12. Kaminsky A.A. Mechanics of the Delayed Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory and Experiment (Review) // Int. App. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 485 – 549.
13. Kaminsky A.A., Selevanov M.F., Chernoiivan Yu.A. Initial Fracture of a Viscoelastic Isotropic Plate with Two Collinear Cracks of Equal Length // Int. App. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 310 – 321.
14. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – 822 p.

Поступила 19.06.2014

Утверждена в печать 22.12.2015