

Я. М. Григоренко, Л. С. Рожок

**ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ
В ВИДЕ ВЫПУКЛЫХ ПОЛУГОФРОВ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigenko@yandex.ru, r.l.s@mail.ru*

Abstract. An influence of a change of curvature on the stress state of hollow cylinders with the cross-section in the form of semi-corrugations is studied. This change is resulted by variation of the radius of moving circle and the distance to its center. The problem is solved in the spatial statement with use of analytical methods of separation of variables, approximation of functions by discrete Fourier series, and numerical method of discrete orthogonalization. The findings are shown in the form of plots of distribution of the fields of displacements and stresses.

Key words: discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, convex semi-corrugations, noncircular hollow cylinders, stress state.

Введение.

В настоящее время, с выходом современной техники на чрезвычайно высокий уровень эксплуатационных параметров, увеличивается множество конструкций типа оболочек, применяемых в технике и строительстве, что связано с целью облегчить конструкцию, не уменьшив при этом ее несущую способность. Оболочки широко распространены в инженерных сооружениях, машиностроении, судостроении, в авиационной промышленности, ракетной технике и медицине [2, 6, 8, 11, 16].

Реализация многих современных проектов требует разработки конструкций типа оболочек весьма сложного внутреннего строения, при этом необходимо решать одновременно несколько проблем. Многочисленные примеры конструкций такого рода имеют место в термоядерной и атомной энергетике, химическом машиностроении, криогенной технике, новейших конструкциях пьезоэлектрических излучателей, космической технике и т.д. При эскизном проектировании этих конструкций большую роль играют методы теории оболочек, поскольку они позволяют наиболее просто проследить влияние тех или иных параметров и предложить пути улучшения конструкций.

Проблема надежности элементов конструкций выдвигает на первый план вопрос о повышении точности расчетов, при этом немаловажную роль играет выбор расчетной модели. В связи с этим проводятся исследования по дальнейшему усовершенствованию моделей деформирования оболочек и их реализации в методах решения конкретных классов задач. Их развитие стимулируется, с одной стороны, стремлением создать математически корректные модели оболочек, с другой – необходимостью с достаточной точностью решать задачи по расчету элементов конструкций. Этим обусловлено наличие большого количества вариантов различных моделей оболочек [1, 3, 10, 14].

Отклонение формы поперечного сечения от круговой приводит к необходимости выбора гладкой кривой, описывающей срединную поверхность, не допускающей разрывов первой и второй производной. В некоторых работах волнообразный характер поперечного сечения описывается частью сферы или синусоиды [13] либо дугами окружностей положительной и отрицательной кривизны, сопряжения которых выполнено так, что угол наклона касательной к кривой изменяется без скачков [12]. В работе [5] поперечное сечение в виде выпуклых полугофров описывается гладкой кривой – укороченной эпициклоидой.

Данная статья является продолжением исследований напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек с поперечным сечением в виде соединенных выпуклых полугофров, которое описывается с помощью укороченной эпициклоиды. Задача решена в пространственной постановке с использованием аналитических методов разделения переменных, аппроксимации функций дискретными рядами Фурье и численного метода дискретной ортогонализации.

§1. Постановка задачи.

Рассматриваем упругие полые цилиндры постоянной толщины, находящиеся под действием внешней поверхностной нагрузки $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$), в криволинейной ортогональной системе координат s, ψ, γ : s – длина дуги образующей, ψ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$) – угловой параметр, центральный угол в поперечном сечении, γ ($\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$) – нормальная координата по толщине цилиндра.

Поперечное сечение направляющей поверхности отсчета (рис. 1) задано в параметрической форме укороченной эпициклоидой [9] в виде

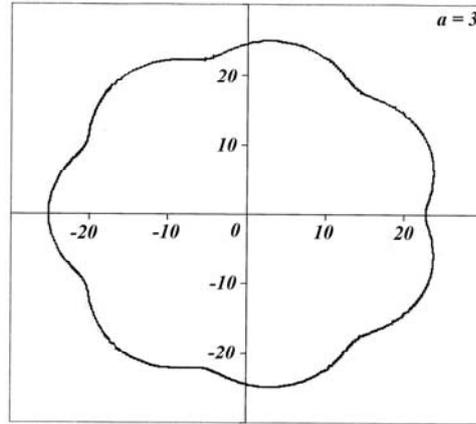


Рис. 1

$$x = (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos \left(\frac{A + a}{a} \psi \right); \quad y = (A + a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A + a}{a} \psi \right),$$

где A – радиус неподвижной окружности; a ($a > 0$) – радиус подвижной окружности; λa ($\lambda < 1$) – расстояние до центра подвижной окружности.

В выбранных криволинейных ортогональных координатах первая квадратичная форма имеет вид

$$dS^2 = ds^2 + B_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2$$

$$\left[B_2 = B_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma) \omega(\psi); \quad H_2 = H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}; \right.$$

$$\left. \omega = \omega(\psi) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi} \right)^2}; \quad R_\psi = R(\psi) = \frac{\left(\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi} \right)^2 \right)^{3/2}}{\frac{dx}{d\psi} \frac{d^2 y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \frac{d^2 x}{d\psi^2}};$$

H_2 – параметр Ламе; R_ψ – радиус кривизны в поперечном сечении; ω – коэффициент перехода от координаты дуги направляющей к угловому параметру ψ].

В качестве исходных приняты уравнения пространственной теории упругости для изотропного тела [15]. На торцах цилиндра рассматриваем следующие граничные условия:

$$\sigma_s = 0; \quad u_\psi = 0; \quad u_\gamma = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad s = l. \quad (1.1)$$

Граничные условия на боковых поверхностях имеют вид

$$\sigma_\gamma = 0; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \quad (1.2)$$

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \quad \tau_{s\gamma} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \quad (1.3)$$

Приняв в качестве разрешающих функций компоненты напряжений $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}$ и перемещений u_γ, u_s, u_ψ , после некоторых преобразований получим для трехмерной краевой задачи разрешающую систему уравнений в частных производных шестого порядка с переменными коэффициентами в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2 R_\psi} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} + \\ &+ \frac{1}{H_2 R_\psi} \left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2} \frac{1}{R_\psi} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \frac{1}{H_2} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \right] - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{2}{H_2 R_\psi} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \right] - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right]; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_\gamma; \\ \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\psi \\ &(0 \leq s \leq l; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi; \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

с граничными условиями (1.1–1.3).

§2. Метод решения.

Наличие граничных условий (1.1) позволяют разделить переменные вдоль образующей цилиндра. Для этого компоненты нагрузки и разрешающие функции представим в виде разложений в ряды Фурье по координате s , т.е.

$$\begin{aligned} X(s, \psi, \gamma) &= \sum_{n=1}^N X_n(\psi, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(\psi, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (2.1) \\ (X &= \{\sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_\psi, q_\gamma\}; \quad Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s\}; \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (0 \leq s \leq l)). \end{aligned}$$

После подстановки рядов (2.1) в разрешающую систему уравнений (1.4), соответствующие граничные условия (1.2), (1.3) и разделения переменных, для каждого чле-

на рядов (2.1) получим разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, описывающих двумерную краевую задачу [4].

Входящие в разрешающую систему уравнений выражения, препятствующие разделению переменных по координате ψ , рассматриваем как дополнительные функции, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1^j &= \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s \} \quad (j = \overline{1,4}); \quad \varphi_1^5 = \left(\frac{1}{H_2 R_\psi} \right)^2 u_\gamma; \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_\psi \} \quad (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \quad \varphi_5 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \\ \varphi_6 &= \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Введение дополнительных функций (2.2) дает возможность формально представить разрешающую систему дифференциальных уравнений в виде, допускающем разделение переменных по координате ψ . Представляя далее компоненты нагрузки, разрешающие и дополнительные функции в виде разложений в ряды Фурье по координате ψ

$$\tilde{X}(\psi, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi; \quad (2.3)$$

$$\tilde{X} = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma \}; \quad \tilde{Y} = \{ \tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7 \}$$

и подставляя их в разрешающую систему уравнений, после разделения переменных получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных значений рядов Фурье (2.3) в виде (в обозначениях разрешающих функций и компонентом нагрузки опустим индекс n , соответствующий разложениям в ряды Фурье (2.1))

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E}{1-\nu^2} (\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5); \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2} \lambda_n^2 u_{s,k} - \\ &- \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)} \varphi_{6,k}; \\ \frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \lambda_n^2 u_{\psi,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \right) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - \\ &- \frac{E}{1-\nu^2} (\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu} \varphi_{3,k}^1; \end{aligned}$$

$$\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} = \frac{(1-\nu-2\nu^2)}{(1-\nu)E} \sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu} (\lambda_n u_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \quad \frac{du_{s,k}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad (2.4)$$

$$\frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}),$$

с граничными условиями

$$\sigma_{\gamma,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \quad (2.5)$$

$$\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \quad \tau_{s\gamma,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \quad (2.6)$$

Полученную краевую задачу (2.4) – (2.6) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации одновременно для всех k гармоник разложений в ряды Фурье (2.3). В процессе интегрирования, на каждом шаге, амплитудные значения дополнительных функций вычисляем по текущим значениям амплитуд разрешающих функций с применением метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье [7]. В начале интегрирования, с учетом граничных условий, дополнительные функции вычисляем по заданным начальным значениям разрешающих функций.

§3. Числовые результаты и их анализ.

Проведем анализ напряженного состояния полых цилиндров рассматриваемого класса в зависимости от изменения кривизны поперечного сечения. Задача решена при таких исходных данных: радиус неподвижной окружности $A = 21$; радиус подвижной окружности $a = 3; 7$; параметр $\lambda = 0,4; 0,5$; толщина цилиндра $h = 2$; длина цилиндра $l = 60$; модуль Юнга $E = E_0$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Радиус кривизны поверхности отсчета принимает свое минимальное значение в местах соединения полугофров при $\psi = 0$. В таблице приведены значения радиусов кривизны и отношения толщины к радиусам кривизны для четырех вариантов рассматриваемых цилиндров.

Из таблицы видно, что отношение $h / |R_\psi|$ находится в пределах допустимых для толстостенных оболочек и оболочек средней толщины, что оправдывает выбор пространственной модели для решения данного класса задач.

| $A = 21; \quad h = 2$ | | | | |
|-----------------------|-----|-----|------|------|
| a | 7 | | 3 | |
| количество полугофров | 3 | | 7 | |
| λ | 0,4 | 0,5 | 0,4 | 0,5 |
| $ R_\psi $ | 3,9 | 2,0 | 16,8 | 7,0 |
| $h/ R_\psi $ | 0,5 | 1 | 0,12 | 0,29 |

Результаты решения задачи представлены на рис. 2 – 7 в среднем сечении по длине цилиндра.

На рис. 2, 3 показаны графики распределения полей перемещений u_γ срединной поверхности вдоль направляющей цилиндра.

Из анализа графиков, приведенных на рис. 2 следует, что для цилиндров с тремя полугофрами с увеличением параметра λ значения перемещений увеличиваются незначительно как в сечении $\psi = 0$, так и в сечении $\psi = \pi/3$. При этом при переходе от места соединения полугофров к их вершине перемещения уменьшаются в четыре раза, меняя свой знак на противоположный.

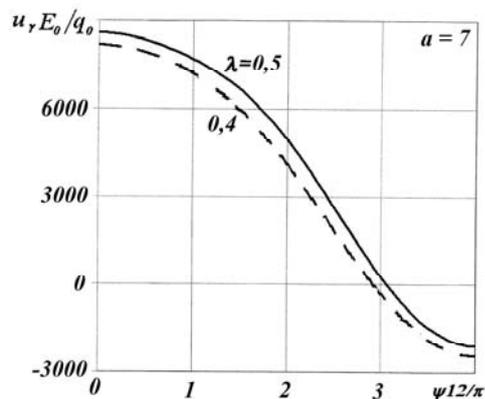
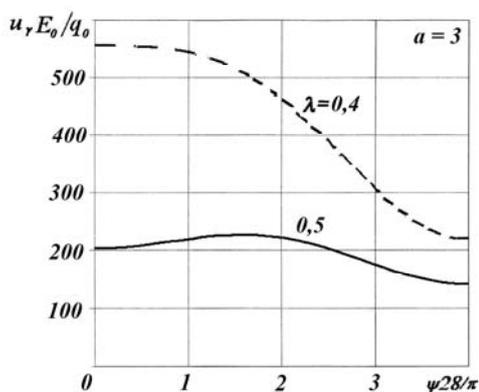


Рис. 2

Рис. 3

На рис. 3 наблюдаем иную картину распределения перемещений для цилиндров с 7 полугофрами. С увеличением расстояния до центра подвижной окружности значения перемещений уменьшаются в 2,7 раза при $\psi = 0$ и в 1,6 раза при $\psi = \pi/7$. Увеличение количества полугофров приводит к усилению жесткости конструкции, с чем связано значительное уменьшение значений перемещений.

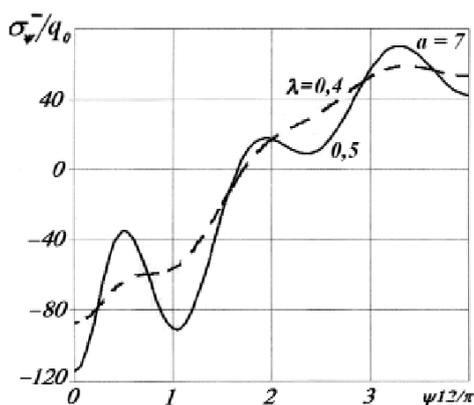


Рис. 4

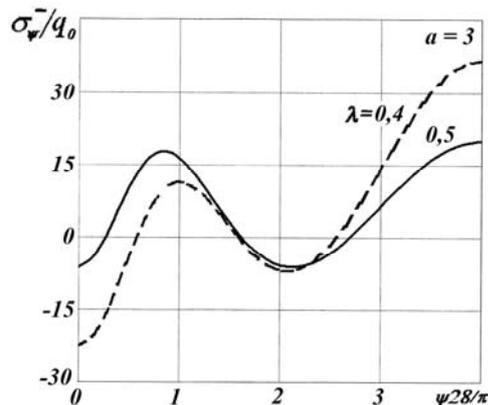


Рис. 5

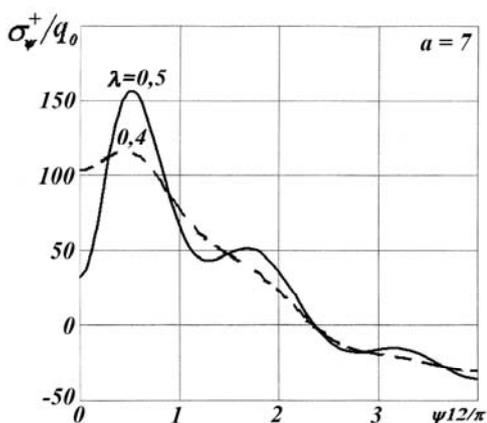


Рис. 6

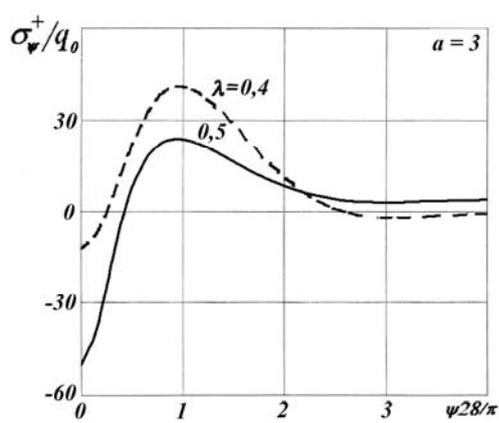


Рис. 7

На рис. 4, 5 представлены графики распределения полей напряжений σ_{ψ}^{-} на внутренней поверхности, а на рис. 6, 7 – графики распределения полей напряжений σ_{ψ}^{+} на внешней поверхности вдоль направляющей цилиндра.

Анализ результатов (рис. 4, 5) свидетельствует, что максимальные значения напряжения σ_{ψ}^{-} имеют для $a = 7$ в местах соединения полугофров при $\psi = 0$, а для $a = 3$ – в вершине полугофров при $\psi = \pi / 7$. При этом для цилиндров с 7-ю полугофрами, вследствие большей жесткости цилиндра, напряжения достигают значительно меньших значений при $\psi = 0$.

Из анализа результатов (рис. 6) следует, что при $a = 7$ максимальные значения напряжения σ_{ψ}^{+} принимают на некотором удалении от сечения $\psi = 0$ и с увеличением параметра λ увеличиваются, примерно, в 1, 2 раза.

Для $a = 3$ (рис. 7) напряжения достигают своего максимального абсолютного значения на некотором удалении от места соединения полугофров при $\lambda = 0,4$, а в сечении $\psi = 0$ – при $\lambda = 0,5$. В вершине полугофров $\psi = \pi / 7$ величины напряжений близки нулю.

Заключение.

В пространственной постановке получено решение задачи и проведено исследование напряженного состояния полых цилиндров с поперечным сечением в виде выпуклых полугофров, описанных с помощью укороченной эпициклоиды, в зависимости от изменения кривизны, вызванной вариациями радиуса подвижной окружности и расстояния до ее центра.

Анализ проведенного исследования напряженного состояния указанного класса цилиндров показывает, что с изменением радиуса подвижной окружности и расстояния до ее центра увеличивается жесткость всего цилиндра, что оказывает существенное влияние на распределение полей перемещений и напряжений.

РЕЗЮМЕ. В просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації проведено дослідження впливу на напружений стан порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів зміни кривизни, що обумовлена варіаціями радіуса рухомого кола та відстанню до його центра. Результати розв'язування задачі наведено у вигляді графіків розподілу полів переміщень і напружень та дано їх аналіз.

1. Куликов Г.М., Плотникова С.В. Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсечных поверхностей // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 54 – 64.
2. Chernopiskii D.I. On stress-strain state in thick-walled cylindrical shells bounded by corrugated surfaces // Strength of Materials – 2012. – 44, N 1. – P. 40 – 52.
3. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 123 – 197.
4. Grigorenko Ya.M., Rozhok, L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. App. Mech. – 2014. – 50, N 2. – С. 105 – 127.
5. Grigorenko Ya.M., Rozhok, L.S. Stress State of Hollow Cylinders With Convex Corrugated Cross Sections // J. Math. Scie. – 2014. – 198. – N 2. – P. 158 – 165.
6. Fung-Bao Liu, Ying-Chi Tsai An experimental and numerical investigation of fluid flow in a cross-corrugated channel // Heat and Mass Transfer. – 2010. – 46, N 5. – P. 585 – 593.
7. Hamming R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
8. Janz R. F., Ozpetek S., Ginzton L. E., and Laks M. M. Regional stress in a noncircular cylinder // Biophys J. – 1989 – 55, N 1. – P. 173 – 182.

9. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
10. Preissner E.C., Vinson J.R. Application of Theorem of Minimum Potential Energy to a Complex Structure Part I: Two-Dimensional Analysis // Int. J. Solids and Structures – 2003. – **40**, N 5. – P. 1089 – 1108.
11. Sakata K., Ben G. Fabrication method and compressive properties of CFRP ISOGRID cylindrical shells // Adv. Comp. Mat. – 2012. – **22**, N 5 – 6. – P. 445 – 457.
12. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 702 – 714.
13. Semenyuk N. P., Zhukova N. V., Ostapchuk V. V. Stability of Corrugated composite Noncircular Shells under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 12. – P. 1380 – 1389.
14. Soldatos K. P. Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross-Section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
15. Timoshenko S.P. Theory of Elasticity. New York: MG Graw-Hill, 1934. – 452 p.
16. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure // Russian Aeronautics (Iz VUZ) – 2014. – 57, N 2. – P. 118 – 126.

Поступила 02.11.2014

Утверждена в печать 22.12.2015

