

В.М.Быстров, В.А.Декрет, В.С.Зеленский

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В СЛОИСТОМ КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ ПРИ СЖАТИИ СЛОЕВ НАПОЛНИТЕЛЯ

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: numer@inmech.kiev.ua*

Abstract. Basing on the model of piece-wise homogeneous medium, a numerical solution of the problem on determination of parameters of edge effect in a sample from layered composite material is obtained when the filler layers are unidirectionally longitudinally compressed. A case of mixed boundary conditions on the sample lateral sides is considered that corresponds of conditions of regularity of material structure and symmetry of surface loading. Also, a case of boundary conditions in stresses for the free of loads lateral sides of sample is considered. A dependence of the length of edge effect on the ratio of mechanical characteristics of components of composite material is studied.

Key words: sample from layered composite material, compression of filler layers, length of edge effect, modified variational-difference method.

Введение.

При проектировании, расчете и испытании композитных материалов (КМ) представляет интерес исследование совместного влияния на краевые эффекты таких факторов, как структурная неоднородность КМ и внешние условия нагружения и закрепления образцов из КМ. Одним из аспектов указанной проблемы является исследование области неустановившегося напряжено-деформированного состояния (зоны краевого эффекта) в окрестности приложения поверхностной нагрузки, когда существенное изменение последней происходит на расстояниях, сравнимых с характерным размером структурной неоднородности КМ. Это, в частности, соответствует случаю приложения поверхностной нагрузки только к армирующим компонентам образца из КМ. Во многих работах, связанных с исследованием влияния неоднородности материала на затухание краевых эффектов, отмечается, что протяженность зоны краевых эффектов при определенном соотношении упругих и геометрических свойств компонент материала может достигать больших значений [1, 8, 12, 13, 15, 17 – 20]. Это накладывает существенное ограничение на традиционное применение принципа Сен-Венана при проектировании и расчете конструкций из КМ. Характер затухания краевого эффекта, геометрия его зоны, распределение полей напряжений и деформаций в зоне краевого эффекта зависят от соотношения геометрических параметров, которые характеризуют область изменения внешней нагрузки и структурную неоднородность материала. Так, в [4] исследованы краевые эффекты в волокнистых однонаправленных композитах регулярной структуры, связанные с перераспределением внешней нагрузки между волокном и матрицей при продольном растяжении волокон. Задача сформулирована на ячейке периодичности для случая гексагональной модели микро-структуры. Показано, что размер зоны краевого эффекта находится в пределах одно-двух характерных размеров внутренней структуры композита. Аналогичные результаты оценки зоны краевого эффекта получены в [2, 3] для случая равномерного нагружения армирующих слоев КМ, когда задача также формулируется на двухслойном элементе периодичности. В то же время, как показано в [1, 12], для элемента периодичности, размер которого определяется периодом поверхностной нагрузки и при

этом превышает размер внутреннего параметра структуры композита, размер зоны краевого эффекта достигает значительно более высоких значений. Асимптотический характер зависимости размера зоны краевого эффекта от размера элемента периодичности вдоль линии приложения поверхностной нагрузки материала позволяет выделить представительный элемент материала [8]. Представительный элемент наследует структуру материала на соответствующем уровне рассмотрения его неоднородности. Для такого элемента зависимость параметров затухания краевого эффекта от геометрических и механических свойств компонентов КМ имеет установившийся относительно выбора расчетной области характер.

В работах [1, 12] в рамках модели кусочно-однородной среды с использованием соотношений теории упругости и количественного критерия затухания краевого эффекта рассмотрен вопрос о затухании краевого эффекта в слоистом КМ при одноосном продольном сжатии материала кусочно-постоянной нагрузкой, приложенной к армирующим слоям. Исследована зависимость параметров затухания краевого эффекта от периода поверхностной нагрузки. Изменение периода нагрузки было связано с изменением количества ненагруженных слоев. Показано, что основной вклад в увеличение зоны краевого эффекта при изменении периода поверхностной нагрузки вносит наличие в расчетной области одного ненагруженного слоя наполнителя, что соответствует периоду нагрузки, равному двум параметрам структуры материала. При этом максимальная протяженность зоны краевого эффекта достигалась в ненагруженном слое наполнителя. Дальнейшее увеличение периода поверхностной нагрузки приводило к незначительному увеличению протяженности зоны краевого эффекта (в пределах 5%) при ее выходе на установившееся значение. Таким образом, в качестве представительного элемента материала при исследовании краевых эффектов целесообразно использовать расчетную область, размер которой вдоль линии приложения нагрузки составляет два параметра структуры материала.

В данной работе для указанной расчетной области построена расчетная схема и исследовано влияние упругих характеристик компонент слоистого КМ на затухание краевого эффекта для двух видов граничных условий на боковых сторонах расчетной области. Одно из них соответствует условиям симметрии для элемента периодичности бесконечной слоистой среды, второе – случаю свободных от напряжений боковых поверхностей композитного образца. В дальнейшем первый вид граничных условий будем соотносить с КМ, второй – с образцом из КМ, который имеет конечные размеры вдоль линии приложения поверхностной нагрузки. Рассмотрение различных видов граничных условий позволяет более полно учесть реальные условия эксплуатации композитов. Аналогичные расчетные схемы использованы в [10] для определения и анализа неоднородного докритического состояния в задаче устойчивости. Среди многочисленных работ, связанных с исследованием влияния неоднородности на затухание краевых эффектов для рассматриваемых граничных условий (т.н. граничных условий Дирихле и Неймана), можно указать работы [8, 17].

Следует отметить, что применение различных методов определения краевых эффектов, включая метод собственных решений, метод энергетических неравенств и т.п., в большинстве случаев приводит к получению крайних оценок для протяженности зоны краевого эффекта [8, 13, 17 – 20], оставляя открытым вопрос о геометрии зоны краевого эффекта и распределении напряжений и деформаций в этой зоне.

В данной работе применен подход, который основан на использовании соотношений теории упругости неоднородных тел и количественных критериев оценки краевого эффекта [2, 3]. Такой подход позволяет получить наиболее полную информацию о затухании краевого эффекта в окрестности приложения поверхностной нагрузки.

Сложность получения аналитических решений для задач указанного класса предполагает использование современных численных методов [5, 6]. Численный подход к решению задач определения краевых эффектов и устойчивости композитов слоистой и волокнистой структур при неоднородных докритических состояниях, который применяется в данной работе, развит в [1, 7, 10 – 12]. Это модифицированный вариационно-разностный подход, основу которого составляют метод сеток и концепция разностной базовой схемы [11]. Вопросы использования традиционного вариационно-разностного подхода и классификация различных методов расчета на его основе применительно к элементам конструкций из КМ рассмотрены, например, в [14].

§1. Постановка задачи. Расчетные схемы.

Рассмотрим задачу определения зоны краевого эффекта в двухкомпонентном КМ регулярной структуры при одноосном сжатии армирующих слоев поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности с периодом, равным двум параметрам структуры КМ (рис 1, а). Предполагаем, что на бесконечности армирующие слои также нагружены сжимающей нагрузкой с тем же периодом. Исходя из условий симметрии нагружения и регулярности структуры КМ, задачу решаем для расчетной области конечных размеров (рис 1, б). Поскольку исследуем влияние на затухание краевого эффекта граничных условий на боковых сторонах расчетной области, будем различать затухание краевого эффекта в КМ и образце из КМ (далее – композитном образце), который соответствует этому материалу. В первом случае граничные условия на боковых сторонах расчетной области соответствуют условиям симметрии. Во втором случае рассматриваем образец со свободными от напряжений боковыми сторонами. Первую расчетную схему будем условно относить к материалу, а вторую – к композитному образцу. Таким образом, имеем две расчетные схемы, которые позволяют провести сравнительный анализ затухания краевого эффекта в структуре материала для различных условий закрепления образца (рис 1, в).

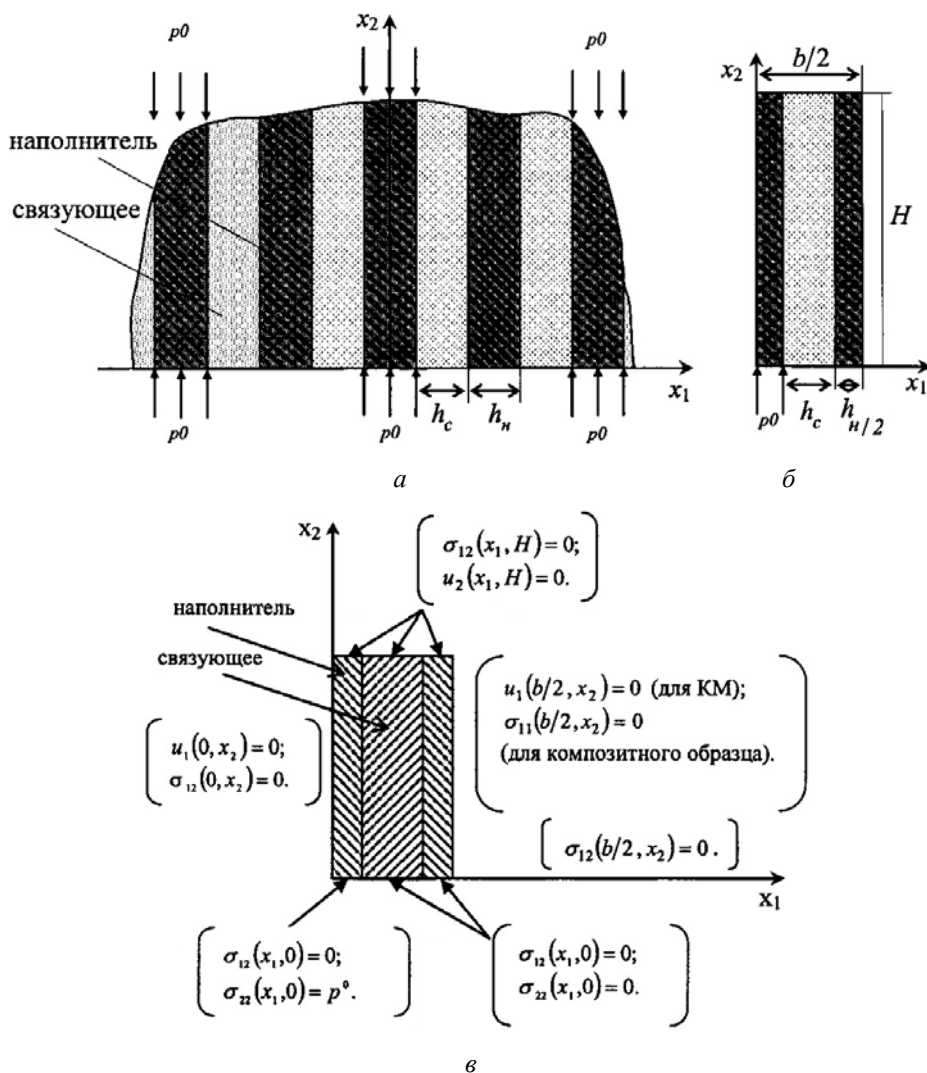


Рис. 1

При постановке задачи КМ и композитный образец отнесем к декартовой системе координат $Ox_1 x_2 x_3$ и разместим в верхнем полупространстве $x_2 \geq 0$. Принимаем, что слои являются достаточно протяженными в направлении оси Ox_3 , размещены параллельно плоскости $Ox_2 x_3$ и слои наполнителя сжимаются вдоль оси Ox_2 поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности. При выполнении этих условий задачу можно рассматривать в двумерной постановке для случая плоской деформации в плоскости $x_1 O x_2$ (рис. 1), где представлены геометрия расчетной области и условия нагружения.

Расчетные схемы, которые используются в данной работе, включают соответствующие краевые задачи теории упругости кусочно-однородных тел и количественный критерий затухания краевого эффекта для нормальных напряжений [1, 12]. При продольном деформировании материала слоистой структуры, когда краевой эффект распространяется вдоль непрерывных слоев, изменение напряжений имеет монотонный характер и в каждом компоненте материала при затухании краевого эффекта устанавливается однородное напряженное состояние. Установившиеся значения для нормальных напряжений используются в критерии затухания краевого эффекта. Расчетные схемы для КМ и композитного образца отличаются граничными условиями на боковой стороне $x_1 = b/2$ расчетной области – соответственно, смешанные однородные условия и однородные условия в напряжениях (рис 1, в).

Поверхностная нагрузка p действует в направлении оси Ox_2 и приложена к слоям наполнителя: $p(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 0) = p^0$, $|x_1| \leq 0,5h + kb$, $k = 0, 1, \dots$. Период b поверхностной нагрузки равен двум параметрам структуры: $b = 2h$, $h = h_n + h_c$, где h_n , h_c – соответственно, толщина слоя наполнителя и связующего. Вдоль оси Ox_3 нагрузка не изменяется. Расчетная область $\bar{\Omega}$, исходя из условий регулярности слоистой структуры и периодического характера поверхностной нагрузки, может быть представлена следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{n=1}^2 \bar{\Omega}^{(n)} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq b/2; 0 \leq x_2 \leq H\}, \quad (1.1)$$

где $\bar{\Omega}^{(n)}$ – область, занимаемая расчетным элементом n структуры материала. Расчетный элемент образуется половинами соседних слоев наполнителя и связующего. Такой элемент характеризуется размером $h/2$ в направлении оси Ox_2 . Размер расчетной области в направлении оси Ox_1 равен половине периода b поверхностной нагрузки. Размер H этой области в направлении оси Ox_2 определяется в рамках вычислительного эксперимента и соответствует условию установившегося вдоль оси Ox_2 напряженного состояния с заданной точностью и условию независимости параметров затухания краевого эффекта от этого размера. Для геометрических параметров материала и параметров нагрузки справедливо соотношение: $h_n < h \leq b < H$.

Граничные условия краевой задачи на участке $\{0 \leq x_1 \leq b/2, x_2 = 0\}$ границы расчетной области $\bar{\Omega}$ определяют поверхностную нагрузку. На участках $\{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H\}$ и $\{x_1 = b/2, 0 \leq x_2 \leq H\}$ границы расчетной области граничные условия соответствуют периодическому характеру напряженного состояния, условиям симметрии и являются *смешанными однородными условиями* для КМ. Такие же условия, исходя из условий симметрии, используются на участке $\{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H\}$ для композитного образца. На участке $\{x_1 = b/2, 0 \leq x_2 \leq H\}$ границы расчетной области граничные условия для композитного образца являются *однородными условиями в напряжениях*. Граничные условия на участке $\{0 \leq x_1 \leq b, x_2 = H\}$ границы расчетной области не допускают перемещение и вращение расчетной области как жесткого целого и также являются смешанными однородными условиями.

Для определения границы $\Gamma_\rho(x_1, x_2)$ зоны краевого эффекта и длины λ_ρ затухания краевого эффекта с точностью ρ % будем использовать следующие условия:

$$\tilde{\rho}(x_1, x_2) \Big|_{x \in \Gamma_\rho} = \rho \quad (1.2)$$

$$(\tilde{\rho} = 100(\sigma(x) - \sigma_{ycm}) / (p(x_1, 0) - \sigma_{ycm}), \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_\rho)$$

для случая продольного сжатия слоистого композита.

В (1.2) $\sigma_{ycm} = \sigma(x_1, H)$ – установившиеся напряжения на границе $x_2 = H$ расчетной области в направлении затухания краевого эффекта; $p(x_1) = \sigma(x_1, 0)$ – поверхностная нагрузка на границе $x_2 = 0$ расчетной области; $\sigma(x) = \sigma_{22}(x)$.

Длину затухания краевого эффекта λ_ρ определяем как максимальную протяженность зоны краевого эффекта в направлении его затухания, что соответствует условию

$$\lambda_\rho = \max_{x_1, x_2 \in \Gamma_\rho} (x_2). \quad (1.3)$$

§2. Численное решение задачи. Применение метода сеток.

Задачу определения напряженного состояния с последующим применением критерия затухания краевого эффекта решаем методом сеток на основе модифицированного вариационно-разностного подхода [11]. При таком подходе разностную схему для расчетной области строим в каждом сеточном узле как определенную сумму значений базовой схемы. Базовая схема представляет собой разностную схему, полученную вариационно-разностным способом на шаблоне ячейки разностной сетки.

При использовании численного подхода задача для исходной полубесконечной модели композитного материала сводится к задаче для ограниченной расчетной области. Размер этой области определяем в результате вычислительного эксперимента, исходя из условия, что максимальная протяженность зоны краевого эффекта принимает установившееся значение относительно увеличения размера расчетной области в направлении оси Ox_2 . Установленные размеры расчетной области для КМ используем также для композитного образца при сравнительном анализе влияния граничных условий на параметры затухания краевого эффекта.

На рис. 2 представлена расчетная область в которой введена неравномерная разностная сетка. На прямоугольной неравномерной разностной сетке $\bar{\omega} = \omega + \gamma$, которая аппроксимирует область $\bar{\Omega}$, континуальной задаче ставим в соответствие разностную задачу такого вида:

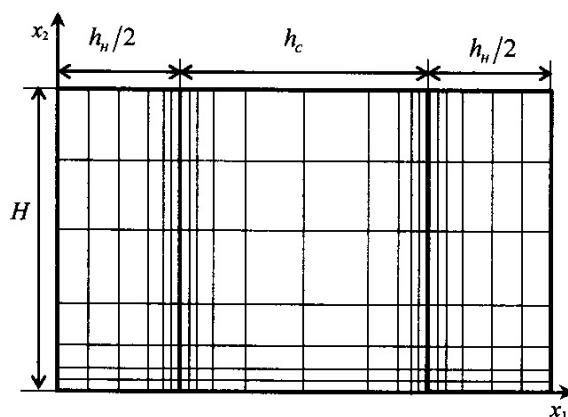


Рис. 2

$$L_{im}y(x) = F_{im}(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \bar{\omega} \quad (2.1)$$

$$\left(\begin{array}{l} L_{im}(x) = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_{im}(x)y_i, & x \in y_{im} \\ y_m, & x \in y_{im} \end{cases}; \quad F_{im} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} \varphi_{im}(\xi)y_m; \\ Y_m \end{cases} \\ \\ a_{im}(\xi)y_i = \begin{cases} -h \frac{\tau_{im} + \tau_{im}^{-\xi_i}}{\eta_{\xi_i}}, & \xi \in s_{\sigma_m} \\ y_m, & \xi \in s_{y_m} \end{cases}; \quad \varphi_m(\xi) = \begin{cases} h \left(F_{im} + 2 \frac{P_{im}}{\eta_{\xi_i}} \right); \\ Y_m \end{cases} \end{array} \right) \quad (2.2)$$

$$\left. \tau_{ii} = A_{ik}e_{kk}, \quad \tau_{12} = 2Ge_{12}, \quad e_{ij} = 0,5 \left(y_{i,\xi_j} - y_{j,\xi_i} \right), \quad y_{i,\xi_j} = -\text{sign}(\xi_i) \frac{y_i^{-\xi_j} - y_i}{h_{\xi_i}} \right\}$$

В (2.1), (2.2) величины τ_{ij} , e_{ij} , y_m – разностные аналоги континуальных переменных σ_{ij} , ε_{ij} , u_m ; a_{im} , φ_m – компоненты базового оператора a и базовой функции φ ; H – площадь ячейки разностной сетки; $\eta_i = -\text{sign}(\xi_j) \cdot h_{\xi_i}$ – знакопеременный шаг ячейки; $h_{\xi_i} = -\text{sign}(\xi_j) \eta_{\xi_i} > 0$ – знакопостоянный шаг. В силу знакопостоянности имеет место соотношение $h_{\xi_i} = h_{-\xi_i} = h_j > 0$; y_{i,ξ_j} – разностная производная сеточной функции $y(\xi)$ в направлении x_i , правая – при $\xi_i < 0$; $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_i = \pm i$ – параметр узла ячейки; знак $\sum_{\xi \in x}$ – суммирование компоненты базовой схемы по тем параметрам ξ , которые совпадают с сеточным узлом x ; $\xi_{-i} = -\xi_i$; E – тождественный оператор; γ_{u_m} – участок границы γ , на котором m -ая компонента разностного аналога граничного условия задана в смещениях.

Для решения разностной задачи применяем последовательно прямой метод Холleckого и итерационный метод сопряженных градиентов [15]. Решение, полученное первым методом, затем используем в качестве начального приближения для уточнения вторым методом. Разностная сетка при этом сгущается путем деления ее шагов пополам. Уплотнение шагов производим на границах расчетной области и на контакте компонентов композита.

§3. Числовые результаты и их анализ.

Рассмотрены КМ и композитный образец с одинаковой расчетной областью и следующими механическими и геометрическими характеристиками: $E^1 / E^2 = 20, 50, 100, 200, 500$ ГПа; $\nu^1 = \nu^2 = 0,3$; $c_n = h_n / (h_n + h_c) = 0,5$; $p^0 = 1$ ГПа. Здесь E^1 , ν^1 и E^2 , ν^2 – соответственно, модули Юнга и коэффициенты Пуассона слоев наполнителя и связующего, $c_n = h_n / (h_n + h_c) = 0,5$ – концентрация слоев наполнителя, где h_n , h_c – соответственно, толщина слоя наполнителя и связующего, p^0 – интенсивность поверхностной нагрузки, прикладываемой к слоям наполнителя с периодом $b = 2h$, $h = h_n + h_c$.

Как показывают результаты расчетов, наибольшее значение протяженности зоны краевого эффекта достигается в области контакта $x_1 = h_n/2 + h_c$ слоя связующего и ненагруженного слоя наполнителя. На рис. 3 представлено поведение функции затухания напряжений, заданной соотношениями (1.1), (1.2) при $E^1/E^2 = 100$. Кривые 1, 2 соответствуют композитному образцу, кривые 3, 4 – КМ. Для случая граничных условий на границе $x_1 = b/2$ в напряжениях, которые соответствуют композитному образцу, наблюдается более медленное затухание краевого эффекта по сравнению со смешанными граничными условиями, которые соответствуют КМ. При этом в случае композитного образца крайевой эффект быстрее затухает в матрице (кривая 2), чем в наполнителе (кривая 1). В случае КМ крайевой эффект быстрее затухает в наполнителе (кривая 4), чем в матрице (кривая 3). Т.е. различные граничные условия по-разному влияют на распределение напряжений между наполнителем и связующим и, соответственно, на характер затухания краевого эффекта в слоях наполнителя и связующего.

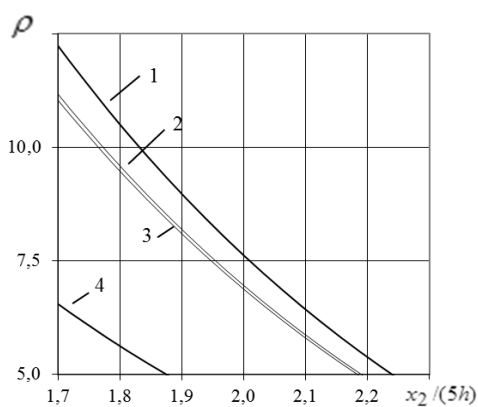


Рис. 3

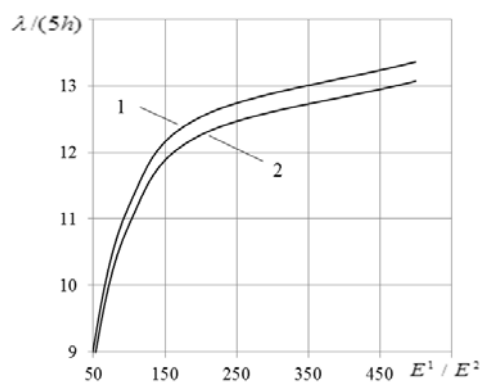


Рис. 4

На рис. 4 показано изменение максимальной протяженности зоны краевого эффекта в КМ и композитном образце при изменении отношения E^1/E^2 модулей Юнга наполнителя и связующего в указанных выше пределах. Кривая 1 соответствует композитному образцу, кривая 2 – КМ. Длина затухания краевого эффекта $\lambda = \lambda_\rho$ определена как максимальная протяженность зоны краевого эффекта с точностью $\rho = 5\%$ в соответствии с условием (1.3). Для большей наглядности представления графической информации длина затухания краевого эффекта отнесена к величине, равной 5 параметрам структуры h . Представленные зависимости имеют качественно одинаковый характер для КМ и композитного образца. При этом максимальная протяженность зоны краевого эффекта в композитном образце имеет большее значение, чем в КМ во всем диапазоне изменения отношения модулей Юнга наполнителя и связующего и в большей степени проявляется для более высоких значений этого отношения.

Исходя из полученных результатов, можно отметить, что наложение дополнительных связей в виде смешанных граничных условий на боковых сторонах расчетной области, которые соответствуют условиям симметрии и включают кинематические условия по одной из составляющих, приводит к уменьшению зоны краевого эффекта. Таким образом, рассмотренные расчетные модели для сравнительного анализа затухания краевого эффекта в композитном образце и КМ учитывают влияние граничных условий на механизмы перераспределения внешней нагрузки между наполнителем и связующим и позволяют более адекватно учесть влияние на указанные механизмы реальных условий эксплуатации элементов конструкций и условий испытания образцов из КМ.

Выводы.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

Длина затухания краевого эффекта в окрестности приложения поверхностной нагрузки для композитного образца, которому соответствуют граничные условия в напряжениях на боковых сторонах расчетной области, превышает соответствующее значение для КМ, которому соответствуют смешанные граничные условия. Перераспределение внешней нагрузки между наполнителем и связующим для различных граничных условий приводит к противоположным максимальным значениям в компонентах КМ и композитного образца – в случае композитного образца максимальное значение протяженности зоны краевого эффекта достигается в слое наполнителя, а в случае КМ максимальное значение достигается в матрице.

При увеличении отношения модулей Юнга компонент материала, что соответствует увеличению анизотропии материала на макромеханическом уровне, максимальная протяженность зоны краевого эффекта увеличивается как в КМ, так и в композитном образце.

Наложение дополнительных связей в виде смешанных граничных условий на боковых сторонах расчетной области, которые соответствуют условиям симметрии и включают кинематические условия по одной из составляющих, приводит к уменьшению зоны краевого эффекта.

РЕЗЮМЕ. На основі моделі кусково-однорідного середовища отримано чисельний розв'язок задачі визначення параметрів крайового ефекту у шаруватому композитному матеріалі при одновісному повздовжньому стисканні шарів наповнювача. Розглянуто випадок змішаних граничних умов на бічних сторонах композитного зразка, які відповідають умовам регулярності структури матеріалу і симетрії поверхневого навантаження та випадок граничних умов у напруженнях для вільних від навантаження бічних сторін зразка. Досліджено залежність довжини згасання крайового ефекту від співвідношення механічних характеристик компонент композитного матеріалу.

1. Быстров В. М., Зеленский В. С. Затухание краевого эффекта при продольном и поперечном сжатии материалов, армированных компонентами прямоугольной формы // Системні технології: Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2009. Вип. 3(62). – С. 99 – 104.
2. Головач В.Т., Гузь А.Н., Коханенко Ю.В., Куц В.И. Статика материалов / Механика композитов: в 12 т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.1. – К.: Наук. думка, 1993. – 455 с.
3. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы / Механика композитов: в 12-и т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.11. – К.: «А.С.К.», 2002. – 448 с.
4. Andrianov I.V., Danishevs'kyi V.V., Weichert D. Analytical study of the load transfer in fiber-reinforced 2D composite materials // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 1217 – 1243.
5. Akin J. E. Finite element analysis concepts: via SolidWorks. – Hackensack, NJ: World Scientific, 2010. – 335 p.
6. Barbero E. J. Finite Element Analysis of Composite Materials Using ANSYS. – CRC Press, 2nd edition, Taylor & Francis Group, 2013. – 366 p.
7. Bashchuk E.Yu., Baichuk V.Yu. Influence of the Principal Stress State of the Critical Loads of a Plate with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 3. – P. 328 – 336.
8. Baxter S.C., Horgan C.O. End Effects for Anti-plane Shear Deformation of Sandwich Structure // J. of Elasticity. – 1995. – **40**, N 2. – P. 123 – 164.
9. Bystrov V.M. Analysis of the Decay of Edge Effects in Laminated Materials on the Basis of Representative Element // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 6. – P. 826 – 835.
10. Dekret V.A., Zelenskii V.S., Bystrov V.M. Numerical Analysis of the Stability a Laminated Composite with Uniaxially Compressed Reinforcement Plies // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 549 – 557.
11. Kokhanenko Yu.V. Numerical Analysis of Edge Effects in Laminated Composites under Uniaxial Loading // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 516 – 529.

12. *Kokhanenko Yu.V., Bystrov V.M.* Edge Effect in a Laminated Composite with Longitudinally Compressed Laminas // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 8. – P. 922 – 928.
13. *Leseduardo M.C., Quintanilla R.* Saint-Venant decay rates for a non-homogeneous isotropic mixture of elastic solids in anti-plane shear // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – **42**, N 9 – 10. – P. 2977 – 3000.
14. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 5. – P. 613 – 687.
15. *Miller K.L., Horgan C.O.* Saint-Venant end effects for plane deformations of elastic composites // *Mechanics of Composite Materials and Structures.* – 1995. – **2**, N 3. – P. 203 – 214.
16. *Pissanetzky S.* Sparse Matrix Technology. – London: Academic Press, 1984. – 321 p.
17. *Scalpato M.R., Horgan C.O.* Saint-Venant Decay Rates for an Isotropic Inhomogeneous Linearly Elastic Solid in Anti-Plane Shear // *J. of Elasticity.* – 1998. – **48**, N 2. – P. 145 – 166.
18. *Tullini N., Savoia M.* Decay rate of Saint-Venant end effects for multilayered orthotropic strips // *Int. J. Solids Struct.* – 1997. – **34**, N 33 – 34. – P. 4263 – 4280.
19. *Wijeyewickrema A.C.* Decay of stresses induced by self-equilibrated end loads in a multilayered composite // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**. – P. 515 – 523.
20. *Wijeyewickrema A.C., Horgan C.O., Dundurs J.* Further analysis of end effects for plane deformations of sandwich strips // *Int. J. Solids Struct.* – 1996. – **33**. – P. 4327 – 4336.

Поступила 25.12.2013

Утверждена в печать 26.05.2015
