

К. В. Аврамов, Е. А. Стрельникова

**НАСЫЩЕНИЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ХАОТИЧЕСКИХ
АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНОК ПРИ РЕЗОНАНСНОМ
МНОГОМОДОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ**

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Дм. Пожарского 2/10, Харьков 61046, Украина, e-mail: kvavr@kharkov.ua*

Abstract. A based on solution of a singular integral equation new approach is proposed to analyze the aeroelastic vibrations of thin plates. The circulation of velocity is expanded by the generalized coordinates of vibrations of plate. This ensures that the aeroelastic vibrations are described by a system of finite degree of freedom relative to generalized coordinates. A next scenario is studied: the motions of plate undergo the Naimark bifurcation and transform into the quasi-periodic vibrations that further transform into the chaotic ones.

Key words: aeroelastic nonlinear vibrations, potential flow, incompressible nonviscous fluid, thin plate, generalized coordinates of vibrations of plate, Naimark bifurcation, quasi-periodic vibrations, chaotic vibrations.

1. Введение.

Динамика двухстороннего взаимодействия тонкостенных конструкций с движущимся газовым потоком более полувека находится под пристальным вниманием ученых и инженеров. Эта проблема чрезвычайно важна в аэрокосмической технике, энергетике, транспорте. Основы аэродинамики несущих поверхностей рассмотрены в монографиях [2, 3, 4]. Для определения распределенных сил давления, действующих на колеблющуюся пластинку, используются гиперсингулярные интегральные уравнения. Теория этих уравнений и численные методы их решения рассмотрены в работах [11, 12, 13, 6]. Устойчивость аэроупругих колебаний пластинок в потоке газа исследована в статьях [7, 14]. Флаттер пластинок в газовом потоке рассмотрен в работах [15, 16]. Хаотические колебания пластины, взаимодействующей с потоком, рассмотрены в [5]. Взаимодействие цилиндрических оболочек с движущимся газовым потоком изучено в [9]. Бегущие волны в цилиндрических оболочках, взаимодействующих с жидкостью, изучены в [10].

В данной статье предложен новый метод анализа аэроупругих колебаний пластин при их геометрически нелинейном деформировании. Для определения плотности циркуляции решено гиперсингулярное интегральное уравнение. Отметим, что циркуляция скорости раскладывается по обобщенным координатам изгибных колебаний пластинки.

В этом случае набор пространственных функций плотности циркуляции не зависит от времени и определяется один раз при решении задачи. Эффективность этого метода заключается в том, что получена нелинейная система с конечным числом степеней свободы относительно только обобщенных координат изгибных колебаний пластинки. Полученную динамическую систему малой размерности удастся детально исследовать.

2. Формулировка задачи и основные уравнения.

Рассмотрим тонкую, прямоугольную консольную пластинку (рис. 1). Так как пластинка является тонкой, то сдвигом и инерцией вращения можно пренебречь. Напряжения и деформации пластинки удовлетворяют закону Гука. При двухстороннем взаимодействии тонкой пластинки с потоком газа (рис. 1) возникает флаттер (автоколебания). В этом случае неустойчивые колебания пластинки ограничиваются усилиями, возникающими вследствие геометрически нелинейного деформирования. Тогда перемещения пластинки соизмеримы с ее толщиной. Такое деформирование пластинки описывается уравнениями Кармана

$$\frac{h^2}{12} \nabla^4 w + \frac{1-\nu^2}{E} (\rho \ddot{w} + c \dot{w}) - w_{xx} \left(u_x + \nu v_y + \frac{1}{2} w_x^2 + \frac{\nu}{2} w_y^2 \right) - (1-\nu) w_{xy} (u_y + v_x + w_x w_y) - w_{yy} \left(v_y + \nu u_x + \frac{1}{2} w_y^2 + \frac{\nu}{2} w_x^2 \right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} [p|_{z=+0} - p|_{z=-0}] = 0; \quad (1)$$

$$u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \ddot{u} + \frac{1+\nu}{2} w_{xy} w_y + w_x w_{xx} + \frac{1-\nu}{2} w_x w_{yy} = 0; \quad (2)$$

$$v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{xy} - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \ddot{v} + \frac{1+\nu}{2} w_{xy} w_x + w_y w_{yy} + \frac{1-\nu}{2} w_y w_{xx} = 0, \quad (3)$$

где $u(x, y, t); v(x, y, t); w(x, y, t)$ – перемещения точек срединной плоскости пластинки вдоль координатных осей; ρ – плотность материала пластинки; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона; h – толщина пластинки; $p|_{z=+0}, p|_{z=-0}$ – давления, действующие на верхнюю и на нижнюю грани пластинки.

Консольная пластинка занимает область $\Lambda = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$. Граничные условия для этой пластинки таковы:

$$w|_{y=0} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=0} = 0; \left[Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right]_{y=b} = M_y|_{y=b} = N_y|_{y=b} = N_{xy}|_{y=b} = 0; \quad (4)$$

$$Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = M_x = N_x = N_{xy} = 0, \quad x = 0, a,$$

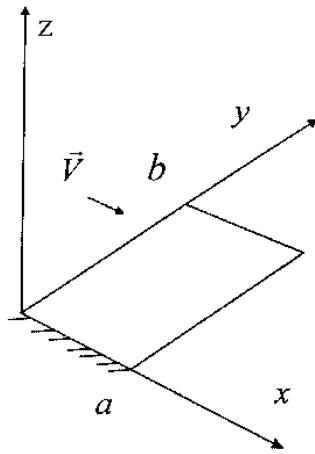


Рис. 1

где N_x, N_y, N_{xy} – мембранные усилия в срединной поверхности пластинки; Q_x, Q_y – поперечные силы; M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты в пластинке.

Газ, обтекающий колеблющуюся пластинку, предполагаем невязким, несжимаемым, трехмерным и нестационарным. На значительном удалении от пластинки примем, что газ движется с постоянной скоростью \vec{V} , параллельной оси x .

Вследствие колебаний пластинки в ее окрестности возникает возмущение потока газа, которое является трехмерным и нестационарным. Эти возмущения описываются вектором скорости \vec{U} с компонентами $\tilde{U}(x, y, z, t), \tilde{V}(x, y, z, t), \tilde{W}(x, y, z, t)$. Предположим,

что движение жидкости будет безвихревым. Тогда существует потенциал скорости $\varphi(x, y, z, t)$, который определяется так: $\vec{U} = \vec{V} + \text{grad} \varphi$. Функция $\varphi(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Рассмотрим граничные условия, которым должно удовлетворять это уравнение. Одно из граничных условий описывает непроникновение частиц жидкости через колеблющуюся пластинку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} = V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (5)$$

где верхняя и нижняя поверхности пластинки обозначаются через $z = \pm 0$.

Давление, действующее на пластинку, определяется из уравнения Бернулли

$$\frac{1}{\rho_w} [p|_{z=w+0} - p|_{z=w-0}] = \frac{\partial}{\partial t} [\varphi|_{z=w-0} - \varphi|_{z=w+0}] + V \frac{\partial}{\partial x} [\varphi|_{z=w-0} - \varphi|_{z=w+0}] = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + V \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad (6)$$

где $\gamma = \varphi|_{z=w-0} - \varphi|_{z=w+0}$ – плотность циркуляции; $\varphi|_{z=w+0}$; $\varphi|_{z=w-0}$ – значение циркуляции скорости на верхней и нижней сторонах пластинки.

Решение уравнения Лапласа представим в виде потенциала двойного слоя

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \gamma(\xi, t) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + (z-\xi_3)^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (7)$$

где n_{ξ} – орт нормали к поверхности пластинки.

В уравнение (5) введем уравнение (7). В результате получим гиперсингулярное интегральное уравнение относительно плотности циркуляции γ

$$V \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \frac{\gamma(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}}. \quad (8)$$

Автоколебания пластинки разложим в ряд по собственным формам ее линейных колебаний

$$w = \sum_{j=1}^{N_1} q_j(t) \psi_j(x, y); \quad u = \sum_{j=1}^{N_2} l_j(t) \tilde{\varphi}_j(x, y); \quad v = \sum_{j=1}^{N_3} \eta_j(t) \tilde{\theta}_j(x, y), \quad (9)$$

где $q_j(t)$; $l_j(t)$; $\eta_j(t)$ – обобщенные координаты пластинки; $\psi_j(x, y)$; $\tilde{\varphi}_j(x, y)$; $\tilde{\theta}_j(x, y)$ – собственные формы ее линейных колебаний.

Плотность циркуляции скорости выразим через аэродинамические производные

$$\gamma(\xi_1, \xi_2, t) = \sum_{j=1}^{N_1} [V q_j(t) \Delta_j(\xi_1, \xi_2) + \dot{q}_j(t) \tilde{\delta}_j(\xi_1, \xi_2)], \quad (10)$$

где Δ_j ; $\tilde{\delta}_j$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Соотношения (9), (10) введем в гиперсингулярное интегральное уравнение (8). В результате получим следующую систему гиперсингулярных интегральных уравнений относительно Δ_j ; $\tilde{\delta}_j$:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\Delta_j(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}}; \quad \psi_j = \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\tilde{\delta}_j(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{[(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2]^{3/2}}; \quad (11)$$

$$j = 1, \dots, N_1.$$

Систему (11) приведем к безразмерным переменным и параметрам

$$\xi = xa^{-1}; \quad \eta = yb^{-1}; \quad \bar{\xi}_1 = \xi_1 a^{-1}; \quad \bar{\xi}_2 = \xi_2 b^{-1}; \quad \chi_* = b^2 a^{-2}; \quad \bar{\Delta}_j = \tilde{\delta}_j a^{-1}.$$

Решения гиперсингулярных интегральных уравнений (11) определяются с помощью численного метода, предложенного в [2, 3]. С помощью этого метода система гиперсингулярных интегральных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

3. Метод анализа нелинейных колебаний.

Представим модель с конечным числом степеней свободы, описывающую колебания пластинки. Разложения (9) введем в уравнения (2), (3), отбросим инерционные слагаемые и применим метод Галеркина. Пренебрежение инерционными слагаемыми

возможно, так как пластинка является тонкой и собственные частоты продольных колебаний намного выше изгибных. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $(l_1, \dots, l_N, \eta_1, \dots, \eta_N)$

$$\sum_{\mu=1}^N \left[\gamma_{j\mu}^{(1,1)} l_{\mu} + \gamma_{j\mu}^{(1,2)} \eta_{\mu} \right] = - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} R_{ji\mu}^{(1)} q_i q_{\mu};$$

$$\sum_{\mu=1}^N \left[\gamma_{j\mu}^{(2,1)} l_{\mu} + \gamma_{j\mu}^{(2,2)} \eta_{\mu} \right] = - \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} R_{ji\mu}^{(2)} q_i q_{\mu}; j = 1, \dots, N, \quad (12)$$

где параметры $\gamma_{j\mu}^{(1,1)}, \dots, \gamma_{j\mu}^{(2,2)}, R_{ji\mu}^{(1)}, R_{ji\mu}^{(2)}$ определяются в виде двойных интегралов от базисных функций.

Эти соотношения здесь не приведены для краткости изложения. Обратную матрицу системы линейных алгебраических уравнений (12) обозначим так: $r = \{r_{ij}\}_{j=1, \dots, 2N}^{i=1, \dots, 2N}$.

Тогда решение системы линейных алгебраических уравнений представим в таком виде:

$$l_k = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} \delta_{ki\mu} q_i q_{\mu}; \quad \eta_k = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} \delta_{N+k,i\mu} q_i q_{\mu} \quad (k=1, \dots, N) \quad (13)$$

$$\left[\delta_{ki\mu} = - \sum_{p=1}^N \left(r_{kp} R_{pi\mu}^{(1)} + r_{k, N+p} R_{pi\mu}^{(2)} \right); \quad k=1, \dots, 2N; \quad i=1, \dots, N_1; \quad \mu=1, \dots, N_1 \right].$$

Разложения (13) введем в (9), а результат подставим в уравнение (1) и воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. В результате получим динамическую систему с конечным числом степеней свободы. Эту систему перепишем относительно следующих безразмерных переменных и параметров:

$$\vartheta_j = \frac{q_j}{h}; \quad j=1, \dots, N_1; \quad \tau = p_1 t; \quad \alpha = \frac{c}{\rho p_1}; \quad \Omega_j = \frac{p_j}{p_1}. \quad (14)$$

В результате получим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний пластинки

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left(m_{ji} \vartheta_i'' + \alpha \tilde{\delta}_{ji} \vartheta_i' + \Omega_i^2 k_{ji} \vartheta_i \right) = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} f_{jpi\mu} \vartheta_p \vartheta_i \vartheta_{\mu}; \quad j=1, \dots, N_1. \quad (15)$$

В этой системе элементы матриц линейной части записываются так, чтобы получить явную зависимость от числа Маха M , т. е.

$$m_{ji} = \Theta_{ji} + \lambda \int_{\bar{S}} \bar{\Delta}_i \psi_j d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2; \quad k_{ji} = \Theta_{ji} + M^2 \varepsilon_{ji}; \quad \tilde{\delta}_{ji} = \Theta_{ji} + M \varphi_{ji}.$$

Рассмотрим применение метода гармонического баланса для исследования автоколебаний в системе (15). Тогда движение этой системы представим так:

$$\vartheta_i = A_i \cos(\omega t) + B_i \sin(\omega t), \quad (16)$$

где ω – подлежащая определению частота колебаний.

Система (15) является автономной; поэтому она инвариантна относительно замены переменных $t \rightarrow t + t_0$, где t_0 – произвольная постоянная. Параметр t_0 выберем так, чтобы $A_1 \equiv 0$. Следуя методу гармонического баланса, амплитуды гармоник (16) $A_2, A_3, \dots, A_{N_1}, B_1, \dots, B_{N_1}$ определяем из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left\{ \left[\Omega_i^2 (\Theta_{ji} + M^2 \varepsilon_{ji}) - m_{ji} \omega^2 \right] A_i + \alpha (\Theta_{ji} + M \varphi_{ji}) \omega B_i \right\} = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} f_{jpi\mu} F_{pi\mu}^{(c)}; \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left\{ \left[\Omega_i^2 (\Theta_{ji} + M^2 \varepsilon_{ji}) - m_{ji} \omega^2 \right] B_i - \alpha (\Theta_{ji} + M \varphi_{ji}) \omega A_i \right\} = \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{\mu=1}^{N_1} f_{jpi\mu} F_{pi\mu}^{(s)};$$

$$j = 1, \dots, N_1;$$

$$4F_{pi\mu}^{(c)} = 3A_p A_i A_\mu + A_p B_i B_\mu + B_p A_i B_\mu + B_p B_i A_\mu;$$

$$4F_{pi\mu}^{(s)} = 3B_p B_i B_\mu + A_p A_i B_\mu + A_p B_i A_\mu + B_p A_i A_\mu.$$

Систему (17) исследуем численно; для ее анализа применяется алгоритм продолжения, который подробно рассмотрен в [1].

4. Численный анализ колебаний.

Численно исследованы колебания консольной пластинки, которая представлена на рис. 1. Для определения собственных форм колебаний, используемых в разложении (9), применим метод Релея – Ритца. Рассмотрим аэроупругие колебания пластинки с параметрами, которые применяются в работе [17], т. е.

$$a = b = 0,3 \text{ м}; h = 0,001 \text{ м}; E = 0,69 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \nu = 0,3; \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Отметим, что пятая и шестая собственные частоты пластинки удовлетворяют условию внутреннего резонанса 1:1

$$\Omega_5 = \Omega_6 + \varepsilon \sigma, \quad (18)$$

где $\varepsilon \ll 1$; σ – параметр расстройки.

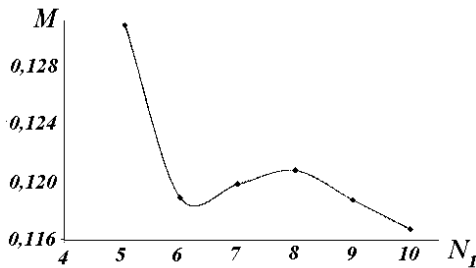


Рис. 2

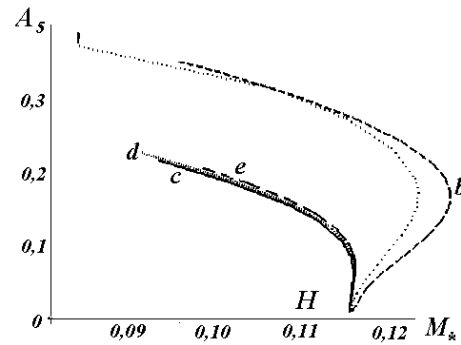


Рис. 3

Определим число степеней свободы, необходимое для адекватного предсказания числа Маха M , при котором возникает флаттер. Для различного числа степеней свободы системы определим число Маха, при котором возникает бифуркация Хопфа. Расчеты проведены для коэффициента линейного демпфирования материала пластинки $\alpha = 0,006$. Результаты расчета представлены на рис. 2. Отметим, что при четырех степенях свободы дискретной модели пластинки бифуркация Хопфа не наблюдается. Она возникает при 5 степенях свободы. Шести степеней свободы достаточно для предсказания значения скорости, при которой возникают автоколебания.

В статье [17] представлено значение скорости потока, при которой наблюдается флаттер $V_H = 42 \text{ м/с}$. В представленных расчетах такое значение скорости потока соответствует параметру линейного демпфирования в материале пластинки $\alpha = 0,006$. Получена частота колебаний при флаттере $\omega_f = 90 \text{ рад/с}$. Частота колебаний при

флаттере, полученная в статье [17], $\omega_f = 84,85$ рад/с. Итак, полученные результаты по предсказанию появления флаттера пластинки близки к данным статьи [17].

Исследована также сходимость модели (15). Для этого автоколебания в системе (15) рассмотрены с различным числом базисных функций в разложении (9). Для исследования автоколебаний применен метод гармонического баланса. Число мод в разложении изгиба пластинки фиксировано ($N_1 = 10$). Число мод в разложении продольного перемещения менялось. Это число принимало значения от 2 до 6. Результаты расчетов представлены на рис. 3. В точке H возникает бифуркация Хопфа; устойчивое состояние равновесия пластинки становится неустойчивым и в системе рождаются устойчивые автоколебания. Результаты расчетов этих автоколебаний приведены на этом же рис. 3. Они отвечают следующим параметрам разложения (9): $a - N = 2$; $b - N = 3$; $c - N = 4$; $d - N = 5$; $e - N = 6$. Кривые c, d, e близки, что свидетельствует о сходимости полученных результатов. Итак, $N = 4$ достаточно для разложения перемещений в плоскости пластинки. Дальнейшие расчеты будут проведены при $N = 6$.

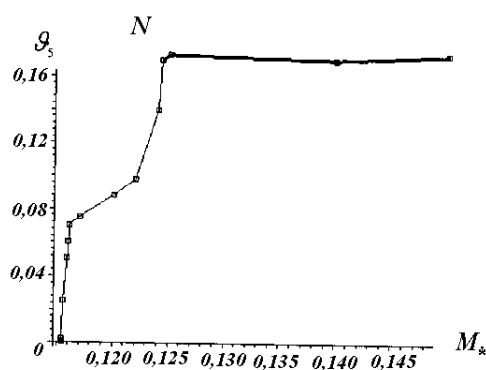


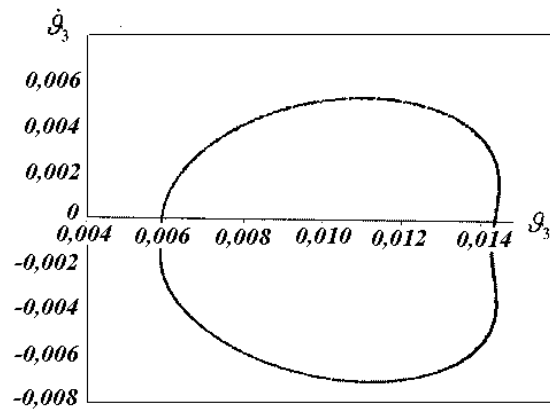
Рис. 4

Результаты прямого численного интегрирования представлены на рис. 4. Здесь показана зависимость амплитуды обобщенной координаты Q_3 от числа Маха M_* . Тонкой сплошной линией показаны результаты расчета периодических колебаний. В точке N , где тонкая линия соединяется с толстой, происходит бифуркация Неймарка. В результате этой бифуркации рождаются почти периодические колебания, которые впоследствии преобразуются в хаотические. Амплитуды таких установившихся колебаний приведены на рис. 4 жирной линией. Отметим, что при почти периодических и хаотических колебаниях наблюдается длительный переходный процесс на временном интервале $t \in [0; 2400(\pi/\omega_1)]$, где ω_1 – частота колебаний при флаттере.

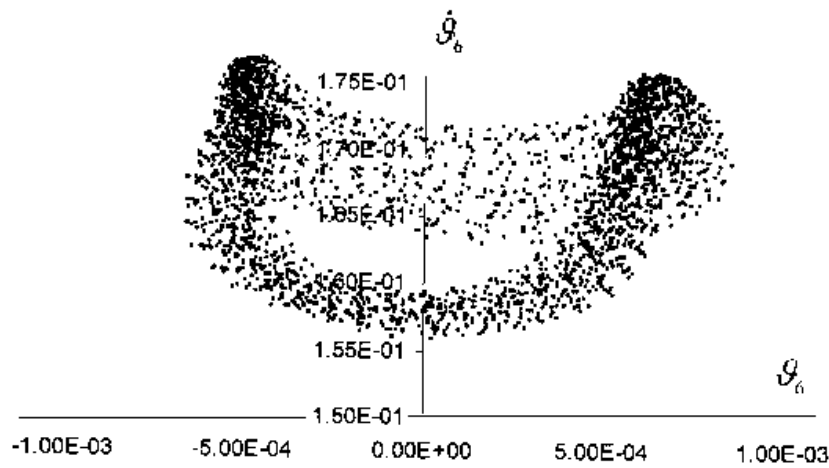
Отметим, что если не проводить интегрирования на длительном временном интервале, а во всем диапазоне M_* , представленном на рис. 4, можно сделать вывод, что наблюдаются установившиеся периодические автоколебания.

Для исследования почти периодических и хаотических колебаний были рассчитаны сечения Пуанкаре. Для этого в фазовом пространстве системы $(q_1, \dots, q_{10}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{10})$ строили плоскость $\Sigma = \{(q_1, \dots, q_{10}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{10}) \in R^{20} \mid \dot{q}_5 = 0\}$ и определяли пересечение фазовой траектории с этой плоскостью. Проекция сечений Пуанкаре почти периодических колебаний на плоскость (q_3, \dot{q}_3) сразу за бифуркацией Неймарка $M_* = 0,125$ приводится на рис. 5, а.

На этом рисунке представлено 3000 точек. Вид сечений Пуанкаре свидетельствует, что в системе наблюдается инвариантный тор. При увеличении M_* почти периодические колебания преобразуются в хаотические. Проекция сечения Пуанкаре Σ на плоскость (q_6, \dot{q}_6) при $M = 0,14$ показана на рис. 5, б, где представлено 3000 точек. Отметим, что хаотические колебания имеют место при $M < 0,18$, так как при $M_* = 0,18$ наблюдается уход колебаний на бесконечность, который происходит после длительного переходного процесса $t \approx 2000\pi / \omega_1$.



a



б

Рис. 5

Возвратимся к анализу амплитуд колебаний, представленных на рис. 4. Для исследования их роста введем параметр $\tilde{\eta}$, описывающий взаимодействие между обобщенными координатами Q_5 и Q_6 : $\tilde{\eta} = \left(\max_t(Q_5) \right) / \left(\max_t(Q_6) \right)$. Если $\tilde{\eta}$ растёт, то увеличивается вклад обобщенной координаты Q_5 ; при уменьшении $\tilde{\eta}$ увеличивается вклад обобщенной координаты Q_6 .

M_*	0,115411	0,116078	0,124	0,125	0,14	0,15	0,17
$\tilde{\eta}$	3,324	3,25	3,09	2,8	2,43	2,43	1,93

В таблице представлена зависимость параметра $\tilde{\eta}$ от числа M_* для установившихся колебаний, представленных на рис. 4. Для периодических колебаний значительно больший вклад в колебания вносит обобщенная координата Q_5 . На рис. 4 показан рост амплитуд периодических колебаний. Однако, после бифуркации Неймарка существенно повышается активность обобщенной координаты Q_6 , что следует из ре-

зультатов таблицы. Значительная часть энергии колебаний обобщенной координаты \mathcal{Q}_5 перекачивается в \mathcal{Q}_6 . Поэтому роста амплитуд колебаний после бифуркации Неймарка не наблюдается. Подчеркнем, что взаимодействие между обобщенными координатами \mathcal{Q}_5 и \mathcal{Q}_6 наблюдается вследствие существования внутреннего резонанса (17) между собственными частотами колебаний. Аналогичное явление при вынужденных колебаниях описано в статье [18]. Это явление получило название насыщения.

5. Выводы.

Исследованы автоколебания консольной квадратной пластинки в условиях внутреннего резонанса 1:1 между пятой и шестой собственными частотами колебаний.

В случае автоколебаний пластинки наблюдается взаимодействие между формами колебаний, соответствующим этим частотам. Вклад обобщенной координаты \mathcal{Q}_5 в периодические автоколебания пластинки значительно более существенен, чем вклад координаты \mathcal{Q}_6 .

При увеличении числа Маха наблюдается резкое увеличение амплитуд этих периодических колебаний. Отметим, что после бифуркации Неймарка обобщенная координата \mathcal{Q}_6 становится значительно активнее и часть энергии колебаний обобщенной координаты \mathcal{Q}_5 перекачивается в обобщенную координату \mathcal{Q}_6 . При увеличении числа M амплитуды почти периодических и хаотических колебаний \mathcal{Q}_5 не растут, так как энергия этих колебаний перекачивается в обобщенную координату \mathcal{Q}_6 .

Заметим, что в полученной модели наблюдаются решения, которые с увеличением времени приводят к неограниченному росту амплитуд. Конечно, в пластинке таких движений не бывает. В этом случае в системе наблюдаются более сложные движения, отличные от исследованных в этой статье. Для предсказания таких движений необходимо учесть более высокие нелинейные слагаемые в модели геометрически нелинейного деформирования пластинки.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано новий підхід для аналізу аеропружних коливань тонких пластин. Він заснований на розв'язанні сингулярного інтегрального рівняння. Циркуляцію швидкості розкладено по узагальненим координатам коливань пластинки. Завдяки цьому аеропружні коливання описано системою з скінченним числом ступенів вільності відносно узагальнених координат пластинки. Досліджено наступний сценарій розвитку автоколивань: рух пластинки зазнають біфуркації Неймарка та перетворюються у квазіперіодичні коливання, які надалі перетворюються в хаотичні.

1. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Модели, методы, явления. – М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
2. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. – М.: Наука, 1965. – 241 с.
3. Воробьев Н. Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке. – Новосибирск: Наука, 1985. – 237 с.
4. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. – М.: Наука, 1978. – 223с.
5. Avramov K.V., Strel'nikova E.A. Chaotic Oscillations of Plates Interacting on Both Sides with a Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 3. – P. 303 – 309.
6. Dowell E.H., Curtiss H.C., Scanlan R.H., Sisto F. A modern course in aeroelasticity. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. – 670 p.
7. Guo C. Q., Paidoussis M.P. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow // ASME. J. Appl. Mech. – 2000. – N67. – P. 171 –176.
8. Haddow A.G., Barr A.D.S., Mook D.T. Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structures // J. Sound and Vibr. – 1984. – 97. – P. 451 – 473.
9. Koval'chuk P.S., Kruk L.A., Pelykh V.A. Stability of Differently Fixed Composite Cylindrical Shells Interacting with Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N6. – P. 664 – 676.

10. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – 50, N4. – P. 353 – 364.
11. *Landahl M.T., Stark V.J.E.* Numerical lifting-surface theory – problems and progress // *AIAA Journal.* – 1968. – N6. – P. 2049 – 2060.
12. *Mook D.T., Dong B.* Perspective: numerical simulations of wakes and blade-vortex interaction // *ASME. J. Fluids Eng.* – 1994. – N116. – P. 5 – 21.
13. *Morino L., Kuo C.-C.* Subsonic potential aerodynamic for complex configurations: a general theory // *AIAA Journal.* – 1974. – N 12. – P. 191 – 197.
14. *Shayo L.K.* The stability of cantilever panels in uniform incompressible flow // *J. Sound and Vibr.* – 1980. – N68. – P. 341 – 350.
15. *Tang D., Dowell E.H., Hall K.C.* Limit cycle oscillations of a cantilevered wing in low subsonic flow // *AIAA Journal.* – 1999. – N 37. – P. 364 – 371.
16. *Tang D., Dowell E.H.* Limit cycle oscillations of two-dimensional panels in low subsonic flow // *Int. J. Non-Linear. Mech.* – 2002. – N 37. – P. 1199 – 1209.
17. *Tang D., Dowell E.H., Hall K.C.* Limit cycle oscillations of a cantilevered wing in low subsonic flow // *AIAA Journal.* – 1999. – 37, N3. – P. 364 – 371.
18. *Watanabe Y., Isogai K., Suzuki S., Sugihara M.* A theoretical study of paper flutter // *J. Fluids and Struct.* – 2002. – N16. – P. 543 – 560.

Поступила 21.12.2011

Утверждена в печать 30.09.2014

