

РАСSEЯНИЕ ЗВУКА ТЕМПЕРАТУРНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ В СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ

А. Г. РУДНИЦКИЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 26.03.98

Исследуется рассеяние звуковой волны температурными неоднородностями в следе за цилиндром. Рассмотрено рассеяние за слабоагретым и за теплоизолированным цилиндром. Задача решается в борновском приближении и в приближении геометрической оптики. Получены выражения, связывающие характеристики рассеянной звуковой волны с термодинамическими и кинематическими параметрами течения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время накоплен довольно значительный опыт в изучении рассеяния звука вихревыми течениями [1–4]. При этом в качестве основного фактора, обуславливающего рассеяние звуковой волны, рассматривались скоростные неоднородности в потоке. Влиянию температурных неоднородностей в вихревых течениях на рассеяние звука уделялось значительно меньше внимания. Это связано с двумя причинами. Первая причина – отсутствие простых аналитических моделей, описывающих поле температуры в такого типа течениях (например, таких как теория дорожки Кармана для поля скорости). Вторая причина связана со сложностью выделения в суммарном рассеянном сигнале составляющих, обусловленных температурными и скоростными неоднородностями.

В настоящей работе рассматривается задача рассеяния звуковой волны температурными неоднородностями в следе за цилиндром. Задача решается в борновском приближении и в приближении геометрической оптики. Исследуется рассеяние за слабоагретым и за теплоизолированным цилиндром. Для этого предлагаются простейшие модели распределения температурных неоднородностей для упомянутых случаев. Кроме того, предлагается способ, позволяющий разделить в принятом звуковом сигнале флуктуации фазы, обусловленные пульсациями скорости в потоке, от флуктуаций, связанных с температурными неоднородностями.

1. БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В качестве исходного уравнения, описывающего распространение звуковой волны в среде с температурными неоднородностями, используем

уравнение Монины – Татарского [1]:

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\gamma\frac{T'}{T_0}\frac{\partial\Pi}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\left(U_j\frac{\partial\Pi}{\partial x_k}\right), \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь U_j – компоненты скорости вихревого течения \mathbf{U} ; $k = \omega/c_0$, c_0 – скорость звука в невозмущенном потоке; ω – круговая частота звуковой волны; T' – пульсации температуры около ее среднего значения T_0 ; $\Pi = p_a/c_0\rho_0^2$, ρ_0 – плотность в невозмущенной среде; p_a – акустическое давление; $\gamma = 1$ для воздуха и 1.22 – для воды. При выводе этого уравнения предполагалось, что $\sqrt{\langle|\mathbf{U}|^2\rangle}/c \ll 1$, $\sqrt{T'^2}/T_0 \ll 1$.

Рассмотрим, какое влияние на звуковую волну оказывает первое слагаемое в правой части уравнения (1) (влияние второго слагаемого исследуется в [2–3]).

Воспользуемся методом спектральных разложений. Применяя преобразование Фурье

$$T'(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{x}}d\mathbf{K},$$

$$P'(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\mathbf{x}}d\mathbf{K},$$

из (1) получаем

$$\tilde{P}(\mathbf{K}) = \frac{\gamma}{T_0(k^2 - K^2)} \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(\mathbf{K} - \mathbf{K}')\tilde{P}(\mathbf{K}')(\mathbf{K}\mathbf{K}')d\mathbf{K}'. \quad (2)$$

Для плоской волны в первом (борновском) приближении теории возмущений поле рассеянного на течении звука определяется выражением

$$\Pi_s(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{K}\mathbf{k}}{k^2 - K^2} \frac{\gamma\tilde{T}(\mathbf{K} - \mathbf{k})}{T_0} e^{i\mathbf{K}\mathbf{x}}d\mathbf{K}. \quad (3)$$

Асимптотику рассеянного поля в дальней зоне при $kr \gg 1$, $r/\mathcal{L} \ll \infty$, где $r = |\mathbf{x}|$, \mathcal{L} – линейный размер рассеивающего объема, нетрудно вычислить с помощью теории вычетов и метода стационарной фазы:

$$\Pi_s(\mathbf{x}) = e^{ikr} f(\varphi) / \sqrt{r}. \quad (4)$$

Здесь

$$f(\varphi) = 2\gamma \cos(\varphi - \varphi_0) \sqrt{2i\pi^3 k^3} \frac{\tilde{T}(\mathbf{K} - \mathbf{k})}{T_0},$$

$\mathbf{K} = k(\cos \varphi, \sin \varphi)$; $\mathbf{k} = k(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$; φ_0 – угол между направлением падающей волны и осью x в полярной системе координат (задача плоская).

Заметим, что рассеяние в направлении, ортогональном падающей волне, отсутствует (обращается в нуль множитель $\cos(\varphi - \varphi_0)$), рассеяние же на угол $(\varphi - \varphi_0) = \pi$ (рассеяние назад) происходит лишь на температурных неоднородностях (см. также [3]). Отметим, что амплитуда рассеяния $f(\varphi)$ имеет особенность при $\varphi - \varphi_0 \rightarrow 0$ и, следовательно, борновское приближение при таких углах некорректно.

2. РАССЕЯНИЕ НА ДОРОЖКЕ КАРМАНА

Вычислим амплитуду рассеяния плоской волны для конкретных вихревых течений. В качестве примера такого течения выберем дорожку Кармана за слабонагретым цилиндром. Известно [5], что для идеальной несжимаемой жидкости уравнение переноса тепла можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi_1 \Delta T, \quad (5)$$

где $\chi_1 = \kappa_1 / \rho c_p$, κ_1 – теплопроводность; c_p – теплоемкость среды при постоянном давлении; T – температура.

Выберем характерный линейный масштаб исследуемого течения и характерную скорость. Для дорожки Кармана таковыми являются расстояние между вихрями в вихревой дорожке l и ее скорость U_0 . В случае, когда процессами теплопроводности в течении можно пренебречь, т.е. когда величина, обратная числу Пекле, $\chi_1 / l U_0 \ll 1$, уравнение (5) приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = 0, \quad (6)$$

т.е. $dT/dt = 0$. Это означает, что значения температуры в потоке остаются постоянными вдоль линий тока, или иначе, линии тока в течении совпадают с изотермами.

Анализ картины возникновения вихрей за цилиндром [6–7] приводит к выводу, что наиболее высокие значения температуры в потоке за слабонагретым цилиндром следует ожидать на конечных линиях тока. Такое распределение температуры показано на рис. 1, а.

На этом рисунке по оси аппликат отложены значения температуры, а ось абсцисс совпадает с направлением движения вихревой дорожки. Одной из возможных функций, задающих поверхность, изображенную на рис. 1, а, может быть функция

$$T'(x, y) = T_c \times \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l}(y - y_0) - \varepsilon \sin \frac{2\pi}{l}(x - U_0 t)} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{l}(y + y_0) + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{l}(x - U_0 t)} \right), \quad (7)$$

где T_c – параметр, имеющий размерность температуры; $\varepsilon \in [0, 1]$; $y_0 = h/2$; h – расстояние между вихревыми цепочками в дорожке Кармана; $\omega_0 = 2\pi U_0 / l$ (см. рис. 1, б).

Изменяя параметр ε от 0 до 1, можно описывать распределение температуры в потоке от случая ламинарной тепловой струи до случая, когда относительное изменение температуры равно нулю во всем пространстве за исключением точек, совпадающих с точками расположения вихрей в дорожке Кармана. В этих точках температура принимает бесконечно большое значение, но так, что полное количество тепла остается конечным.

Качественным подтверждением возможности использования предложенной модели распределения температуры в следе за слабонагретым цилиндром может служить эксперимент, описанный в монографии [7]. На рис. 2 этой работы приведены графики мгновенных значений температуры и компонент скорости в потоке за цилиндром. Характерной особенностью такого течения является совпадение более нагретых областей с областями быстроизменяющейся поперечной скорости (с областями более сильной завихренности).

Из выражения (7) нетрудно получить выражение для средней температуры на оси следа

$$\langle T' \rangle \equiv \frac{1}{l} \int_0^l T'(x, 0) dx = \frac{2T_c}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}. \quad (8)$$

При $\varepsilon = 0$, т.е. в случае ламинарной тепловой струи, средняя температура на оси следа равна $\langle T' \rangle = T_c \sqrt{2}$.

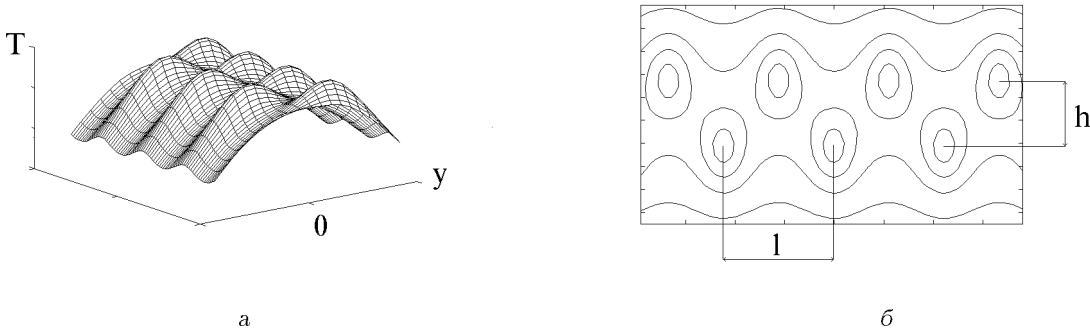


Рис. 1. Распределение температуры в потоке за слабонагретым цилиндром

Среднеквадратичная величина пульсаций температуры относительно ее среднего значения на оси равна

$$\begin{aligned}
 T_{rms} &= (\langle T'^2 \rangle - \langle T' \rangle^2)^{1/2} = \\
 &= \left[\frac{1}{l} \int_0^l T'^2(x, 0) dx - \langle T' \rangle^2 \right]^{1/2} = \\
 &= T_c \left\{ \frac{2(4 - \varepsilon^2)}{(2 - \varepsilon^2)\sqrt{2(2 - \varepsilon^2)}} - \frac{4}{2 - \varepsilon^2} \right\}^{1/2}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, измерения средней температуры и среднеквадратичных колебаний температуры на оси следа позволяют определить параметры ε и T_c функции (7), описывающей распределение температуры в вихревом следе за слабонагретым цилиндром.

Рассеяние звука на таком течении исследуем в случае, когда $\varepsilon \ll 1$, т.е. при $T_{rms}/\langle T' \rangle \ll 1$. Фурье-образ такого поля температурных пульсаций равен

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(\mathbf{K}) &= \frac{T_c l}{2\pi} \operatorname{sech} \frac{K_y h}{2} \left\{ \cos \frac{K_y h}{2} \delta(K_x) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{K_y h}{2} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\delta\left(K_x - \frac{2\pi}{l}\right) \exp(-i\omega_0 t) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta\left(K_x + \frac{2\pi}{l}\right) \exp(i\omega_0 t) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в выражение для амплитуды рассеяния (4), получаем

$$\begin{aligned}
 f(\varphi) &= \gamma \frac{T_c l}{T_0} \sqrt{2i\pi k^3} \cos(\varphi - \varphi_0) \operatorname{sech} \frac{K_y l}{2} \times \\
 &\quad \times \left\{ \cos \frac{K_y h}{2} \delta(K'_x) + \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{K_y h}{2} \times \right. \\
 &\quad \times \left[\delta\left(K'_x - \frac{2\pi}{l}\right) \exp(-i\omega_0 t) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta\left(K'_x + \frac{2\pi}{l}\right) \exp(i\omega_0 t) \right] \right\},
 \end{aligned} \quad (11)$$

где $K'_y = k(\sin \varphi - \sin \varphi_0)$; $K'_x = k(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$.

Первое слагаемое в фигурных скобках этого выражения “отвечает” за зеркальное отражение звукового сигнала от тепловой струи, которое происходит при отражении от плоско-слоистых неоднородностей акустического показателя преломления в среде. Так что при $\varphi \neq \pi/2$, $\varphi - \varphi_0 = \pi$ имеем

$$\begin{aligned}
 f_\pi &= \gamma \frac{T_c l}{T_0} \sqrt{2i\pi k^3} \operatorname{sech}(2kl \sin \varphi_0) \times \\
 &\quad \times \left\{ \cos(2kh \sin \varphi_0) \delta(2k \cos \varphi_0) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2} \sin(2kh \sin \varphi_0) \times \right. \\
 &\quad \times \left[\delta\left(2k \cos \varphi_0 + \frac{2\pi}{l}\right) \exp(i\omega_0 t) - \right. \\
 &\quad \left. \left. - \delta\left(2k \cos \varphi_0 - \frac{2\pi}{l}\right) \exp(-i\omega_0 t) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Угловая диаграмма направленности рассеянного сигнала имеет резкий максимум в направлении, определяемом соотношением

$$k |\cos \varphi - \cos \varphi_0| = 2\pi/l,$$

т.е. рассеянный в обратном направлении сигнал принимает максимальное значение при выполнении условия

$$l = \pi/k \cos \varphi_0. \quad (13)$$

В результате эффекта Доплера при рассеянии звука следом за цилиндром возникает сдвиг частоты рассеянного звука: частота отраженного звука отличается от частоты падающего звука на величину $\omega_D = 2\pi U_0/l$.

Уширение частотного спектра рассеянного сигнала, обусловленное наличием в следе мелкомасштабного турбулентного фона, можно учесть либо по методике работы [3], либо методом подсчета количества нулей [8].

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Оценим теперь влияние температурных неоднородностей в следе на флуктуации фазы прошедшего сквозь поток звукового сигнала. Оценку будем проводить в приближении геометрической оптики, для которой справедлива формула [1]

$$S(x) = k \int_{x_0}^x \left[\gamma \frac{T'(x(s))}{T_0} + \frac{2\mathbf{U}(x(s))\mathbf{l}_0(s)}{c_0} \right] ds, \quad (14)$$

полученная с точностью до членов первого порядка малости по $\sqrt{\langle T'^2 \rangle}/T_0$ и $\sqrt{\langle |\mathbf{U}|^2 \rangle}/c$. (Здесь \mathbf{l}_0 – единичный вектор, совпадающий с направлением падения волны).

Для плоской волны, падающей перпендикулярно оси следа, в пренебрежении пульсациями скорости получаем

$$S(x, t) = k \int_{-L}^L \gamma \frac{T'(x, y, t)}{T_0} dy. \quad (15)$$

Здесь $2L$ – расстояние между излучателем и приемником.

Воспользуемся выражением (7) для поля температуры в следе. После его подстановки в (15) получаем:

$$S(x, t) = \gamma \frac{4klT_c}{\pi T_0} \frac{1}{\cos(\frac{2\pi x}{l} - \omega_0 t)} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)(\frac{2\pi x}{l} - \omega_0 t)}{2n+1}, \quad \varepsilon = 1, \quad (16)$$

$$S(x, t) = \gamma \frac{klT_c}{2\pi T_0} \times [2\pi + \varepsilon^2 \sin^2(\frac{2\pi x}{l} - \omega_0 t)], \quad \varepsilon \ll 1.$$

При этом предполагается, что $2\pi L/l \gg 1$.

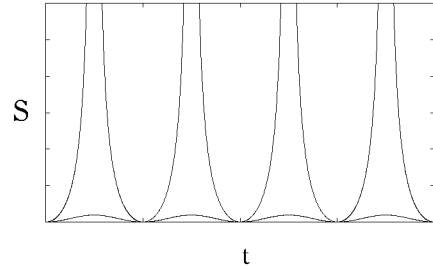


Рис. 2. Мгновенные значения температуры и компонент скорости в потоке за цилиндром

Графики, описывающие влияние температурных неоднородностей на фазу прошедшей сквозь след звуковой волны, представлены на рис. 2. В случае теплоизолированного цилиндра картина флуктуаций температуры в следе, а следовательно, и флуктуаций фазы прошедшей сквозь след звуковой волны, существенно меняется.

В этом случае для флуктуаций температуры справедливо соотношение [9]

$$c_p T' = -U_0(U_\infty - U_x), \quad (17)$$

где U_∞ – скорость набегающего на цилиндр потока, а $T' = T - T_0$. Подставим в это выражение значение $U_x(x, y)$, даваемое теорией дорожки Кармана:

$$U_x = \frac{\Gamma}{2l} \left\{ \frac{\text{sh} \frac{2\pi}{l}(y - y_0)}{\text{ch} \frac{2\pi}{l}(y - y_0) + \cos \frac{2\pi}{l}(x - U_0 t)} - \frac{\text{sh} \frac{2\pi}{l}(y + y_0)}{\text{ch} \frac{2\pi}{l}(y + y_0) - \cos \frac{2\pi}{l}(x - U_0 t)} \right\}, \quad (18)$$

где Γ – циркуляция вихрей в течении; U_0 – скорость вихревой дорожки, $U_0 = U_\infty - \Gamma/2l\sqrt{2}$; U_∞ – скорость набегающего на цилиндр потока.

Легко видеть, что в силу нечетности по y функции $U_x(x, y)$ искомые флуктуации фазы, вычисляемые по формуле (15), оказываются равными нулю. Сдвиг фазы прошедшей звуковой волны в этом случае происходит только за счет изменения средней температуры в следе. На оси следа это изменение температуры равно

$$c_p T' = -U_x \Gamma/l.$$

В отличие от фазовых флуктуаций, флуктуации амплитуды звуковой волны в рассматриваемом случае оказываются ненулевыми. Действительно, в приближении геометрической оптики флуктуации уровня χ звуковой волны, прошедшей

сквозь случайно-неоднородную среду, удовлетворяют уравнению [1]

$$\text{grad } S \text{ grad } \chi + \frac{1}{2} \Delta S = 0. \quad (19)$$

Отсюда с точностью до членов первого порядка малости по

$$\varepsilon_1 = \gamma \frac{T'}{2T_0} + \frac{\mathbf{U}_0}{c_0}$$

получаем

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_1(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{2} \int_{-y}^y \frac{\partial^2 \varepsilon_1(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta = 0. \quad (20)$$

Если теперь проинтегрировать (20) по y от $-L$ до L , считая, что $\chi(x, -L) = 0$, $\varepsilon(x, -L) = 0$, получаем

$$\chi(x, y) = -\frac{1}{2} \left[\varepsilon_1(x, y) + \int_{-L}^L dy' \int_{-y'}^{y'} \frac{\partial^2 \varepsilon_1(x, \eta)}{\partial x^2} d\eta \right]. \quad (21)$$

Очевидно, что интегральный член в (21) оказывается равным нулю, независимо от того, четна или нечетна по y функция $\varepsilon(x, y)$. Следовательно, флуктуации уровня звуковой волны, прошедшей сквозь след за теплоизолированным цилиндром определяются суммой

$$\chi(x, y) = \gamma \frac{U_0(U_\infty - U_x)}{4c_p T_0} - \frac{U_y}{2c_0}. \quad (22)$$

Таким образом, флуктуации фазы звуковой волны, прошедшей сквозь след за теплоизолированным цилиндром, обусловлены лишь пульсациями скорости вихревого течения. В то же время, флуктуации уровня звуковой волны определяются как пульсациями скорости, так и пульсациями температуры в “просвечиваемом” течении. Это обстоятельство указывает на принципиальную возможность определения как температурных, так и скоростных характеристик вихревого течения за теплоизолированным цилиндром по известным характеристикам амплитуды и фазы звуковой волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги проведенному выше анализу, можно сделать следующие выводы. Наличие в следе за слабонагретым цилиндром температурных флуктуаций не влияет на направление максимума

диаграммы направленности рассеянного на течении звукового сигнала. Изменяется лишь его амплитуда. Амплитуда рассеяния звукового сигнала, рассеянного в обратном направлении, происходит лишь на температурных неоднородностях и достигает максимума при выполнении условия (13). Пульсации температуры в следе за теплоизолированным цилиндром не оказывают влияние на фазу прошедшей сквозь след звуковой волны.

В заключение опишем способ, позволяющий разделить в принятом звуковом сигнале флуктуации, обусловленные флуктуациями скорости, от флуктуаций, обусловленных пульсациями температуры в потоке, независимо от характера течения. Этот способ основан на том, что при прохождении волны через одни и те же неоднородности среды (например, в результате отражения от препятствия) возникают своеобразные эффекты двукратного прохождения, не имеющие места при прохождении волны лишь в одном направлении. При этом флуктуации скорости в потоке и флуктуации температуры оказывают различное влияние на флуктуации фазы прошедшей сквозь поток звуковой волны.

Действительно, как это видно из выражения (14), результирующий набег фазы звуковой волны, прошедшей в прямом и обратном направлении через одни и те же неоднородности, обусловленные флуктуациями скорости, оказывается равным нулю. В то же время, флуктуации фазы, обусловленные температурными неоднородностями, оказываются вдвое большими, чем при однократном прохождении звуковой волны. Наблюдается интересный эффект, когда для волны, прошедшей в случайно-неоднородной среде путь L в прямом и обратном направлении, дисперсия фазы оказывается вдвое больше, чем для волны, прошедшей дистанцию $2L$ в той же среде, но в одном направлении. Это явление обусловлено корреляцией флуктуаций фазы на прямом и обратном направлениях [10, 11]. Следовательно, если на приемник, совмещенный с излучателем, попадает отраженный от препятствия звуковой сигнал, то флуктуации фазы этого сигнала обусловлены лишь температурными флуктуациями в рассеивающей среде.

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М.: Наука, 1967. – 548 с.
2. Громов П. Р., Езерский А. Б., Фабрикант А. Л. Рассеяние звука на вихревом следе за цилиндром // Акуст. ж. – 1982. – N 6. – С. 763–769.
3. Рудницкий А. Г. Прохождение звука сквозь вихревой след за цилиндром // Акуст. ж. – 1990. – N 1. – С. 122–129.

4. Zhen Y. Sound scattering from a moving turbulent medium // J. Acoust. Soc. Amer.– 1997.– **102**.– P. 752–758.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидромеханика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
6. Zdrakovich M. M. Smoke observations of the formation of Karman vortex street // J. Fluid. Mech.– 1969.– **37**.– P. 491–496.
7. Фабри Г. Турбулентная температура и характеристики теплового потока за цилиндром / Турбулентные сдвиговые течения. Ред. Гиневского А. С.– М.: Машиностроение, 1982.– 430 с.
8. Красненко Н. П. Акустическое зондирование атмосферы.– Новосибирск: Наука, 1986.– 165 с.
9. Kurosaka M., Gertz J. B., Graham J. E. et al. Energy separation in a vortex street // J. Fluid. Mech.– 1987.– **178**.– P. 1–29.
10. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Эффект усиления обратного рассеяния на телах, помещенных в среду со случайными неоднородностями // Изв. ВУЗов. Радиофизика.– 1973.– N 7.– С. 1064–1070.
11. Кравцов Ю. А., Саичев А. И. Эффекты двукратного прохождения волн в случайно-неоднородных средах // Успехи физических наук.– 1982.– Вып. 3.– С. 501–527.