

УДК УДК 539.3:534.1

©2017. В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев

## ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ НЕЧЕТКОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ОБОБЩЕННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Изложена методика получения оценок для неопределенных показателей концентрации механических напряжений у контура эллиптического упругого включения в тонкой изотропной пластине при наличии разброса в значениях ее физико-механических и геометрических параметров. Способ учета неконтрастности экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния пластины основывается на применении модифицированного эвристического принципа обобщения в теории нечетких вычислений к аналитическим соотношениям, полученным при решении рассматриваемой задачи теории концентрации напряжений в классической детерминистической постановке. Представлены примеры численной реализации предложенной методики.

**Ключевые слова:** тонкая изотропная пластина с упругим эллиптическим включением, обобщенное плоское напряженное состояние, модель концентрации механических напряжений у контура включения, учет разброса в значениях геометрических и физико-механических характеристик, нечетко-множественные вычисления, использование модифицированного эвристического принципа обобщения.

**Введение и формулировка целей исследования.** Учет влияния неконтрастности в задании исходных параметров геометрической и физической природы при оценивании уровней возможных разбросов в показателях концентрации механических напряжений около отверстий и включений в случае сжатия-растяжения тонких пластин остается на сегодняшний день актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей, имеющей круг неисследованных аспектов. Ведущим теоретическим подходом к ее исследованию, с точки зрения количественной пропорции специализированных тематических публикаций, является применение аппарата вероятностного стохастического анализа, изложенное в работе [1]. Наряду с этим представляет интерес и развитие альтернативных подходов к описанию влияния факторов неопределенности эндогенных параметров в моделях механики деформируемых сред, связанных, в частности, с применением методов теории нечетких множеств. При этом среди вариантов постановки проблемы учета факторов неопределенности в механике деформируемого твердого тела на базе применения аппарата нечеткой математики [2–5] можно выделить класс моделей, в которых экзогенные параметры физико-механической и геометрической природы являются аргументами классических четких аналитических расчетных соотношений для искомых эндогенных характеристик. Для таких моделей учет неопределенности может базироваться на переходе к нечетко-множественной интерпретации самих экзогенных параметров, не имеющих четких контрастных описаний, и на применении эвристического принципа обобщения (принципа

расширения) при замене части переменных в функциональных соотношениях для эндогенных характеристик аргументами нечетко-множественного типа [7, 8].

С учетом отмеченных соображений, целью настоящей работы является синтез методики применения методов нечеткой математики для описания неопределенности величин коэффициентов концентрации механических напряжений у контура эллиптического упругого включения в тонкой изотропной пластине в случае ее обобщенного плоского напряженного состояния (у контура протяженного цилиндрического включения эллиптического сечения в изотропном массиве при плоской деформации), при наличии разбросов в значениях физико-механических и геометрических параметров рассматриваемой конструкции. Принцип обобщения для получения искомого нечетко-множественного описания эндогенного показателя концентрации напряжений применяется в форме [7], использующей представления нечетко-интервальных экзогенных параметров суперпозициями по множествам альфа-уровня (альфа-срезам), и, соответственно, эндогенная характеристика на основании разработанного алгоритма решения формируется в аналогичном виде.

**1. Постановка задачи и соотношения аналитического решения ее четкого классического варианта.** Разрабатываемый алгоритм учета влияния неконтрастности исходных физико-механических параметров конструкции на показатели концентрации напряжений базируется на использовании изложенного в работе [8] варианта аналитического решения классической четкой версии двумерной задачи о напряженном состоянии бесконечной изотропной упругой пластины, содержащей изотропное деформируемое включение  $G_1$  эллиптической формы из отличающегося по свойствам материала. В срединной плоскости пластины вводится система прямоугольных координат  $Ox_1x_2$  с началом, расположенным в геометрическом центре включения. Его контур имеет вид эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ . Полагается, что область  $G_2$ , представляющая собой внешность эллиптического контура  $L$  включения в комплексной плоскости  $z = x_1 + ix_2$ , конформно отображается на внешность окружности единичного радиуса во вспомогательной комплексной плоскости  $\varsigma = r \exp(i\theta)$  при помощи функции

$$z = \omega(\varsigma) = R(\varsigma + m\varsigma^{-1}), \quad (1)$$

$$R = (a + b)/2, \quad m = (a - b)/(a + b), \quad a = R(1 + m), \quad b = R(1 - m).$$

При этом занимаемая включением область  $G_1$  с разрезом между фокусами на отрезке  $[-c, c]$ ,  $c = 2R \cdot m^{1/2}$  посредством функции (1) конформно отображается на кольцевую область  $\{r \in [m^{1/2}, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$  в комплексной плоскости  $\varsigma$ . Из (1)  $x_1 = R(r + mr^{-1}) \cos \theta$ ,  $x_2 = R(r - mr^{-1}) \sin \theta$ , а направляющий угол  $\gamma = (\mathbf{n}, x_1)$  для внешней нормали  $\mathbf{n}$  к контуру  $L$  эллиптического включения в произвольной точке  $L$  определяется соотношением  $\exp(i\gamma) = \varsigma \omega'(\varsigma) / |\varsigma \omega'(\varsigma)|$ , из которого в качестве следствия можно получить

$$e^{-2i\gamma} = (((1 + m^2) \cos 2\theta - 2m) - i(1 - m^2) \sin 2\theta) / (1 + m^2 - 2m \cos 2\theta). \quad (2)$$

Согласно результатам [8], решение задачи о деформировании рассматриваемой пластины методом комплексных потенциалов при различных вариантах задания приложенных на бесконечности  $G_2$  внешних усилий  $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty$  приводит к следующим соотношениям для контурных напряжений  $(\sigma_{rr}^{(j)})_L, (\sigma_{\theta\theta}^{(j)})_L$  в областях  $G_j$  на линии сопряжения  $L$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr}^{(1)})_L &= (\sigma_{rr}^{(2)})_L = A_1 + \bar{A}_1 - (B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}) / 2 = \\ &= F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta}^{(1)})_L &= A_1 + \bar{A}_1 + (B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}) / 2 = \\ &= F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta}^{(2)})_L &= 2(A - mD + \bar{A} - m\bar{D} - (mA - \bar{D})e^{2i\theta} - \\ &- (m\bar{A} - D)e^{-2i\theta}) / (1 + m^2 - 2m \cos 2\theta) - A_1 - \bar{A}_1 + \\ &+ (B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma}) / 2 = F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

В соотношениях (3)–(5) введены обозначения [8]

$$\begin{aligned} D &= m\bar{A} + \bar{B} - m(A_1 + \bar{A}_1) - B_1, \quad F = (1 - m^2)(\mu_1 - \mu_2) / \mu_1, \\ G &= (\mu_1 + \kappa_1 \mu_2) / \mu_1 - m^2(\mu_1 - \mu_2)(\kappa_2 \mu_1 - \kappa_1 \mu_2) / (\mu_1(\mu_2 + \kappa_2 \mu_1)), \\ C &= (1 + \kappa_2)\bar{A} - m(1 + \kappa_2)(\mu_1 - \mu_2)(mA + B) / (\mu_2 + \kappa_2 \mu_1), \\ A_1 &= (FC - G\bar{C}) / (F^2 - G^2), \\ B_1 &= \mu_1(1 + \kappa_2)(mA + B) / (\mu_2 + \kappa_2 \mu_1) - mA_1 - \\ &- m\bar{A}_1(\kappa_2 \mu_1 - \kappa_1 \mu_2) / (\mu_2 + \kappa_2 \mu_1), \\ A &= \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \frac{8i\mu}{1+\kappa}\omega^\infty), \quad B = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty), \\ \omega^\infty &= -\sigma_{12}^\infty m(1 + \kappa_2) / (2\mu_2(m_2 + \kappa_2)). \end{aligned} \quad (6)$$

Характеристика  $\omega^\infty$  описывает угол поворота на бесконечности при соответствующем типе внешнего нагружения. Параметры  $\mu_j$  и  $\nu_j$ , соответственно, представляют собой модуль сдвига и коэффициент Пуассона для материала в области  $G_j$ . Параметр  $\kappa_j$  имеет представление  $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$  в случае, если в представленной геометрической постановке для составного тела рассматривается задача обобщенного плоского напряженного состояния, либо представление  $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$ , если рассматривается двумерная задача плоской деформации. Упругие перемещения  $u_j^{(1)}$  в произвольной точке включения могут быть рассчитаны с использованием соотношения

$$2\mu_1(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}) = (\kappa_1 A_1 - \bar{A}_1)z - \bar{B}_1 \bar{z}. \quad (7)$$

Для ряда приведенных выше параметров могут быть записаны конкретизированные представления применительно к частным случаям задания внешних усилий на бесконечности. Так, при одностороннем растяжении усилиями  $\sigma_{11}^\infty = p$ ,  $\sigma_{22}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{12}^\infty = 0$

$$\begin{aligned} A &= p/4, \quad B = -p/2, \quad A_1 = C/(F + G), \\ C &= p(1 + \kappa_2)(1 - m(m - 2)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))/4, \\ B_1 &= \mu_1 p(1 + \kappa_2)(m - 2)/(4(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)) - \\ &\quad - mA_1(\mu_2(1 - \kappa_1) + 2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1); \end{aligned} \quad (8)$$

при одностороннем растяжении усилиями  $\sigma_{11}^\infty = 0$ ,  $\sigma_{22}^\infty = p$ ,  $\sigma_{12}^\infty = 0$

$$\begin{aligned} A &= p/4, \quad B = p/2, \quad A_1 = C/(F + G), \\ C &= p(1 + \kappa_2)(1 - m(m + 2)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))/4, \\ B_1 &= \mu_1 p(1 + \kappa_2)(m + 2)/(4(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)) - \\ &\quad - mA_1(\mu_2(1 - \kappa_1) + 2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1); \end{aligned} \quad (9)$$

при всестороннем растяжении  $\sigma_{11}^\infty = p$ ,  $\sigma_{22}^\infty = p$ ,  $\sigma_{12}^\infty = 0$

$$\begin{aligned} A &= p/2, \quad B = 0, \quad A_1 = C/(F + G), \\ C &= p(1 + \kappa_2)(1 - m^2(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))/2, \\ B_1 &= \mu_1 p(1 + \kappa_2)m/(2(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)) - \\ &\quad - mA_1(\mu_2(1 - \kappa_1) + 2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Для представленных частных случаев

$$\begin{aligned} F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta) &= (\sigma_{\theta\theta}^{(1)})_L = \\ &= 2G/(F + G) + B_1((1 + m^2) \cos 2\theta - 2m)/(1 + m^2 - 2m \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta) &= (\sigma_{\theta\theta}^{(2)})_L = \\ &= 4(A - mD - (ma - D) \cos 2\theta)/(1 + m^2 - 2m \cos 2\theta) - \\ &\quad - 2G/(F + G) + B_1((1 + m^2) \cos 2\theta - 2m)/(1 + m^2 - 2m \cos 2\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

В случае действия приложенных к пластине сдвиговых усилий  $\sigma_{12}^\infty$

$$\begin{aligned} A &= -im\sigma_{12}^\infty/(m^2 + \kappa_2), \quad A_1 = C/(F - G), \quad B = i\sigma_{12}^\infty, \\ B_1 &= i\mu_1((1 + \kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))(\kappa_2/(m^2 + \kappa_2))\sigma_{12}^\infty - \\ &\quad - mA_1\mu_2(1 + \kappa_1)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1), \\ C &= -i(1 + \kappa_2)(1 - (1 + m^2)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))(m/(m^2 + \kappa_2))\sigma_{12}^\infty, \\ F - G &= -\mu_2(1 + \kappa_1)(1 + m^2((\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)))/\mu_1. \end{aligned} \quad (13)$$

**2. Методика и результаты исследования нечетко-множественной модели.** Представленные соотношения для характеристик концентрации напряжений на границе контакта основного тела и включения подлежат исследованию в рамках предположений о нечеткости задания геометрических и физико-механических параметров конструкции  $a$ ,  $b$ ,  $\mu_j$ ,  $\nu_j$ , а также нечеткости силовых параметров внешнего нагружения  $\sigma_{11}^\infty$ ,  $\sigma_{22}^\infty$ ,  $\sigma_{12}^\infty$ , которая обусловлена технологическими факторами, разбросами данных экспериментальных замеров величин упругих постоянных материалов, неопределенностью эксплуатационных условий и т.д. При этом разрабатываемый вариант методики получения искомых оценок разброса в значениях анализируемых эндогенных параметров модели базируется на предположениях о задании соответствующих неконтрастных величин нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{\mu}_j$ ,  $\tilde{\nu}_j$ ,  $\tilde{\sigma}_{11}^\infty$ ,  $\tilde{\sigma}_{22}^\infty$ ,  $\tilde{\sigma}_{12}^\infty$ , характеризуемыми кортежами реперных точек  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ,  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ ,  $(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \mu_{3j}, \mu_{4j})$ ,  $(\nu_{1j}, \nu_{2j}, \nu_{3j}, \nu_{4j})$ ,  $(\sigma_1^{(11)}, \sigma_2^{(11)}, \sigma_3^{(11)}, \sigma_4^{(11)})$ ,  $(\sigma_1^{(22)}, \sigma_2^{(22)}, \sigma_3^{(22)}, \sigma_4^{(22)})$ ,  $(\sigma_1^{(12)}, \sigma_2^{(12)}, \sigma_3^{(12)}, \sigma_4^{(12)})$  и функциями принадлежности  $\mu_{\tilde{a}}(a)$ ,  $\mu_{\tilde{b}}(b)$ ,  $\mu_{\tilde{\mu}_j}(\mu_j)$ ,  $\mu_{\tilde{\nu}_j}(\nu_j)$ ,  $\mu_{\tilde{\sigma}_{ij}^\infty}(\sigma_{ij}^\infty)$ . Для перечисленных нечетко-интервальных величин вводятся представления в виде разложений по множествам  $\alpha$ -срезов

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], & \underline{a}_\alpha &= (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2, & \bar{a}_\alpha &= \alpha a_3 + (1 - \alpha)a_4; \\
 \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], & \underline{b}_\alpha &= (1 - \alpha)b_1 + \alpha b_2, & \bar{b}_\alpha &= \alpha b_3 + (1 - \alpha)b_4; \\
 \tilde{\mu}_j &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{\alpha j}, \bar{\mu}_{\alpha j}], & \underline{\mu}_{\alpha j} &= (1 - \alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, \\
 \bar{\mu}_{\alpha j} &= \alpha \mu_{3j} + (1 - \alpha)\mu_{4j}; & \tilde{\nu}_j &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{\alpha j}, \bar{\nu}_{\alpha j}], \\
 \underline{\nu}_{\alpha j} &= (1 - \alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, & \bar{\nu}_{\alpha j} &= \alpha \nu_{3j} + (1 - \alpha)\nu_{4j}; \\
 \tilde{\sigma}_{11}^\infty &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}], & \underline{\sigma}_\alpha^{(11)} &= (1 - \alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, & (14) \\
 \bar{\sigma}_\alpha^{(11)} &= \alpha \sigma_3^{(11)} + (1 - \alpha)\sigma_4^{(11)}; & \tilde{\sigma}_{22}^\infty &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}], \\
 \underline{\sigma}_\alpha^{(22)} &= (1 - \alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, & \bar{\sigma}_\alpha^{(22)} &= \alpha \sigma_3^{(22)} + (1 - \alpha)\sigma_4^{(22)}; \\
 \tilde{\sigma}_{12}^\infty &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}], & \underline{\sigma}_\alpha^{(12)} &= (1 - \alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, \\
 \bar{\sigma}_\alpha^{(12)} &= \alpha \sigma_3^{(12)} + (1 - \alpha)\sigma_4^{(12)}.
 \end{aligned}$$

Возможные варианты анализа рассматриваемой проблемы связаны с предположениями о нечеткости величин упругих постоянных  $\mu_j$ ,  $\nu_j$  при точном задании геометрических параметров  $a$ ,  $b$  и характеристик внешнего нагружения; о нечеткости величин полусей эллиптического включения  $a$ ,  $b$  при точных значениях модулей упругости материалов и характеристик внешнего нагружения; о нечеткости всей совокупности экзогенных параметров модели.

В наиболее общем случае при применении эвристического принципа расширения для нечетких оценок показателей концентрации контурных напряжений  $(\sigma_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\sigma_{rr}^{(2)}(\theta))_L$ ,  $(\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  могут быть записаны пред-

ставления

$$(\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{1\alpha}(\theta), \overline{F}_{1\alpha}(\theta)], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \underline{F}_{1\alpha}(\theta) = \\ = & \inf_{\substack{a \in [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, (1-\alpha)a_4 + \alpha a_3] \\ b \in [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, (1-\alpha)b_4 + \alpha b_3] \\ \mu_j \in [(1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, (1-\alpha)\mu_{4j} + \alpha \mu_{3j}] \\ \nu_j \in [(1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, (1-\alpha)\nu_{4j} + \alpha \nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(11)} + \alpha \sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(22)} + \alpha \sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(12)} + \alpha \sigma_3^{(12)}]}} F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{F}_{1\alpha}(\theta) = \\ = & \sup_{\substack{a \in [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, (1-\alpha)a_4 + \alpha a_3] \\ b \in [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, (1-\alpha)b_4 + \alpha b_3] \\ \mu_j \in [(1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, (1-\alpha)\mu_{4j} + \alpha \mu_{3j}] \\ \nu_j \in [(1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, (1-\alpha)\nu_{4j} + \alpha \nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(11)} + \alpha \sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(22)} + \alpha \sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(12)} + \alpha \sigma_3^{(12)}]}} F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta); \end{aligned}$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{2\alpha}(\theta), \overline{F}_{2\alpha}(\theta)], \quad (16)$$

$$\underline{F}_{2\alpha}(\theta) =$$

$$\begin{aligned} = & \inf_{\substack{a \in [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, (1-\alpha)a_4 + \alpha a_3] \\ b \in [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, (1-\alpha)b_4 + \alpha b_3] \\ \mu_j \in [(1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, (1-\alpha)\mu_{4j} + \alpha \mu_{3j}] \\ \nu_j \in [(1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, (1-\alpha)\nu_{4j} + \alpha \nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(11)} + \alpha \sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(22)} + \alpha \sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(12)} + \alpha \sigma_3^{(12)}]}} F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{F}_{2\alpha}(\theta) = \\ = & \sup_{\substack{a \in [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, (1-\alpha)a_4 + \alpha a_3] \\ b \in [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, (1-\alpha)b_4 + \alpha b_3] \\ \mu_j \in [(1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, (1-\alpha)\mu_{4j} + \alpha \mu_{3j}] \\ \nu_j \in [(1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, (1-\alpha)\nu_{4j} + \alpha \nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(11)} + \alpha \sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(22)} + \alpha \sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(12)} + \alpha \sigma_3^{(12)}]}} F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta); \end{aligned}$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [F_{3\alpha}(\theta), \bar{F}_{3\alpha}(\theta)], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \underline{F}_{3\alpha}(\theta) = \\ = & \inf_{\substack{a \in [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, (1-\alpha)a_4 + \alpha a_3] \\ b \in [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, (1-\alpha)b_4 + \alpha b_3] \\ \mu_j \in [(1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, (1-\alpha)\mu_{4j} + \alpha \mu_{3j}] \\ \nu_j \in [(1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, (1-\alpha)\nu_{4j} + \alpha \nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(11)} + \alpha \sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(22)} + \alpha \sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(12)} + \alpha \sigma_3^{(12)}]}} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{F}_{3\alpha}(\theta) = \\ = & \sup_{\substack{a \in [(1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, (1-\alpha)a_4 + \alpha a_3] \\ b \in [(1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, (1-\alpha)b_4 + \alpha b_3] \\ \mu_j \in [(1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha \mu_{2j}, (1-\alpha)\mu_{4j} + \alpha \mu_{3j}] \\ \nu_j \in [(1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha \nu_{2j}, (1-\alpha)\nu_{4j} + \alpha \nu_{3j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(11)} + \alpha \sigma_2^{(11)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(11)} + \alpha \sigma_3^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(22)} + \alpha \sigma_2^{(22)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(22)} + \alpha \sigma_3^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [(1-\alpha)\sigma_1^{(12)} + \alpha \sigma_2^{(12)}, (1-\alpha)\sigma_4^{(12)} + \alpha \sigma_3^{(12)}]}} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \end{aligned}$$

в которых вид функций  $F_j(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta)$  определяется представлениями (3) – (5), (11), (12).

При постановке задач парциального учета влияния факторов неопределенности только для отдельных экзогенных параметров рассматриваемых моделей, те параметры, которые при этом рассматриваются в варианте классического четкого задания, исключаются из числа варьируемых в отношениях (15) – (17). К примеру, в случае парциальной оценки влияния разброса в значениях геометрических характеристик – учета нечеткости величин полюсей эллиптического включения  $a, b$  при точных значениях модулей упругости материалов и характеристик внешнего нагружения, выражения (15) – (17) могут быть записаны в виде

$$(\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{1\alpha}(\theta), \bar{F}_{1\alpha}(\theta)], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_{1\alpha}(\theta) &= \inf_{m \in [(1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, (1-\alpha)m_4 + \alpha m_3]} F_1(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \\ \bar{F}_{1\alpha}(\theta) &= \sup_{m \in [(1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, (1-\alpha)m_4 + \alpha m_3]} F_1(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta); \end{aligned}$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{2\alpha}(\theta), \bar{F}_{2\alpha}(\theta)], \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\underline{F}_{2\alpha}(\theta) &= \inf_{m \in [(1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, (1-\alpha)m_4 + \alpha m_3]} F_2(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \\ \overline{F}_{2\alpha}(\theta) &= \sup_{m \in [(1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, (1-\alpha)m_4 + \alpha m_3]} F_2(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta);\end{aligned}$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{3\alpha}(\theta), \overline{F}_{3\alpha}(\theta)], \quad (20)$$

$$\begin{aligned}\underline{F}_{3\alpha}(\theta) &= \inf_{m \in [(1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, (1-\alpha)m_4 + \alpha m_3]} F_3(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \\ \overline{F}_{3\alpha}(\theta) &= \sup_{m \in [(1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, (1-\alpha)m_4 + \alpha m_3]} F_3(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta).\end{aligned}$$

Здесь  $m_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ) – реперные точки нечеткого интервала  $\tilde{m}$ , которые в соответствии с выражением (1) и правилами арифметики нечетких интервалов имеют вид

$$\begin{aligned}m_1 &= (a_1 - b_4)/(a_4 + b_4), & m_2 &= (a_2 - b_3)/(a_3 + b_3), \\ m_3 &= (a_3 - b_2)/(a_2 + b_2), & m_4 &= (a_4 - b_1)/(a_1 + b_1).\end{aligned} \quad (21)$$

В представляемых вариантах численной реализации описанной методики получения нечетких оценок для показателя концентрации контурных напряжений рассматривается всестороннее растяжение пластин из катаного алюминия с эллиптическими титановыми включениями, для которых упругие постоянные  $\mu_J$  [ $10^{10} Pa$ ],  $\nu_j$  и величины полуосей  $a$  [ $10^{-2} m$ ],  $b$  [ $10^{-2} m$ ] для контура включения являются неконтрастными экзогенными параметрами модели и задаются нормальными нечеткими трапецеидальными интервалами с кортежами реперных значений

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 &: (4.35, 4.37, 4.39, 4.41); & \tilde{\mu}_2 &: (2.60, 2.61, 2.63, 2.70); \\ \tilde{\nu}_1 &: (0.31, 0.315, 0.325, 0.33); & \tilde{\nu}_2 &: (0.32, 0.34, 0.35, 0.36); \\ \tilde{a} &: (1.90, 1.95, 2.05, 2.10); & \tilde{b} &: (0.90, 0.95, 1.05, 1.10).\end{aligned}$$

Соответствующие профили функций принадлежности  $\mu_{\tilde{a}}(a)$ ,  $\mu_{\tilde{b}}(b)$ ,  $\mu_{\tilde{m}}(b)$ ,  $\mu_{\tilde{\mu}_j}(\mu_j)$ ,  $\mu_{\tilde{\nu}_j}(\nu_j)$  для нечетко-множественных характеристик  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{\mu}_j$ ,  $\tilde{\nu}_j$  представлены на рис. 1 – 7.



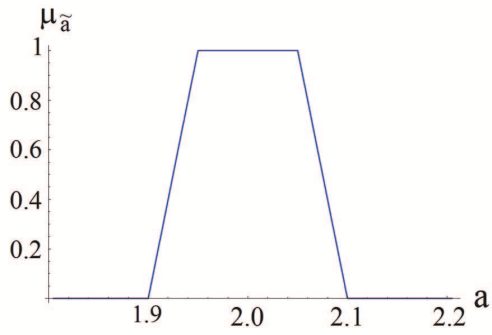


Рис. 1. Функция принадлежности для  $\tilde{a}$ .

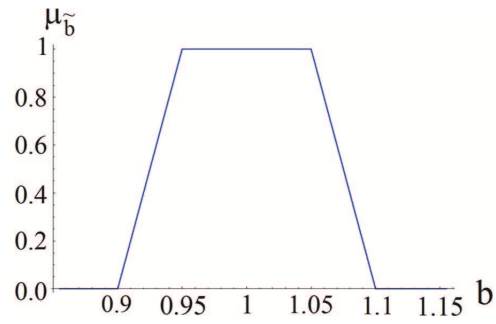


Рис. 2. Функция принадлежности для  $\tilde{b}$ .

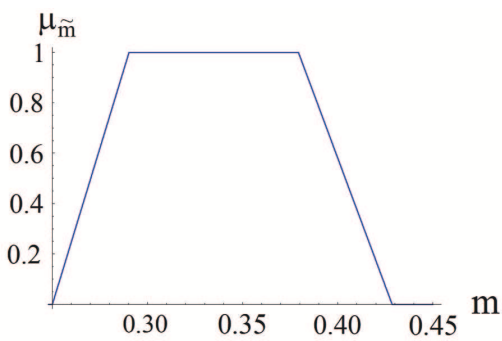


Рис. 3. Функция принадлежности для  $\tilde{m}$ .

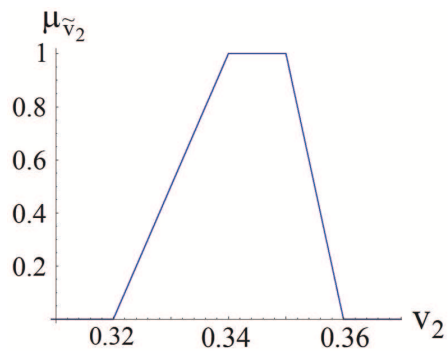


Рис. 4. Функция принадлежности для  $\tilde{v}_2$ .

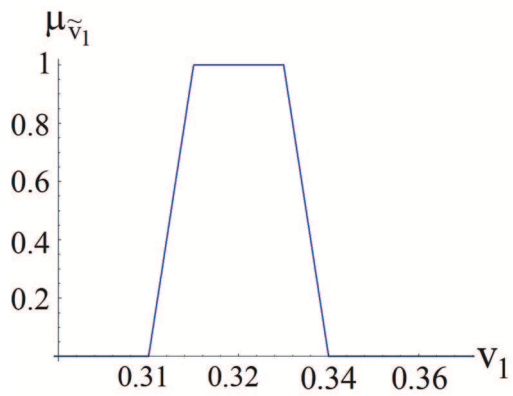


Рис. 5. Функция принадлежности для  $\tilde{v}_1$ .

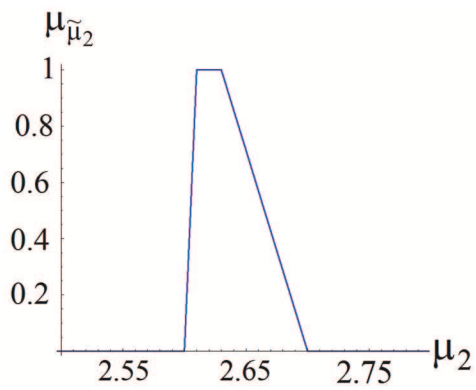


Рис. 6. Функция принадлежности для  $\tilde{\mu}_2$ .

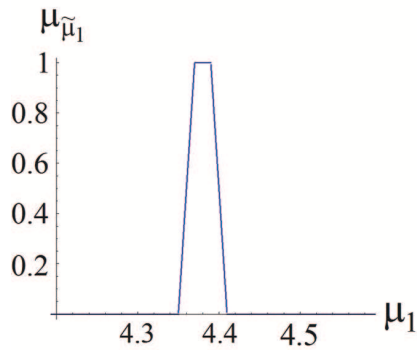


Рис. 7. Функция принадлежности для  $\tilde{\mu}_1$ .

Описания нечетких оценок отнесенных к значению параметра  $p$  показателей концентрации напряжений  $(\sigma_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\sigma_{rr}^{(2)}(\theta))_L$ ,  $(\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  в представляемом случае всестороннего растяжения пластины усилиями интенсивности  $\sigma_{11}^\infty = p$ ,  $\sigma_{22}^\infty = p$ ,  $\sigma_{12}^\infty = 0$  в рамках допущения о нечеткости очертаний включения при фиксированных значениях упругих постоянных для нескольких значений углового параметра  $\theta$  представлены на рис. 8 (а, б, в) – 10 (а, б, в).

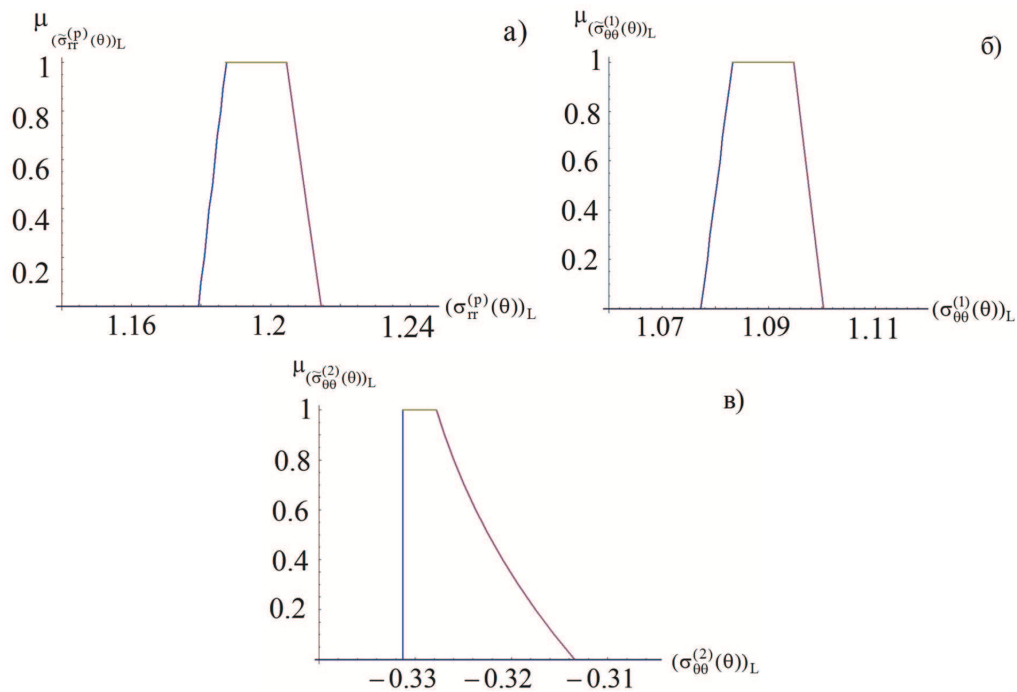


Рис. 8. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 2^\circ$ .

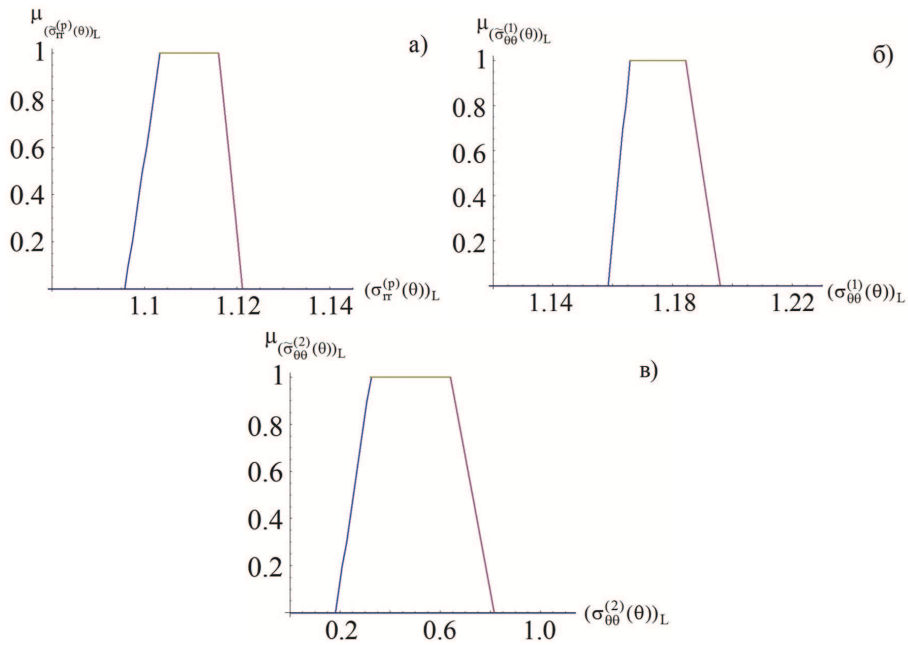


Рис. 9. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 45^\circ$ .

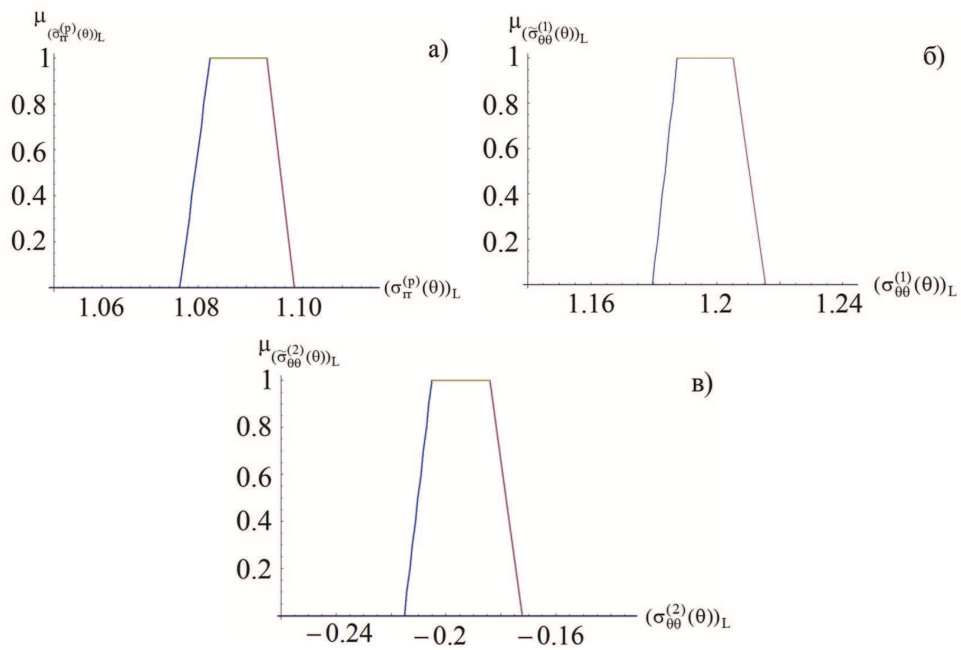


Рис. 10. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 88^\circ$ .

Аналогичные по смыслу оценки, получаемые в рамках предположения о том, что нечеткостью из всех экзогенных параметров модели характеризуются только модули Пуассона материалов пластины и включения, представлены на рис. 11 (а, б, в)–13 (а, б, в).

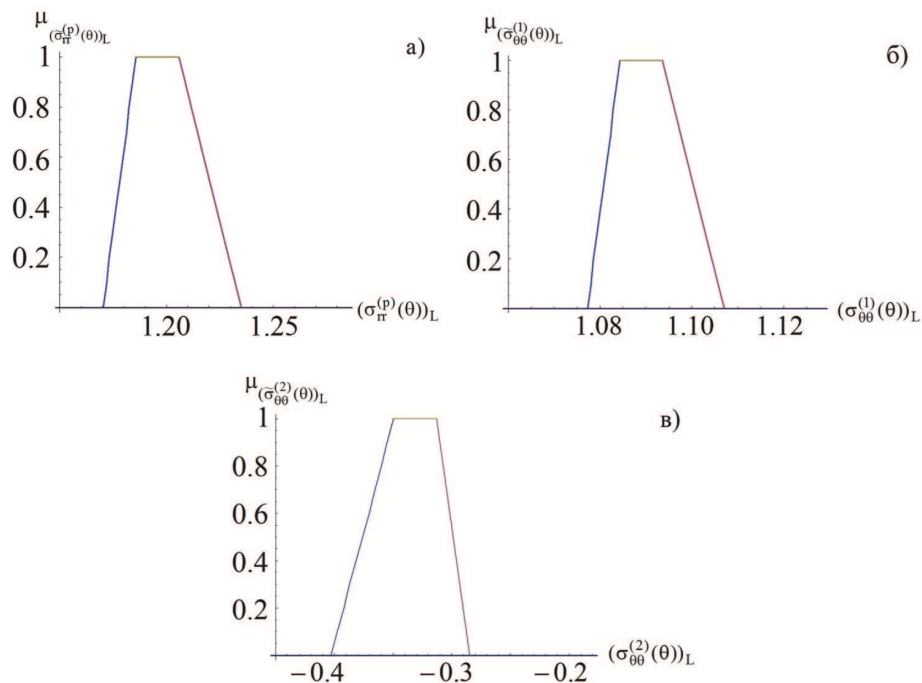


Рис. 11. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 2^\circ$ .

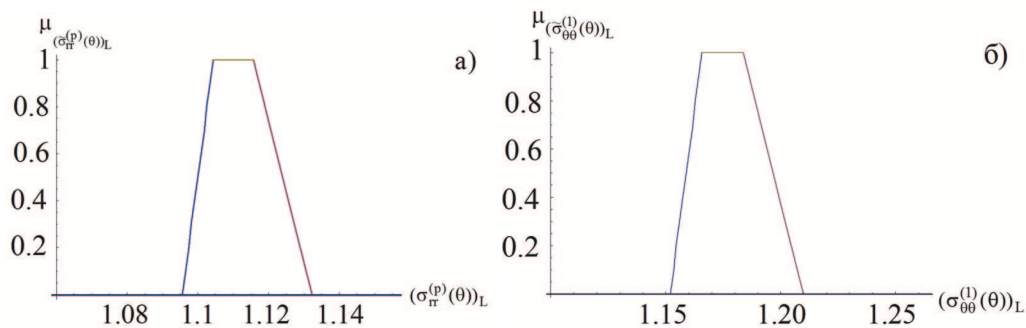


Рис. 12 (а, б). Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 45^\circ$ .

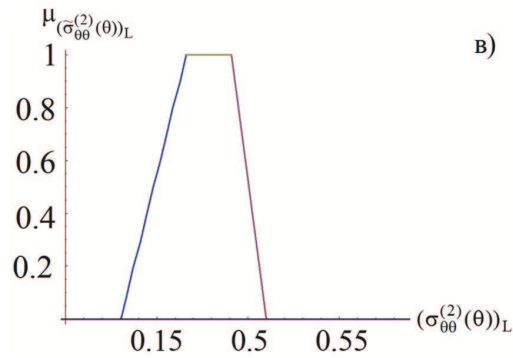


Рис. 12 (в). Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 45^\circ$ .

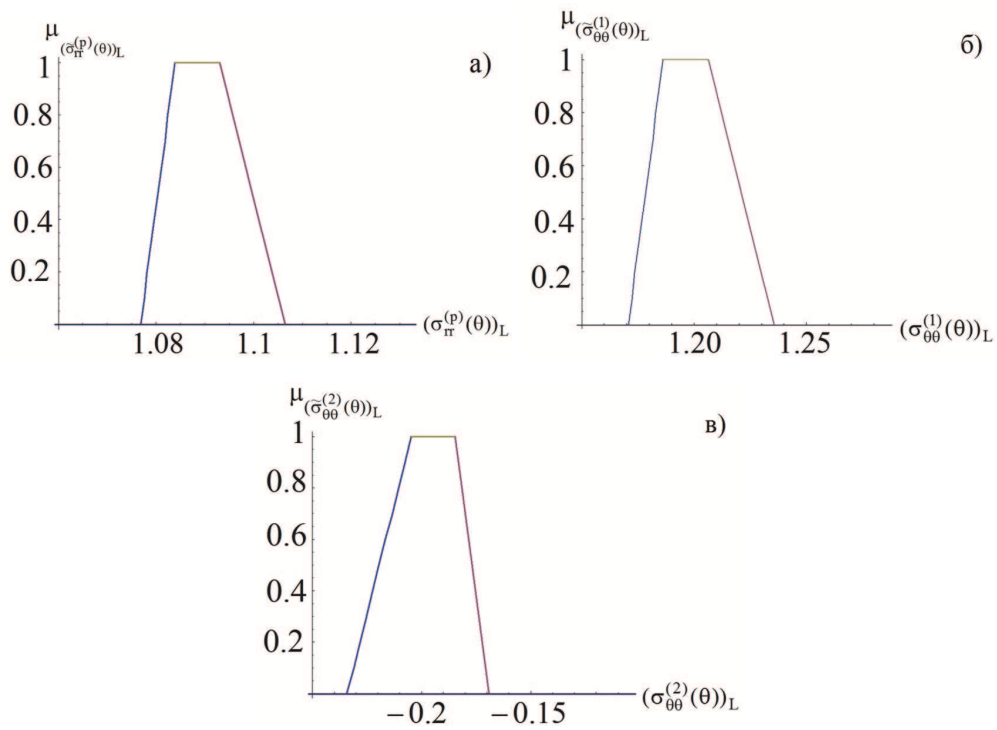


Рис. 13. Функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик  $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ ,  $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$  для значения параметра  $\theta = 2^\circ$ .

Полученные оценки позволяют сделать вывод о различии степени разброса оценок показателей концентрации контурных напряжений для точек участков границы включения с различной кривизной при учете факторов

геометрической либо механической неопределенности в исходных параметрах рассматриваемой задачи.

**Выводы.** В работе представлены результаты анализа проблемы учета нечеткости геометрических, механических и силовых экзогенных характеристик в модели получения оценок для показателей концентрации механических напряжений на контурах растягиваемых тонких изотропных пластин с изотропными упругими включениями эллиптического очертания. Для учета влияния разбросов в значениях экзогенных параметров, интерпретируемых как нечетко-множественные величины, используется подход, заключающийся в применении альфа-уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения к четким аналитическим представлениям для искомых характеристик, полученным с использованием аппарата теории комплексных потенциалов. Представлены примеры численной реализации представляемой методики с получением нечетко-множественных оценок для показателей концентрации напряжений у контура контакта пластины и включения в рамках допущения о том, что нечеткие геометрические и физико-механические параметры представлены нечеткими трапецидальными интервалами.

1. *Ломакин В.А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1970. – 139 с.
2. *Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожжев С.В.* Оценки влияния нечеткости геометрических экзогенных параметров в модели растяжения ортотропной пластины с эллиптическим отверстием // Ж. теорет. и прикл. механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 19–26.
3. *Сторожжев С.В., Номбре С.Б.* Анализ неопределенности в оценках концентрации напряжений у контура эллиптического отверстия с нечетким показателем эксцентриситета в анизотропной пластине // XII Всерос. школа-семинар “Математическое моделирование и биомеханика в современном университете” (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017 г., Россия): Тез. докл. – Ростов-на-Дону: Изд-во Юж. федерал. ун-та, 2017. – С. 141.
4. *Болножин В.Е., Нгуен Динь Чунг, Сторожжев С.В., Номбре С.Б.* Оценки влияния нечеткости параметров геометрических объектов в эвристических расчетных алгоритмах // Системы управления и информационные технологии. – 2017. – № 1(67). – С. 68–71.
5. *Сторожжев С.В.* Нечетко-множественный анализ влияния разброса физико-механических и геометрических параметров при исследовании концентрации напряжений в пластинах с эллиптическими отверстиями // Донецкие чтения-2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Материалы Междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых (Донецк, 17–20 октября 2017 г.). – Т. 1: Физ.-мат. и техн. науки / под общей ред. проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – С. 35–36.
6. *Диллигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология – М.: Изд-во “Машиностроение-1”, 2004. – 397 с.
7. *Ротштейн А.П., Штовба С.Д., Козачко А.Н.* Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
8. *Мальков В.М., Малькова Ю.В.* Деформация пластины с упругим эллиптическим включением // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. – 2015. – 2 (60), вып. 4. – С. 617–632.