УДК 519.5:681:513

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ И НАХОЖДЕНИЯ ВЕСОВ ОБЪЕКТОВ ПО НЕОДНОРОДНЫМ МАТРИЦАМ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

А.А. ПАВЛОВ, В.И. КУТ

Формулируются и обосновываются по матрице парных сравнений, содержащей неоднородную информацию эксперта о парных сравнениях объектов, конструктивные математические модели оптимизации нахождения весов в методе анализа иерархий Саати.

Проблема практического использования метода анализа иерархий [1–4] в задаче многокритериального выбора сводится к обоснованному нахождению весов объектов по эмпирическим матрицам парных сравнений, заполняемых экспертом (экспертами). Суть проблемы заключается в том, что в общем случае эксперт в силу возможной противоречивости проявлений свойств объектов и других факторов искажает косвенную информацию о весах объектов. В работе [7] предложены математические модели оптимизации для случая, когда каждый элемент матрицы парных сравнений показывает, во сколько раз вес одного объекта больше веса другого по отношению к заданной цели (критерию).

Рассмотрим случай, когда произвольный элемент матрицы парных сравнений соответствует одному из четырех вариантов:

1) показывает, во сколько раз вес одного объекта больше веса другого по отношению к заданной цели;
2) на сколько вес одного объекта больше веса другого по отношению к заданной цели;
3) один объект предпочтительнее другого (один вес больше другого);
4) информация о парном сравнении объектов отсутствует.

Следует отметить, что во втором варианте эксперт приводит оценку для всех весов в одних единицах измерения. Выбор единицы измерения веса никак не влияет на оценку в первом случае. Действительно, оценка $\gamma_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ остается неизменной при любых единицах измерения весов объектов (w_i — вес i -го объекта, $i = \overline{1, n}$).

Будем считать, что численные значения элементов матрицы парных сравнений в первом и втором вариантах экспертом могут искажаться. Информацию, которая содержится в матрице парных сравнений, в третьем варианте будем считать достоверной. Но здесь необходимым условием достоверности информации является выполнение свойства транзитивности.

Если $B_i \succ B_j$ (т.е. $w_i > w_j$, B_i — i -й объект) и $B_j \succ B_k$ то $B_i \succ B_k$, ($w_i > w_k$).

Произвольный (ij) элемент неоднородной матрицы парных сравнений размерности $n \times n$ принадлежит одному из четырех попарно не совместных множеств $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \mathbf{N}_4$.

Множество $\mathbf{N}_1$ состоит из тех элементов матрицы парных сравнений которые числом γ_{ij} оценивают отношения $\frac{w_i}{w_j}$. Множество $\mathbf{N}_2$ элементов матрицы парных сравнений состоит из тех ее элементов, которые числом d_{ij} оценивают равенство $w_i = w_j + d_{ij}$ $(|d_{ij}| > 0)$. γ_{ii}, d_{ii} из множеств $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ исключаем. (ij) элемент множества $\mathbf{N}_3$ содержит информацию $\left(w_i \substack{>\\<} w_j\right)$.

Элементы множества $\mathbf{N}_4$ пустые, т.е. эксперт не способен сравнить объект B_i с объектом B_j. Очевидны соотношения: если (ij) элемент равен γ_{ij}, то (ji) элемент равен $\frac{1}{\gamma_{ij}} \in \mathbf{N}_1$; если (ij) элемент равен d_{ij}, то (ji) элемент равен $-d_{ij} \in \mathbf{N}_2$; если (ij) элемент содержит неравенство $w_i > w_j$, то (ji) элемент — соответственно неравенство $w_j < w_i$ и $\in \mathbf{N}_3$.

Введем множества $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{N}_1$ и содержит все (ij) элементы из $\mathbf{N}_1$, удовлетворяющие условию $\gamma_{ij} \geq 1$ ((ji)элемент в $\mathbf{A}_1$ не входит). $\mathbf{A}_2 \subset \mathbf{N}_2$ и содержит все (ij) элементы из $\mathbf{N}_2$, удовлетворяющие условию $d_{ij} > 0$ ((ji) элемент в $\mathbf{A}_2$ не входит). Из определения неоднородной матрицы парных сравнений следует, что $\mathbf{A}_1 \bigcap \mathbf{A}_2 = \{\varnothing\}$ $|\mathbf{A}_1|$, $|\mathbf{A}_2|$ — множество пар (ij), которые являются индексами элементов, входящих соответственно в множества $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$.

Такое задание множеств $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ позволяет как достаточно просто формулировать модели оптимизации, так и обоснованно находить коэффициенты согласованности весов w_i, $i = \overline{1,n}$.

Если неоднородная матрица парных сравнений является полностью согласованной (косвенная информация экспертом о весах объектов $w_i = \overline{1,n}$ не искажается), то существуют такие положительные числа w_i, $i = \overline{1,n}$, что

1. Если $(ij) \in |\mathbf{A}_1|$, то

$$\frac{w_i}{w_j} = \gamma_{ij}, (w_i = \gamma_{ij} w_j). \tag{1}$$

2. Если $(ij) \in |\mathbf{A}_2|$, то $w_i = w_j + d_{ij}$.

В дальнейшем будем считать, что единица измерения d_{ij} позволяет положить минимально возможное значение w_i, $i = \overline{1,n}$ равной единице.

3. Для $\forall (ij) \in \mathbf{N}_3$ соотношения для весов также выполняются.

Введем очевидные ограничения:

1. Количество элементов множества $\mathbf{A}_1 \bigcup \mathbf{A}_2$ не меньше, чем число сравниваемых объектов.

2. Для любого i существует пара $(ij) \vee (ji) \in \mathbf{A}_1 \bigcup \mathbf{A}_2$.

Действительно, в противном случае полностью согласованная неоднородная матрица парных сравнений не задает однозначно значения весов объектов, что исключает применение метода парных сравнений в задаче принятия решений. Если эксперт искажает косвенную информацию о весах объектов, то положительных значений весов w_i, $i=\overline{1,n}$, для которых выполняются соотношения (1), не существует. В этом случае элементы матрицы парных сравнений из множества $\mathbf{N}_3$ используются в проверке выполнения для весов объектов условий транзитивности в соответствии с числами $\gamma_{ij}, (ij) \in | \mathbf{A}_1 |$; d_{ij}, $(ij) \in | \mathbf{A}_2 |$. Т.е. если из анализа неравенств, содержащихся в $\mathbf{N}_3$, вытекает, что $w_i > w_j$, а $w_j > w_e$, то (ie) элемент принадлежит либо $|\mathbf{A}_1|$, либо $|\mathbf{A}_2|$, если он не принадлежит $\mathbf{N}_3$. В случае невыполнения этих условий эксперт обязан корректировать числа γ_{ij}, d_{ij}, так как информация из множества $\mathbf{N}_3$ считается достоверной. В дальнейшем элементы неоднородной матрицы парных сравнений, принадлежащих множествам $\mathbf{N}_3$, $\mathbf{N}_4$, в построении моделей оптимизации не используются.

Для построения и обоснования эффективных математических моделей оптимизации нахождения весов введем меры их согласованности числам γ_{ij}, d_{ij}.

Для чисел γ_{ij} используем меры, введенные в работе [7].

$$(w_i - \gamma_{ij} w_j)^2 \text{ либо } \left| w_i - \gamma_{ij} w_j \right|, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2{}_{ij}} \left(\frac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij} \right)^2 \text{ либо } \frac{1}{\gamma_{ij}} \left| \frac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij} \right|, \tag{3}$$

$$\forall (ij) \in | \mathbf{A}_1 |.$$

Меры (3), как обосновывалось в [7], являются более логичными. Однако их непосредственное использование приводит к неэффективным математическим моделям оптимизации. Тем не менее, как и в [7], в ряде моделей эти меры будут использованы конструктивно.

Для чисел d_{ij} введем следующие меры:

$$((w_i - d_{ij} - w_j)^2 \text{ либо } \left| w_i - d_{ij} - w_j \right|. \tag{4}$$

Первые две модели используются только для нахождения весов по полностью согласованной неоднородной матрице парных сравнений. Иными словами, если существуют значения весов $1 \le a \le w_i \le b$, $i=\overline{1,n}$ (a, b — заданные числа — естественные ограничения на веса), для которых выполняются условия (1), то эти значения могут быть получены по первой либо второй модели. Если же эмпирическая матрица парных сравнений не является полностью согласованной, т.е. w_i, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих (1), не существует, то для нахождения и обоснования весов объектов может использоваться модель (3) для случая хорошо согласованной неоднородной матрицы парных сравнений и итеративное использование оптимизационных моделей 4–9 в общем случае.

Модель 1

$$\min_{w_i,\, i=\overline{1,n}} \left\{ \sum_{(ij)\in|\mathbf{A}_1|}\sum (w_i-\gamma_{ij}w_j)^2 + \sum_{(ij)\in|\mathbf{A}_2|}\sum (w_i-d_{ij}w_j)^2 \right\}, \tag{5}$$

$$1\le a\le w_i\le b\,,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{6}$$

где w_i, $i=\overline{1,n}$ — переменные; a, b — заданные числа.

Задача (5), (6) — задача выпуклого квадратичного программирования.

Если неоднородная матрица парных сравнений является полностью согласованной, то оптимальное значение функционала задачи (5), (6) равно нулю, а значения весов w_i ($i=\overline{1,n}$) удовлетворяют условиям

$$\frac{w_i}{w_j}=\gamma_{ij} \text{ для } \forall(ij)\in|\mathbf{A}_1|;\ w_i=d_{ij}+w_j \text{ для } \forall(ij)\in|\mathbf{A}_2|\,. \tag{7}$$

Модель 2

$$\min y \tag{8}$$

$$\begin{gathered} 1\le a\le w_i\le b\,, \\ -y\le w_i-\gamma_{ij}\ w_j\le y,\ \forall(ij)\in|\mathbf{A}_1|, \\ -y\le w_i-d_{ij}-w_j\le y,\ \forall(ij)\in|\mathbf{A}_2|,\ y\ge 0\,, \end{gathered} \tag{9}$$

где a, b — заданные числа; w_i, $i=\overline{1,n}$, y — переменные.

(8), (9) — задача линейного программирования.

Если неоднородная матрица парных сравнений является полностью согласованной, то оптимальное решение задачи (8), (9) удовлетворяет условию (7). Переменная y на оптимальном решении равна нулю.

Следующая модель строится для нахождения весов по допустимо согласованной эмпирической неоднородной матрице парных сравнений.

Определение. Хорошо обусловленной неоднородной матрицей парных сравнений называется такая матрица, у которой для заданных положительных чисел λ_1, λ_2 существуют веса объектов w_i, $i=\overline{1,n}$, такие, что выполняется

$$\left|\frac{w_i}{w_j}-y_{ij}\right|\le\lambda_1\gamma_{ij} \text{ для всех } (ij)\in|\,\mathbf{A}_1\,|, \tag{10}$$

$$\left|w_i-d_{ij}-w_j\right|\le\lambda_2 d_{ij} \text{ для всех } (ij)\in|\,\mathbf{A}_2\,|\,. \tag{11}$$

Этим весам соответствует произвольное допустимое решение задачи линейного программирования вида

Модель 3

$$1 \le a \le w_i \le b\,,$$

$$-\lambda_1 \gamma_{ij} w_j \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le \lambda_1 \gamma_{ij} w_j\,, \tag{12}$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|\,,$$

$$-\lambda_2\, d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le \lambda_2\, d_{ij}\,, \tag{13}$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|\,,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$ — переменные; a, b — заданные числа.

Допустимое решение находится как решение задачи линейного программирования стандартным образом [8], формулируемой по ограничениям (12), (13).

Построение следующих моделей связано с плохо обусловленными неоднородными матрицами парных сравнений.

В отличие от работы [7], в этом случае в силу неоднородности матрицы парных сравнений и невозможности в функционале эффективной модели оптимизации использовать непосредственно меру (3) предлагается итерационная процедура использования оптимизационных моделей для нахождения весов объектов. Пусть область (12), (13) является пустой для заданных положительных чисел λ_1, λ_2, определяющих хорошо обусловленную неоднородную матрицу парных сравнений. Тогда последовательно, при фиксированном j (j изменяется от нуля с единичным шагом) решаются следующие оптимизационные задачи (модели 4–9).

Модель 4

$$\min y$$

$$-(\lambda_1 + j\Delta_1)\gamma_{ij} w_j \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le (\lambda_1 + j\Delta_1)\gamma_{ij} w_j\,, \tag{14}$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|\,,$$

$$1 \le a \le w_i \le b,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{15}$$

$$-y d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le y d_{ij}\,, y \ge 0\,, \tag{16}$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|\,,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$, y — переменные; a, b, $\Delta_1 > 0$ — заданные числа.

(14) – (16) — задача линейного программирования.

Модель 5

$$\min \sum_{\forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|} \sum y_{ij}\,, \tag{17}$$

$$-(\lambda_1 + l\Delta_1)\gamma_{ij} w_j \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le (\lambda_1 + l\Delta_1)\gamma_{ij} w_j\,, \tag{18}$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|\,,$$

$$1 \le a \le w_i \le b\,,\ \ i = \overline{1,n}\,, \tag{19}$$

$$-\,y_{ij} d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le y_{ij} d_{ij}\,, y_{ij} \ge 0\,,$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|\,,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$, y_{ij}, $\forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|$ — переменные; a, b, $\Delta_1 > 0$ — заданные числа.

(17) – (19) — задача линейного программирования.

Модель 6

$$\min_{w_i, i=\overline{1,n}} \sum_{(ij) \in |\mathbf{A}_1|}\sum \left(w_i - \gamma_j w_j\right)^2, \tag{20}$$

$$-(\lambda_2 + l\Delta_2) d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le (\lambda_2 + l\Delta_2) d_{ij}\,,$$

$$\forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|\,, \tag{21}$$

$$1 \le a \le w_i \le b\,,\ \ i = \overline{1,n}\,,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$ — переменные; a, b, $\Delta_2 > 0$ — заданные числа.

Модель оптимизации (20), (21) — задача выпуклого квадратичного программирования.

Модель 7

$$\min \sum_{(ij) \in |\mathbf{A}_1|}\sum y_{ij}\,, \tag{22}$$

$$-\,y_{ij} \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y_{ij}\ \ \forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|\,, \tag{23}$$

$$-(\lambda_2 + l\Delta_2) d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le (\lambda_2 + l\Delta_2) d_{ij}\,,\ \ (ij) \in |\mathbf{A}_2|\,, \tag{24}$$

$$1 \le a \le w_i \le b\,,\ i = \overline{1,n}\,,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$, y_{ij}, $\forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|$ — переменные; a, b, λ_2, Δ_2 — заданные положительные числа.

(22) – (24) — задача линейного программирования.

Модель 8

$$\min \sum_{(ij) \in |\mathbf{A}_1|}\sum \frac{y_{ij}}{\gamma_{ij}}\,, \tag{25}$$

$$-\,y_{ij} \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y_{ij}, y_{ij} \ge 0 \quad \forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|\,, \tag{26}$$

$$-(\lambda_2 + l\,\Delta_2) d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le (\lambda_2 + l\,\Delta_2) d_{ij} \quad \forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|\,, \tag{27}$$

$$1 \le a \le w_i \le b\,,\ i = \overline{1,n}\,,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$, y_{ij}, $\forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|$ — переменные; a, b, λ_2, Δ_2 — заданные положительные числа.

(25) – (27) — задача линейного программирования.

Модель 9

$$\min y, \tag{28}$$

$$-y \le w_i - \gamma_{ij} w_j \le y \quad \forall (ij) \in |\mathbf{A}_1|, \tag{29}$$

$$-(\lambda_2 + l\Delta_2) d_{ij} \le w_i - d_{ij} - w_j \le (\lambda_2 + l\Delta_2) d_{ij} \quad \forall (ij) \in |\mathbf{A}_2|, \tag{30}$$

$$1 \le a \le w_i \le b, \ i = \overline{1,n}; \ y \ge 0,$$

где w_i, $i = \overline{1,n}$, y — переменные; a, b λ_2, Δ_2 — заданные положительные числа.

(28) – (30) — задача линейного программирования.

Обоснование моделей 4–9.

Отсутствие допустимого решения ограничений (10), (11) означает, что для заданных чисел λ_1, λ_2 условие хорошей согласованности (10), (11) неоднородной матрицы парных сравнений не реализуется.

В модели 4 фиксируется параметр согласованности $\lambda_1 + j\Delta_1$, $j = \overline{0,1,...}$ для коэффициентов неоднородной матрицы парных сравнений из множества $\mathbf{A}_1$.

Если задача (14) – (16) имеет решение, то найденным значениям весов объектов w_i^*, $i = \overline{1,n}$ соответствует минимум выражения

$$\max_{(ij) \in |\mathbf{A}_2|} \frac{|w_i - d_{ij} - w_j|}{d_{ij}}.$$

В модели 5 при фиксированном параметре согласованности $\lambda_1 + l\Delta_1$, $l = \overline{0,1,...}$ для коэффициентов неоднородной матрицы парных сравнений из множества $\mathbf{A}_1$ находятся значения весов w_i^*, $i = \overline{1,n}$, минимизирующие интегральную меру

$$\sum_{(ij)} \sum_{\in |\mathbf{A}_2|} \frac{|w_i - d_{ij} - w_j|}{d_{ij}}.$$

В модели 6 фиксируется параметр согласованности $\lambda_2 + l\Delta_2$, $l = \overline{0,1,...}$ для коэффициентов неоднородной матрицы парных сравнений из множества $\mathbf{A}_2$. Тогда оптимальному решению задачи (20), (21) соответствует значение весов w_i^*, $i = \overline{1,n}$, минимизирующее сумму квадратов отклонений w_i от $\gamma_{ij} w_j$.

Модель 7 решает задачу, аналогичную модели 6, но в этом случае оптимальным значениям весов w_i^*, $i = \overline{1,n}$, соответствует минимум выражения

$$\sum_{(ij)} \sum_{\in |\mathbf{A}_1|} |w_i - \gamma_{ij} w_j|.$$

Функционал модели 8 обосновывается следующим образом.

Имеют место неравенства

$$\frac{\left|w_i - w_j\gamma_{ij}\right|}{в\,\gamma_{ij}} \le \frac{\left|\dfrac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij}\right|}{\gamma_{ij}} \le \frac{\left|w_i - w_j\gamma_{ij}\right|}{a\,\gamma_{ij}}.$$

Так как функционал

$$\sum_{(ij)}\sum_{\in\left|\mathbf{A}_1\right|} \frac{\left|w_i - \gamma_{ij}w_j\right|}{w_j\gamma_{ij}}$$

приводит к задаче нелинейного невыпуклого программирования, то в модели 8 используется функционал (25), которому соответствует минимум верхней оценки функционала

$$\sum_{(ij)\in\left|\mathbf{A}_1\right|} \frac{\left|\dfrac{w_i}{w_j} - \gamma_{ij}\right|}{\gamma_{ij}} \le \sum_{(ij)\in\left|\mathbf{A}_1\right|} \frac{\left|w_i - w_j\gamma_{ij}\right|}{a\,\gamma_{ij}}. \tag{31}$$

В модели (9) при фиксированном параметре согласованности $\lambda_2 + l\Delta_2$ для коэффициентов неоднородной матрицы парных сравнений из множества $\mathbf{A}_2$ находятся значения весов w_i, $i = \overline{1,n}$, которым соответствует минимум выражения

$$\max_{(ij)\in\left|\mathbf{A}_1\right|}\left|w_1 - \gamma_{ij}w_j\right|.$$

Пусть для l_1 выполняется условие $\exists l \le l_1$, при котором одна из моделей 4–9 имеет допустимое решение. На l_1 могут накладываться ограничения вида $\lambda_1 + l_1\Delta_1 \le T_1$, $\lambda_2 + l_1\Delta_2 \le T_2$.

Обозначим w_i^e, $i=\overline{1,n}$, $e\in L$ оптимальные решения тех моделей 4–9, которые для всех $l \le l_1$ имеют допустимое решение.

Необходимо обосновать, какой из наборов весов w_i^e, $i=\overline{1,n}$, наиболее адекватно соответствует эмпирической неоднородной матрице парных сравнений.

Для этого найдем коэффициенты согласованности весов w_i^e, $i=\overline{1,n}$, $e\in L$.

Обозначим $\mathbf{N}_1^i$ множество пар (ij), каждой из которых соответствует $\gamma_{ij} \in \mathbf{N}_1$ при фиксированном i.

Аналогично определяется множество $\mathbf{N}_2^i$. $\left|\mathbf{N}_1^i\right|$, $\left|\mathbf{N}_2^i\right|$ — количество элементов в соответствующих множествах.

Тогда для весов w_i^e ($i=\overline{1,n}$, $e\in L$) вводим коэффициенты согласованности $\mathbf{K}_1(w_i^e)$, $\mathbf{K}_2(w_i^e)$, $\mathbf{K}_3(w_i^e)$, $\mathbf{K}_4$, $\mathbf{K}_5$.

$$\mathbf{K}_1(w_i^e) = \frac{1}{\left|\mathbf{N}_1^i\right|}\sum_{(ij)\in\mathbf{N}_1^i} \frac{\left|w_i^e - \gamma_{ij}w_j^e\right|}{\gamma_{ij}w_j^e}, \quad \left|\mathbf{N}_1^i\right| \ne 0. \tag{32}$$

Если $\left|\mathbf{N}_1^i\right| = 0$, то $\mathbf{K}_1(w_i^e)$ не существует.

Если в слагаемом (32) $\gamma_{ij} < 1$, то это слагаемое в (33) заменяется на

$$\frac{\left|w_j^e - \gamma_{ji} w_i^e\right|}{\gamma_{ji} w_i^e}.$$

$$\mathbf{K}_2\left(w_i^e\right) = \frac{1}{\left|\mathbf{N}_2^i\right|} \sum_{(ij)\in\mathbf{N}_2^i} \frac{\left|w_i^e - d_{ij} - w_j^e\right|}{\left|d_{ij}\right|}, \text{ если } \left|\mathbf{N}_2^i\right| \neq 0.$$

Если $\left|\mathbf{N}_2^i\right| = 0$, то $\mathbf{K}_2(w_i^e)$ не существует.

$$\mathbf{K}_3(w_i^e) = \mathbf{K}_1(w_i^e) + \mathbf{K}_2(w_i^e).$$

$\mathbf{K}_3(w_i^e)$ может содержать только одно слагаемое, если $\mathbf{K}_1(w_i^e)$ либо $\mathbf{K}_2(w_i^e)$ не существует.

$$\mathbf{K}_4(e) = \max_{(ij)\in|\mathbf{A}_1|}\left\{\frac{w_i^e - \gamma_{ij} w_j^e}{\gamma_{ij} w_j^e}\right\}, \quad \mathbf{K}_5(e) = \max_{(ij)\in|\mathbf{A}_2|}\left\{\frac{w_i^e - d_{ij} w_j^e}{d_{ij}}\right\}.$$

По коэффициентам согласованности $\mathbf{K}_3(w_i^e)$, $i = \overline{1,n}$, $\mathbf{K}_4(e)$, $\mathbf{K}_5(e)$ строим меры согласованности e-го набора весов объектов (w_i^e), $i = \overline{1,n}$, $e \in L$.

$$\mathbf{M}_1(e) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_3\left(w_i^e\right),$$

$$\mathbf{M}_2 = \max\left\{\mathbf{K}_4(e), \mathbf{K}_5(e)\right\}.$$

Таким образом каждый e-й набор весов объектов характеризуется мерами согласованности $\mathbf{M}_1(e)$ и $\mathbf{M}_2(e)$.

Задача свелась к классической. Есть конечный набор альтернатив, каждый из которых характеризуется значениями двух критериев $\mathbf{M}_1(e)$, $\mathbf{M}_2(e)$, $e \in \mathbf{L}$. Необходимо обосновать выбор одного из них. Итак, мы сформулировали частный случай задачи многокритериального выбора на конечном наборе альтернатив.

Приведем одно из возможных решений, базирующееся на специфике рассматриваемой задачи.

1. Находим множество $\mathbf{L}_1$ альтернатив, удовлетворяющих условию: для $\forall e \in \mathbf{L}_1$ выполняется $\mathbf{M}_1(e) \geq \mathbf{M}_1(\mathbf{m})$; $\mathbf{M}_2(e) \geq \mathbf{M}_2(\mathbf{m})$ $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{L}$, $\mathbf{m} \neq e$.

Любой набор весов w_i^e, $i = \overline{1,n}$, $e \in \mathbf{L}_1$ является решением поставленной задачи.

2. Множество $\mathbf{L}_1$ оказалось пустым. Ранжируем критерии по важности: в нашем случае первым является критерий $\mathbf{M}_1(e)$, вторым — $\mathbf{M}_2(e)$.

Находим множество $\mathbf{L}_2$, удовлетворяющее условию

$$\forall e \in \mathbf{L}_2 \ \ \mathbf{M}_1(e) \geq \mathbf{M}_1(\mathbf{m}); \ \forall \mathbf{m} \in \mathbf{L}, \ \mathbf{m} \neq e.$$

Если $\mathbf{L}_2$ содержит один элемент, то соответствующий набор весов w_i^e, $i=\overline{1,n}$ является решением задачи.

3. Если $\mathbf{L}_2$ содержит более чем один элемент, то находим множество $\mathbf{L}_3 \subset \mathbf{L}_2$, для которого выполняется $\forall e \in \mathbf{L}_3$ $\mathbf{M}_2(e) \geq \mathbf{M}_2(\mathbf{m})$ $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{L}_2$, $\mathbf{m} \neq e$.

Для произвольного $e \in \mathbf{L}_3$ набор весов w_i^e, $i=\overline{1,n}$ является решением задачи.

Пусть w_i^*, $i=\overline{1,n}$ — веса объектов, найденные по процедуре 1–3. Тогда в соответствии с методологией, изложенной в работе [7], значения этих весов непосредственно используются в методе анализа иерархий либо уменьшаются в соответствии с величиной интегральной меры $\mathbf{K}_3 = (w_i^*)$, $i=\overline{1,n}$, и после этого используются в методе анализа иерархий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методе анализа иерархий вводится неоднородная эмпирическая матрица парных сравнений (матрица, произвольный элемент которой может указывать, во сколько (на сколько) один объект лучше (хуже) другого либо не содержать никакой информации об объектах). На основании следующей посылки все не пустые элементы эмпирической неоднородной матрицы парных сравнений содержат информацию (возможно искаженную) о весах объектов (альтернатив, критериев) и должны быть использованы в моделях оптимизации для нахождения этих весов. Введены и обоснованы девять эффективных моделей оптимизации для нахождения весов объектов и предложена процедура получения и обоснования результирующего решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saaty T.L.* Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process, McGraw Hill International. — New York, 1980. Translated to Russian, Portuguese, and Chinese. Revised edition, Paperback. — Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1990, 1996. — 215 p.
2. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе / Под ред. И.А. Ушакова. — М.: Радио и связь, 1991. — 223 с.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process / Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. — М.: Радио и связь, 1993. — 315 с.
4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — Киев: Наук. думка, 2002. — 381 с.
5. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятие решений. — М.: Логос, 2000. — 213 с.
6. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 160 с.
7. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов в методе парных сравнений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 2. — С. 13–21.
8. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій. — Київ: Слово, 2006. — 814 с.

Поступила 24.05.2007