Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 2, 213 – 223

Збіжність косих броунівських рухів з локальними часами в кількох точках, які стягуються в одну

Іван Г. Крикун

(Представлена С. Я. Махном)

Анотація. Отримано умови збіжності в середньому процесів косого броунівського руху з локальними часами в кількох точках, які стягуються в одну граничну точку. Доведено, що граничним процесом також є косий броунівський рух з локальним часом в граничній точці. Знайдено формулу для обчислення коефіцієнту при локальному часі граничного процесу.

2010 MSC. 60F25, 60J55.

Ключові слова та фрази. Стохастичні рівняння, локальний час, косий броунівський рух, збіжність в середньому.

1. Вступ

Розглянемо косий броунівський рух як розв'язок стохастичного рівняння з N локальними часами в точках та з коефіцієнтами, які залежать від параметру n

$$\xi_n(t) = \beta_1(n) L^{\xi_n}(t,0) + \sum_{i=2}^{N} \beta_i(n) L^{\xi_n}(t, a_i(n)) + w(t), \quad t \in [0,T]. \quad (1.1)$$

Досліджується питання про збіжність розв'язків стохастичного рівняння (1.1) за умови, що параметр $n \to \infty$, а коефіцієнти при локальних часах $\beta_i(n)$ прямують при цьому до своїх граничних значень β_i відповідно ($i = 1, ..., N$), а точки $a_i(n)$ прямують до 0 ($i = 2, ..., N$).

В даній роботі розглядається косий броунівський рух, визначений К. Іто і Х. Маккіном [1] і побудований у зв'язку з Феллерівською класифікацією одновимірних дифузійних процесів у термінах

Стаття надійшла в редакцію 01.03.2016

ISSN 1810 – 3200.

еліптичних диференційних операторів другого порядку. В роботах В. Розенкранца [2] та М. І. Портенка [3] косий броунівський рух було отримано як слабку границю певного процесу, коефіцієнт зносу якого прямує до дельта-функції в точці 0. В подальшому косий броунівський рух розглядався у багатьох роботах. Відзначимо роботи таких авторів, як Дж. Харрісон, Л. Шепп [4] та Ж.-Ф. Ле Галл [5], у яких цей процес пов'язаний із розв'язком стохастичного рівняння з локальним часом. У роботі [5], а також у роботах Х.-Й. Енгелберта, В. Шмідта [6], С. Я. Махна [7] запропоновані формули, які пов'язують розв'язки стохастичних рівнянь з локальним часом із розв'язками рівнянь Іто. Детальніший огляд недавніх результатів, численних узагальнень та властивостей косого броунівського руху можна знайти в працях А. Леджея [8], Дж. М. Рамíреса [9].

В книгах М.І. Портенка [10,11] розглядається розв'язки стохастичних рівнянь типу (1.2) як дифузійні процеси у просторі з частково прозорими бар'єрами (напівпрозорими мембранами).

Питання про поведінку часткового випадку процесу (1.1) — косого броунівського руху з двома напівпрозорими мембранами, які стягуються в одну, — тобто процесу виду

$$\xi_n(t) = \beta_1(n)L^{\xi_n}(t,0) + \beta_2(n)L^{\xi_n}(t,a(n)) + w(t), \quad t \in [0,T]. \qquad (1.2)$$

де $a(n) \to 0$ при $n \to \infty$, було розглянуто Л.Л. Зайцевою [12]. Отриманий нею результат співпадає з результатом для аналогічного випадку в даній роботі (див. Приклад 1). В роботі Д. Дередре, С. Маззонетто, С. Рьоллі [13] розглянуто та отримано перехідну щільність косого броунівського руху з двома частково прозорими бар'єрами (та зі зносом, рівним константі).

В недавніх роботах С. Я. Махна [14] та [15] розглянуто питання про граничну поведінку розв'язків стохастичних рівнянь з локальними часами в багатьох точках (з бар'єрами) у випадках коли бар'єри в границі заповнюють певний відрізок [14] і коли бар'єри збігаються в один бар'єр [15]. Рівняння для процесів в [14, 15] є більш загальними, проте в них доведена слабка збіжність до граничного процесу. В даній же роботі вдається довести збіжність в середньому косого броунівського процесу до граничного процесу.

Відомо [4], що при $|\beta_i| > 1$ рівняння (1.1) не має розв'язків. Якщо ж $|\beta_i| = 1$, то ця ситуація згідно [16] відповідає наявності непрозорої мембрани в точці $a_i(n)$. Тому особливий інтерес викликає питання про граничний процес для процесу (1.1) у випадку, якщо $|\beta_i| < 1$, але $\left|\sum_{i=1}^{N} \beta_i\right| \geq 1$. Як показує отриманий результат в даній роботі результат, тоді граничний процес теж буде косим броунівським рухом з коефіцієнтом при локальному часі, що за модулем менший за одиницю. Формула для обчислення згаданого коефіцієнта при локальному часі наведена.

Робота організована таким чином: у наступному розділі 2 наведено позначення та сформульовано основний результат роботи — теорему 1; в розділі 3 доведено теорема 1 та допоміжні леми 1—2. Розділ 4 містить висновки та узагальнення отриманих результатів. В розділі 5 наведено модельні приклади.

2. Основний результат

Введемо позначення. Нехай $I_A(x)$ — індикатор множини A.

При фіксованому n та $|\beta_i(n)| \le 1$ для $i = 1, ..., N$ рівняння (1.1) має єдиний сильний розв'язок [4], [17, теорема II.5.5], тобто на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathsf{P})$ з потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]$ та заданим стандартним одновимірним вінерівським процесом $(w(t), \mathfrak{F}_t)$, існує неперервний семімартингал $(\xi(t), \mathfrak{F}_t)$ такий, що симетричні локальні часи в точках 0 та $a_i(n)$, $i = 2, ..., N$, що задані рівністю

$$L^{\xi_n}(t, b) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{\left(b-\delta, b+\delta\right)}(\xi_n(s)) ds,$$

існують майже напевно і (1.1) виконується майже напевно.

Для косого броунівського руху (1.1) введемо наступну умову.

Умова (I):

I_1. $|\beta_i(n)| < 1$ для всіх n та $i = 1, ..., N$.

I_2. Існують константи β_i такі, що $|\beta_i| < 1$, $i = 1, ..., N$, та

$$\lim_{n \to \infty} \beta_i(n) = \beta_i, \quad i = 1, ..., N.$$

I_3. $a_i(n) > 0$ для всіх n, $\quad i = 2, ..., N$.

I_4. $a_i(n) \ne a_j(n)$ при $i \ne j$ $\quad$ для всіх n, $\quad i, j = 2, ..., N$.

I_5. Для $i = 2, ..., N$ виконується

$$\lim_{n \to \infty} a_i(n) = 0.$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для рівняння (1.1) виконується умова (I). Тоді має місце збіжність при $n \to \infty$ процесів косого броунівського руху* (1.1) *до граничного процесу*

$$\xi(t) = \gamma L^{\xi}(t, 0) + w(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

в середньому рівномірно за часом, тобто має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\big|\xi_n(s)-\xi(s)\big|\Big]=0. \tag{2.4}$$

При цьому коефіцієнт γ при локальному часі граничного процесу $\xi(t)$ знаходиться за формулою:

$$\gamma=\frac{\prod\limits_{i=1}^{N}(1+\beta_i)-\prod\limits_{i=1}^{N}(1-\beta_i)}{\prod\limits_{i=1}^{N}(1+\beta_i)+\prod\limits_{i=1}^{N}(1-\beta_i)}. \tag{2.5}$$

Позначимо $\tanh x$ — тангенс гіперболічний x, $\operatorname{artanh} x$ — гіперболічний ареатангенс (обернений тангенс гіперболічний) x.

Зауваження 1. Коефіцієнт при локальному часі γ граничного процесу можна знайти за такою формулою:

$$\gamma=\tanh\Big(\sum_{i=1}^{N}\operatorname{artanh}\beta_i\Big). \tag{2.6}$$

Ідентичність формул (2.5) і (2.6) доведена в лемі 2 нижче.

Зауваження 2. Нескладно довести, що при виконанні вимоги I_2 коефіцієнт при локальному часі граничного процесу буде обмежений в тих же межах: $|\gamma|<1$.

3. Доведення основного результату

Доведення теореми 1. Доведення полягає в застосуванні результату [5, теорема 3.1] для процесу (1.1).

Справді, в позначеннях [5],

$$\varphi_n(t)\equiv 1,\quad \nu_n(dx)=\beta_1(n)\delta_0(x)dx+\sum_{i=2}^{N}\beta_i(n)\delta_{a_i(n)}(x)dx,$$

таким чином, при виконанні умови (I), φ_n та ν_n належать відповідним класам функцій/мір та є обмеженими так, як вказано в вимогах [5, теорема 3.1].

Далі, в позначеннях [5],

$$f_{\nu_n}(x)=\prod_{y\le x}\frac{1-\nu_n(\{y\})}{1+\nu_n(\{y\})}$$

$$= \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \dfrac{1-\beta_1(n)}{1+\beta_1(n)}, & 0 \le x < a_2(n), \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-\beta_i(n)}{1+\beta_i(n)}, & a_{k-1}(n) \le x < a_k(n), \qquad k = 3, 4, ..., N, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i(n)}{1+\beta_i(n)}, & x \ge a_N(n). \end{cases}$$

Граничними функціями будуть

$$\varphi(t) \equiv 1, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i}{1+\beta_i}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Звідси обмеженою мірою, асоційованою з цією функцією f, буде

$$f'(dx) = \Big(f(0) - f(0-)\Big)\delta_0(x)dx = \left(\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i}{1+\beta_i} - 1\right)\delta_0(x)dx.$$

В підсумку, міра $\nu(dx)$ визначається так

$$\nu(dx) = -\frac{f'(dx)}{f(0)+f(0-)} = \frac{1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i}{1+\beta_i}}{1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i}{1+\beta_i}} \delta_0(x)dx.$$

Таким чином, виконуються всі вимоги [5, теорема 3.1], звідки можемо знайти, що має місце рівність (2.4), де граничний процес $\xi(t)$ має вигляд (2.3) з коефіцієнтом при локальному часі, що знаходиться за формулою

$$\gamma = \frac{1 - \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i}{1+\beta_i}}{1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{N} \frac{1-\beta_i}{1+\beta_i}},$$

з якої нескладно отримати формулу для коефіцієнту при локальному часі граничного процесу (2.5). □

Лема 1. *Коефіцієнт при локальному часі граничного процесу* γ, *визначений формулою* (2.5) *або* (2.6), *може бути знайденим за рекурентною формулою:* $\gamma = \gamma_N$, *де*

$$\gamma_1 = \beta_1, \quad \gamma_i = \frac{\gamma_{i-1} + \beta_i}{1 + \gamma_{i-1}\beta_i}, \qquad i = 2, ..., N. \tag{3.7}$$

Доведення. **1.** Спочатку доведемо лему для величини γ, обчисленої за формулою (2.5). Для спрощення запису позначимо

$$B_k^+ = \prod_{i=1}^{k}(1+\beta_i), \qquad B_k^- = \prod_{i=1}^{k}(1-\beta_i).$$

Тоді формула (2.5) набуде вигляду

$$\gamma = \gamma_N = \frac{B_N^+ - B_N^-}{B_N^+ + B_N^-}.$$

Доведемо тепер лему за індукцією.

Для $k = 1$ твердження леми очевидне, $\gamma_1 = \beta_1$. Доведемо для $k = 2$. Отже, за формулою (2.5)

$$\gamma_2 = \frac{B_2^+ - B_2^-}{B_2^+ + B_2^-} = \frac{(1+\beta_1)(1+\beta_2) - (1-\beta_1)(1-\beta_2)}{(1+\beta_1)(1+\beta_2) - (1-\beta_1)(1-\beta_2)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2};$$

а за формулою (3.7)

$$\gamma_2 = \frac{\gamma_1 + \beta_2}{1 + \gamma_1\beta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}.$$

Отримали однакове значення, отже лема виконується для $k = 2$.

Припустимо, що лема виконується для довільного цілого $k - 1$:

$$\gamma_{k-1} = \frac{B_{k-1}^+ - B_{k-1}^-}{B_{k-1}^+ + B_{k-1}^-}.$$

З формул (2.5), (3.7) маємо

$$\gamma_k = \frac{\gamma_{k-1} + \beta_k}{1 + \gamma_{k-1}\beta_k} = \frac{\frac{B_{k-1}^+ - B_{k-1}^-}{B_{k-1}^+ + B_{k-1}^-} + \beta_k}{1 + \frac{B_{k-1}^+ - B_{k-1}^-}{B_{k-1}^+ + B_{k-1}^-}\beta_k}$$

$$= \frac{B_{k-1}^+ - B_{k-1}^- + \beta_k\Big(B_{k-1}^+ + B_{k-1}^-\Big)}{B_{k-1}^+ + B_{k-1}^- + \beta_k\Big(B_{k-1}^+ - B_{k-1}^-\Big)}$$

$$= \frac{B_{k-1}^{+}\Big(1+\beta_k\Big) - B_{k-1}^{-}\Big(1-\beta_k\Big)}{B_{k-1}^{+}\Big(1+\beta_k\Big) + B_{k-1}^{-}\Big(1-\beta_k\Big)} = \frac{B_k^{+} - B_k^{-}}{B_k^{+} + B_k^{-}},$$

тобто отримали, що твердження леми виконується для k. В силу довільності значення k це закінчує доведення леми для формули (2.5).

2. Доведемо тепер лему для величини γ, обчисленої за формулою (2.6). Для гіперболічного тангенса маємо формулу

$$\tanh(A+B) = \frac{\tanh A + \tanh B}{1 + \tanh A \tanh B}. \tag{3.8}$$

Справді, перетворюючи праву частину, отримаємо

$$\frac{\tanh A + \tanh B}{1 + \tanh A \tanh B} = \frac{\dfrac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}} + \dfrac{e^B - e^{-B}}{e^B + e^{-B}}}{1 + \dfrac{e^A - e^{-A}}{e^A + e^{-A}} \cdot \dfrac{e^B - e^{-B}}{e^B + e^{-B}}}$$

$$= \frac{(e^A - e^{-A})(e^B + e^{-B}) + (e^B - e^{-B})(e^A + e^{-A})}{(e^A + e^{-A})(e^B + e^{-B}) + (e^A - e^{-A})(e^B - e^{-B})}$$

$$= \frac{2\big(e^{A+B} - e^{-A-B}\big)}{2\big(e^{A+B} + e^{-A-B}\big)} = \tanh(A+B).$$

Далі можемо аналогічно попередньому довести за індукцією, зважаючи на те, що для $k=1$ за формулою (2.6)

$$\gamma_1 = \tanh\big(\mathrm{artanh}\ \beta_1\big) = \beta_1,$$

тобто лема має місце для $k=1$; для $k=2$ за формулами (2.6), (3.8)

$$\gamma_2 = \tanh\Big(\mathrm{artanh}\ \beta_1 + \mathrm{artanh}\ \beta_2\Big)$$

$$= \frac{\tanh\big(\mathrm{artanh}\ \beta_1\big) + \tanh\big(\mathrm{artanh}\ \beta_2\big)}{1 + \tanh\big(\mathrm{artanh}\ \beta_1\big)\tanh\big(\mathrm{artanh}\ \beta_2\big)} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}.$$

Отже лема виконується для $k=2$. Зрештою, якщо лема виконується для довільного $k-1$, $k \geq 3$, то з формули (3.8) випливає (3.7) для довільного k. В силу довільності значення k це закінчує доведення леми для формули (2.6). □

Лема 2. *Формули для обчислення коефіцієнту при локальному часі граничного процесу* (2.5) *та* (2.6) *рівносильні.*

Доведення. Твердження леми випливає з леми 1 та рівності γ_1 та γ_2, обчислених за формулами (2.5) та (2.6). □

4. Висновки і узагальнення

Аналіз доведення теореми 1 дає можливість зробити наступні висновки.

Наслідок 1. *Умову I_3 (тобто $a_i(n) > 0$, $i = 2, ..., N$) можна відкинути, обмежившись іншими умовами умови (I). Твердження теореми 1 при цьому залишиться в силі, як і формула для обчислення коефіцієнту при локальному часі граничного процесу* (2.5).

Наслідок 2. *Граничною точкою для послідовності $a_i(n)$ може бути довільна точка α, а не лише точка 0, тобто умову I_5 теж можна послабити. Твердження теореми 1 залишається в силі, як і формула для обчислення коефіцієнту при локальному часі граничного процесу* (2.5).

Наслідок 3. *Теорема 1 має місце і у випадку коефіцієнта дифузії, відмінного від одиниці — для процесу*

$$\xi_n(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i(n) L^{\xi_n}(t, a_i(n)) + \int_0^t \sigma_n(\xi_n(s)) dw(s),\ t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

у якого симетричні локальні часи в точках $a_i(n)$, $i = 1, ..., N$ задані рівністю

$$L^{\xi_n}(t, b) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^t I_{\left(b-\delta, b+\delta\right)}(\xi_n(s)) \sigma^2(\xi_n(s)) ds.$$

Для збіжності процесу (4.9) *до граничного процесу (та для існування сильного розв'язку рівняння (4.9)) потрібно, крім виконання умови (I), щоб коефіцієнт дифузії задовольняв вимоги [5, теорема 3.1], тобто $\sigma_n(x)$ має бути:*
— функцією обмеженої варіації;
— неперервною справа;
— обмеженою та відокремленою від нуля, тобто має існувати константа Λ така, що

$$\frac{1}{\Lambda} \le \sigma_n(x) \le \Lambda;$$

— має існувати функція $\sigma(x)$ така, що

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-K}^{K} |\sigma_n(x) - \sigma(x)| dx = 0 \ \textit{для всіх}\ K > 0.$$

Граничним буде процес

$$\xi(t) = x_0 + \gamma L^{\xi}(t, 0) + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s),\ t \in [0, T]. \quad (4.10)$$

з коефіцієнтом γ, що знаходиться за формулою (2.5) *або* (2.6).

5. Приклади

Приклад 1. Розглянемо косий броунівський рух з двома напівпрозорими мембранами, які стягуються в одну, тобто процес (1.2), і нехай для нього виконується умова (I). Яким буде граничний процес?

Згідно теореми 1 граничним для (1.2) процесом буде

$$\xi(t) = \gamma L^{\xi}(t, 0) + w(t), \ \ t \in [0, T],$$

де коефіцієнт при локальному часі знаходиться за формулою (2.5) так:

$$\gamma = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}. \tag{5.11}$$

Приклад 2. Поставимо задачу: які мають бути границі коефіцієнтів β_i при локальних часах косого броунівського руху (1.1), щоб коефіцієнт при локальному часі граничного косого броунівського руху (2.3) дорівнював заданому A, де $|A| < 1$?

Зрозуміло, що ця задача може мати не один розв'язок — хоча б тому, що як коефіцієнти при локальних часах дограничного процесу, так і їх кількість можуть бути довільними.

Якщо маємо косий броунівський рух з N локальними часами (1.1) та з рівними коефіцієнтами при локальних часах $\beta_i = \beta$, де $|\beta| < 1$, для $i = 1, ..., N$, то зручніше користуватися формулою (2.6):

$$A = \tanh(N \operatorname{artanh} \beta);$$

$$N \operatorname{artanh} \beta = \operatorname{artanh} A;$$

$$\operatorname{artanh} \beta = \frac{\operatorname{artanh} A}{N}.$$

Звідки можемо отримати остаточну формулу для граничного значення коефіцієнтів при локальних часах:

$$\beta = \tanh\left(\frac{\operatorname{artanh} A}{N}\right).$$

Розглянемо окремо найпростіший варіант — косий броунівський рух з двома локальними часами (1.2) та з однаковими коефіцієнтами при локальних часах: $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, де $|\beta| < 1$. Тоді для знаходження коефіцієнту β зручніше скористатися формулою (5.11):

$$\frac{2\beta}{1 + \beta^2} = A.$$

Нескладний аналіз отриманого квадратного відносно β рівняння показує, що граничне значення для коефіцієнтів при локальних часах дограничного косого броунівського руху має бути таким:

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{1 - A^2}}{A}.$$

Подяка

Автор висловлює вдячність анонімному рецензенту за ретельне вивчення тексту та корисні зауваження, які допомогли покращити статтю.

Література

[1] K. Ito, H. McKean, *Brownian motions on a half line* // Illinois J. Math., **7** (1963), issue 2, 181–231.

[2] W. A. Rosenkrantz, *Limit theorems for solutions to a class of stochastic differential equations* // Indiana University Mathematics Journal, **24(7)** (1975), 613–625.

[3] N. I. Portenko, *Generalized diffusion processes* // Proceedings of the Third Japan—USSR Symposium on Probability Theory, Springer Berlin Heidelberg, 1976, 500–523.

[4] J. M. Harrison, L. A. Shepp, *On skew Brownian moution* // The Annals of Probability, **9** (1981), №2, 309–313.

[5] J.-F. Le Gall, *One-dimensional stochastic equations involving the local times of the unknown process* // Lecture Notes in Mathematics, **1095** (1983), 51–82.

[6] H.-J. Engelbert, W. Schmidt, *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations, III* // Math. Nachr., **151** (1991), issue 1, 149–197.

[7] С. Я. Махно, *Гранична теорема для стохастичних рівнянь з локальним часом* // Теорія ймовірностей та математична статистика, **64** (2001), 106–109.

[8] A. Lejay, *On the constructions of the skew Brownian motion* // Probab. Surv., **3** (2006), 413–466.

[9] J. M. Ramirez, *Multi-skewed Brownian motion and diffusion in layered media* // Proc. Amer. Math. Soc., **139(10)** (2006), 3739–3752.

[10] М. І. Портенко, *Дифузія у середовищах з напівпрозорими мембранами*, К., Інститут математики НАН України, 1994.

[11] М. І. Портенко, *Процеси дифузії у середовищах з мембранами*, К., Інститут математики НАН України, 1995.

[12] L. L. Zaitseva, *Wiener process with two partly reflecting membranes* // Abstracts of International Gnedenko conference, June 3–7, 2002, Kyiv, (2002), p. 241.

[13] D. Dereudre, S. Mazzonetto, S. Roelly, *An explicit representation of the transition densities of the skew Brownian motion with drift and two semipermeable barriers* // (2015), arXiv preprint arXiv:1509.02846.

[14] С. Я. Махно, *Диффузионные процессы в композитных средах* // Теорія ймовірностей та математична статистика, **94** (2016), 130–142.

[15] S. Ya. Makhno, *One-dimensional stochastic equations in layered media with semipermeable barriers* // Random Oper. Stoch. Equ., **24** (2016), issue 3, 165–171.

[16] Н. И. Портенко, *Обобщенные диффузионные процессы*, К., Наукова думка, 1982, 208 с.

[17] С. Я. Махно, *Стохастические уравнения. Предельные теоремы.* Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика", Т. **6**, К., Наукова думка, 2012, 434 с.

Відомості про авторів

Іван Григорович Крикун

Первомайський політехнічний інститут
НУК ім. адмірала Макарова,
м. Первомайськ, Україна
&
Інститут прикладної математики
і механіки НАН України,
Слов'янськ, Україна
E-Mail: iwanko@i.ua