Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 2, 157 – 166

О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей

Инна Я. Дворак

(Представлена В.Я. Гутлянским)

Аннотация. В данной работе изучается одна из классических проблем геометрической теории функций об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

2010 MSC. 30C75.

Ключевые слова и фразы. Внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.

1. Обозначения и определения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например, [1–5]). Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z, a)$ области B соотношением

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, a) + o(1), z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Систему точек $A_n := \{\ a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1, n}\}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$.

Введем обозначения $P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi} \arg \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

Статья поступила в редакцию 15.06.2016

Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в [2, с. 48–50], [4, с. 120]. Пусть $\zeta = \pi_k(w)$ обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача об экстремизации функционала

$$I_n(\gamma) = [r\left(B_0, 0\right)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \tag{1}$$

при $\gamma > 0$, $n \geqslant 2$, на множестве всех систем взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n+1}$, таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $0 \in B_0 \in U[1, 6, 7]$.

Отметим, что если области B_k, $k = \overline{1, n}$, симметричны относительно окружности $|a_k| = 1$ и область $B_0 \subset U$, то с помощью не сложных преобразований задачу об экстремизации функционала (1) (см. [3, с. 59]) можно привести к изучению следующего функционала

$$J_n\left(\frac{\gamma}{2}\right) = r^{\gamma/2}\left(B_0, 0\right) r^{\gamma/2}\left(B_\infty, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right).$$

В данной работе получены оценки функционала $J_n(\gamma)$ на более широком интервале значений параметра γ, по сравнению с работами [2–5, 8, 9].

3. Результаты и доказательства

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $0 < \delta \leqslant \delta_n$, $\delta_2 = 0,73$, $\delta_3 = 1,41$, $\delta_4 = 2,29$, $\delta_5 = 3,36$, $\delta_6 = 4,62$, $\delta_n = 0,08\,n^2$, $n \geqslant 7$. *Тогда для любой* n*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $0 \in B_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *причем области* B_k *обладают симметрией относительно окружности* $|a_k| = 1$ *при всех* $k = \overline{1, n}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\delta}\left(B_0, 0\right) r^{\delta}\left(B_\infty, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant r^{\delta}\left(\Lambda_0, 0\right) r^{\delta}\left(\Lambda_\infty, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(\Lambda_k, \lambda_k\right),$$

где области Λ_0, Λ_∞, Λ_k, *и точки* 0, ∞, λ_k, $k=\overline{1,n}$, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+(2n^2-2\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим введенную ранее систему функций $\zeta=\pi_k(w)=-i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k=\overline{1,n}$. Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначает область плоскости ζ, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1}:=B_1$, $\pi_n(a_{n+1}):=\pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta=0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Семейство $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^n$ является результатом разделяющего преобразования произвольной области B_∞ относительно семейств $\{P_k\}_{k=1}^n$ и $\{\pi_k\}_{k=1}^n$ в точке $\zeta=\infty$. Обозначим $\pi_k(a_k):=\omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}):=\omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}):=\omega_n^{(2)}$. Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(1)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_k|,\quad w\to a_k,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)-\omega_k^{(2)}|\sim\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|w-a_{k+1}|,\quad w\to a_{k+1},\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to 0,\quad w\in\overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)|\sim|w|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad w\to \infty,\quad w\in\overline{P_k}.$$

Тогда, используя соответствующие результаты работ [2, 3], имеем неравенства

$$r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)},\omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

$$r\left(B_0,0\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

$$r\left(B_{\infty},\infty\right)\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (3)–(5) полностью описаны в работе [2, с. 29]. На основании этих соотношений получаем неравенство

$$J_n(\delta)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\frac{\delta\alpha_k^2}{2}}\left(\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^2(|a_k||a_{k+1}|)^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, из последнего соотношения имеем

$$J_n(\delta)\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\delta\alpha_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $|\omega_k^{(1)}|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}|=|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Каждое выражение, стоящее в фигурных скобках последнего неравенства, является значением функционала

$$W_\tau=\left[r\left(B_0,0\right)r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\tau^2}r\left(B_1,a_1\right)r\left(B_2,a_2\right) \tag{6}$$

на системе неналегающих областей $\{\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)},\Omega_k^{(\infty)}\}$, и соответствующей системе точек $\{0,\omega_k^{(1)},\omega_k^{(2)},\infty\}$ $(k=\overline{1,n})$. На основании утверждения работы [3, с. 60] и инвариантности функционала (6) получаем оценку

$$W_\tau\leqslant\Phi(\tau),\quad \tau\geqslant 0,$$

где $\Phi(\tau)=\tau^{2\tau^2}\cdot|1-\tau|^{-(1-\tau)^2}\cdot(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тогда

$$J_n(\delta)\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\sqrt{\delta}\right)\left[\prod_{k=1}^{n}\Phi(\tau_k)\right]^{1/2}$$

$$=\delta^{-\frac{n}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\tau_k^{2\tau_k^2+2}\cdot|1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2}\cdot(1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\tau_k=\sqrt{\delta}\cdot\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$. Пусть

$$S(x)=x^{2x^2+2}\cdot|1-x|^{-(1-x)^2}\cdot(1+x)^{-(1+x)^2}\quad\text{и}\quad\Psi(x)=\ln(S(x)).$$

$S(x)$ — логарифмически выпуклая функция на промежутке $[0, x_0]$, где $x_0 \approx 0,88441$.

Далее, аналогично [3, 6], рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} S(x_k) \longrightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\delta}, \quad x_k = \alpha_k \sqrt{\delta}.$$

Пусть $X^{(0)} = \left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ — произвольный экстремальный набор точек выше указанной задачи. Следуя работе [6], имеет место соотношение

$$\Psi'(x_1^{(0)}) = \Psi'(x_2^{(0)}) = \ldots = \Psi'(x_n^{(0)}), \tag{7}$$

где $\Psi'(x) = 4x\ln(x) - 2(x-1)\ln|x-1| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$ (см. Рис. 1).

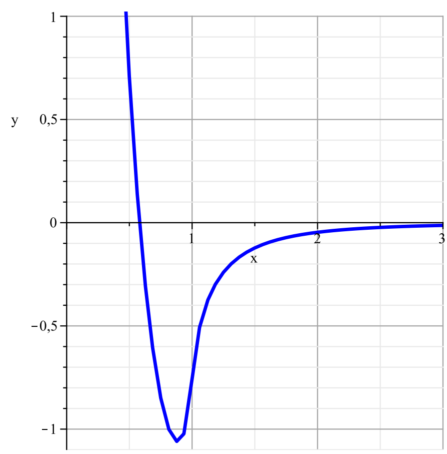

Рис. 1: График функции $y = \Psi'(x)$

На основании соотношения (7), аналогично [6], докажем, что $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)}$.

Пусть $\Psi'(x) = t$, $y_0 \leqslant t < 0$, $y_0 \approx -1,06$. Найдем решение уравнения $\Psi'(x) = t_k$, $k = \overline{1,53}$. Для $\forall t_k \in [y_0, 0)$ уравнение имеет два решения: $x_1(t) \in (0, x_0]$, $x_2(t) \in (x_0, \infty]$. Рассмотрим следующие значения t: $t_1 = -0,02$, $t_2 = -0,04$, $t_3 = -0,06$, $t_4 = -0,08$, $\cdots$, $t_{52} = -1,04$, $t_{53} = y_0$. Непосредственные вычисления представлены в таблицах, приведенных ниже.

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$3x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$5x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
1	-0,02	0,584192	2,607677					
2	-0,04	0,586996	2,095431	2,679623	3,263814	3,848006	4,432198	5,016389
3	-0,06	0,589833	1,849825	2,436820	3,023816	3,610811	4,197807	4,784802
4	-0,08	0,592706	1,696659	2,286492	2,876325	3,466159	4,055992	4,645825
5	-0,1	0,595614	1,588941	2,181647	2,774353	3,367059	3,959765	4,552470
6	-0,12	0,598559	1,507710	2,103324	2,698938	3,294553	3,890167	4,485781
7	-0,14	0,601542	1,443586	2,042145	2,640704	3,239263	3,837823	4,436382
8	-0,16	0,604564	1,391304	1,992846	2,594388	3,195930	3,797473	4,399015
9	-0,18	0,607626	1,347643	1,952207	2,556771	3,161335	3,765899	4,370463
10	-0,2	0,610729	1,310499	1,918125	2,525751	3,133377	3,741003	4,348629
11	-0,22	0,613876	1,278433	1,889163	2,499892	3,110622	3,721351	4,332081
12	-0,24	0,617066	1,250421	1,864297	2,478172	3,092048	3,705924	4,319799
13	-0,26	0,620302	1,225709	1,842775	2,459841	3,076906	3,693972	4,311038
14	-0,28	0,623585	1,203729	1,824031	2,444333	3,064634	3,684936	4,305238
15	-0,3	0,626917	1,184045	1,807630	2,431215	3,054799	3,678384	4,301969
16	-0,32	0,630299	1,166313	1,793230	2,420146	3,047063	3,673980	**4,300896**
17	-0,34	0,633734	1,150260	1,780559	2,410858	3,041157	3,671456	4,301756
18	-0,36	0,637223	1,135664	1,769398	2,403133	3,036867	**3,670601**	4,304335
19	-0,38	0,640770	1,122345	1,759569	2,396792	3,034016	3,671239	4,308463
20	-0,4	0,644375	1,110153	1,750923	2,391692	3,032462	3,673231	4,314001
21	-0,42	0,648041	1,098962	1,743337	2,387712	**3,032086**	3,676461	4,320835
22	-0,44	0,651772	1,088668	1,736709	2,384750	3,032791	3,680832	4,328873
23	-0,46	0,655569	1,079182	1,730953	2,382725	3,034496	3,686268	4,338039
24	-0,48	0,659437	1,070427	1,725996	2,381565	3,037134	3,692703	4,348272
25	-0,5	0,663378	1,062338	1,721775	**2,381211**	3,040648	3,700084	4,359521
26	-0,52	0,667396	1,054860	1,718238	2,381615	3,044993	3,708370	4,371748
27	-0,54	0,671495	1,047944	1,715340	2,382735	3,050131	3,717527	4,384922

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_k)$	$x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$3x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$	$5x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})$
28	-0,56	0,675680	1,041549	1,713044	2,384539	3,056033	3,727528	4,399023
29	-0,58	0,679954	1,035639	1,711318	2,386998	3,062677	3,738357	4,414037
30	-0,6	0,684325	1,030184	1,710138	2,390093	3,070047	3,750002	4,429956
31	-0,62	0,688797	1,025157	1,709482	2,393807	3,078132	3,762457	4,446782
32	-0,64	0,693377	1,020539	**1,709336**	2,398133	3,086930	3,775727	4,464524
33	-0,66	0,698072	1,016313	1,709690	2,403067	3,096444	3,789820	4,483197
34	-0,68	0,702890	1,012468	1,710540	2,408612	3,106684	3,804755	4,502827
35	-0,7	0,707842	1,008999	1,711889	2,414780	3,117670	3,820560	4,523451
36	-0,72	0,712936	1,005911	1,713753	2,421594	3,129436	3,837277	4,545119
37	-0,74	0,718185	1,003228	1,716163	2,429099	3,142035	3,854971	4,567907
38	-0,76	0,723604	1,001015	1,719200	2,437386	3,155571	3,873756	4,591942
39	-0,78	0,729208	0,999457	1,723061	2,446665	3,170269	3,893874	4,617478
40	-0,8	0,735017	0,997390	1,726598	2,455806	3,185015	3,914223	4,643431
41	-0,82	0,741053	0,994797	1,729814	2,464831	3,199849	3,934866	4,669883
42	-0,84	0,747345	0,991762	1,732815	2,473869	3,214922	3,955976	4,697029
43	-0,86	0,753926	0,988295	1,735640	2,482985	3,230330	3,977675	4,725020
44	-0,88	0,760838	0,984381	1,738307	2,492232	3,246158	4,000084	4,754009
45	-0,9	0,768138	0,979982	1,740820	2,501659	3,262497	4,023335	4,784174
46	-0,92	0,775896	0,975038	1,743176	2,511314	3,279451	4,047589	4,815726
47	-0,94	0,784212	0,969461	1,745356	2,521252	3,297148	4,073044	4,848939
48	-0,96	0,793228	0,963114	1,747326	2,531538	3,315750	4,099961	4,884173
49	-0,98	0,803162	0,955787	1,749015	2,542243	3,335471	4,128699	4,921927
50	-1	0,814378	0,947120	1,750281	2,553443	3,356605	4,159766	4,962928
51	-1,02	0,827585	0,936407	1,750785	2,565162	3,379540	4,193918	5,008295
52	-1,04	0,844608	0,921828	1,749413	2,576998	3,404582	4,232167	5,059751
53	-1,06	0,884406	0,884406	1,729015	2,573623	3,418232	4,262840	5,107448

Учитывая свойства функции $\Psi'(x)$ и условия теоремы, соответственно для $n=\overline{2,6}$, получаем следующие неравенства

$$x_1(t)+x_2(t)\geqslant x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})\geqslant 1,709336>2\sqrt{\delta_2},$$

$$\sum_{k=1}^{3}x_k(t)\geqslant 2x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})\geqslant 2,381211>2\sqrt{\delta_3},$$

$$\sum_{k=1}^{4}x_k(t)\geqslant 3x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})\geqslant 3,032086>2\sqrt{\delta_4},$$

$$\sum_{k=1}^{5}x_k(t)\geqslant 4x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})\geqslant 3,670601>2\sqrt{\delta_5},$$

$$\sum_{k=1}^{6}x_k(t)\geqslant 5x_1(t_k)+x_2(t_{k+1})\geqslant 4,300896>2\sqrt{\delta_6},$$

где $t_k\leqslant t\leqslant t_{k+1}$, $k=\overline{1,52}$. Таким образом, имеем, что для экстремального набора $X^{(0)}$ возможен только случай, когда $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}\in(0,\,x_0]$, $x_0\approx 0,88441$, $n=\overline{2,6}$, и, следовательно, $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\dots=x_n^{(0)}$.

Для произвольного $n\geq 7$ имеет место неравенство

$$(n-1)x_1+x_2>2\sqrt{\delta_n},\quad \delta_n=0,08\,n^2.$$

Отсюда $nx_1+(x_2-x_1)>0,56\,n$. Из графика функции $\Psi'(x)$ следует, что всегда справедливо соотношение $(x_1-0,56)\,n+(x_2-x_1)>0$ для $n\geq 7$. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно.

Пусть

$$min((n-1)x_1+x_2)=\mu_n^0=2\sqrt{\delta_n^0},\quad \delta_n^0=(\mu_n^0/2)^2.$$

Тогда для $\forall\delta\in(0,\delta_n]$ такого, что $\delta_n<\delta_n^0$, выполняется соотношение $\delta<(\mu_n^0/2)^2$. Теорема 1 доказана. $\square$

Согласно теореме 1 имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $0<\delta\leqslant\delta_n$, $\delta_2=0,73$, $\delta_3=1,41$, $\delta_4=2,29$, $\delta_5=3,36$, $\delta_6=4,62$, и $\delta_n=0,08\,n^2$, $n\geqslant 7$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k|=1$, и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $0\in B_0\in U$, $\infty\in B_\infty\in\overline{\mathbb{C}}\backslash U$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, причем области B_k обладают* *симметрией относительно окружности* $|a_k| = 1$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, *справедливо неравенство*

$$r^{\delta}(B_0, 0)\, r^{\delta}(B_{\infty}, \infty) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\delta}(\Lambda_0, 0)\, r^{\delta}(\Lambda_{\infty}, \infty) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_{∞}, Λ_k, *и точки* 0, ∞, λ_k, $k = \overline{1,n}$, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала (2).*

Согласно пункту 2, получаем утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $0 < \gamma \leqslant \gamma_n$, $\gamma_2 = 1,46$, $\gamma_3 = 2,82$, $\gamma_4 = 4,58$, $\gamma_5 = 6,72$, $\gamma_6 = 9,24$ *и* $\gamma_n = 0,16\,n^2$, $n \geqslant 7$. *Тогда для любых различных точек единичной окружности* $|a_k| = 1$, *и любого набора взаимно непересекающихся областей* B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset U$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *причем области* B_k *обладают симметрией относительно окружности* $|a_k| = 1$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, *справедливо неравенство*

$$[r(B_0, 0)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant [r(\Lambda_0, 0)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k),$$

где области Λ_0, Λ_k, *и точки* 0, λ_k, $k = \overline{1,n}$, *есть круговые области и, соответственно, полюсы квадратичного дифференциала (2).*

Литература

[1] Г. П. Бахтина, *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа, Киев, Ин-т матем. АН УССР (1984), 21–27.

[2] В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного* // Успехи мат. наук, **49** (1994), № 1 (295), 3–76.

[3] В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168** (1988), 48–66.

[4] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Владивосток, “Дальнаука” ДВО РАН, 2009, 390 с.

[5] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці ін-ту мат-ки НАНУ, 2008, 308 с.

[6] Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности* // Дальневосточный матем. сборник, **2** (1996), 96–98.

[7] Л. В. Ковалев, *О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей* // Изв. вузов. Серия Математика, **6** (2000), 80–81.

[8] Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с концевыми областями в структуре траекторий* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, **168** (1988), 98–113.

[9] Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы* // Зап. научн. семин. ПОМИ, **276** (2001), 253–275.

[10] М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений* // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5** (1934), 159–245.

[11] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М., Наука, 1966, 628 с.

[12] Дж. А. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., Издательство иностр.лит., 1962, 256 с.

Сведения об авторах

Инна Ярославовна Дворак — Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

E-Mail: dvorakinna@gmail.com