УДК 517.54

©2016. **А. Л. Таргонский**

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА РАВНОУГОЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТОЧЕК ДЛЯ ЧАСТИЧНО НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ И ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ

Результаты этой работы получены в хорошо известном направление геометрической теории функций комплексного переменного – экстремальным задачам на классах непересекающихся областей. Его начало положено с классической работы Лаврентьева [1], в которой, в частности, был впервые решена задача о произведении конформных радиусов двух непересекающихся областей. Сейчас этот раздел геометрической теории функций комплексного переменного испытывает активное развитие. Основные классические результаты можно найти в работах [2]–[13]. Результаты этой работы усиливают некоторые результаты работы [7].

Ключевые слова: *внутренний радиус области, квадратичный дифференциал, кусочно-разделяющее преобразование, функция Грина, равноугольная система точек, логарифмическая емкость, вариационная формула, неналегаюшие области, открытое множество, частично неналегаюшие области.*

1. Основные определения.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множество натуральных, действительных и комплексных чисел, соответственно, и $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек

$$A_{n,2m-1} = \{a_{k,p} \in \mathbb{C} : k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,2m-1}\},$$

будем называть $(n, 2m-1)$-равноугольной системой точек на лучах, если для всех $k = \overline{1,n}$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} &0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,2m-1}| < \infty; \\ &\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,2m-1} = \tfrac{2\pi}{n}(k-1). \end{aligned} \tag{1}$$

Также, введем в рассмотрение следующую систему угловых областей:

$$P_k = \{w \in \mathbb{C} : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Обозначим два “управляющих”, функционала для произвольной $(n, 2m-1)$-равноугольной системы точек на лучах

$$M\left(A^{(1)}_{n,2m-1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \chi\left(\left|a_{k,2p-1}\right|^{\frac{n}{2}}\right) \cdot |a_{k,2p-1}|,$$

The author is grateful to Prof. A. Bakhtin for suggesting problems and useful discussions. This research is partially supported by Grant of Ministry of Education and Science of Ukraine (Project No. 0115U003027).

$$M\left(A^{(2)}_{n,2m-1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1}\chi\left(\left|a_{k,2p}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\cdot|a_{k,2p}|,$$

где $\chi(t)=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$, $t\in\mathbb{R}_+$.

Пусть D, $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ – произвольное открытое множество и $w=a\in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту множества D, которая содержит точку a. Для произвольной системы точек $(n,2m-1)$ и открытого множества D, $A_{n,2m-1}\subset D$ обозначим через $D_k\left(a_{s,p}\right)$ связную компоненту множества $D\left(a_{s,p}\right)\bigcap\overline{P_k}$, которая содержит точку $a_{s,p}$, $k=\overline{1,n}$, $s=k,k+1$, $p=\overline{1,2m-1}$, $a_{n+1,p}:=a_{1,p}$. Обозначим $D_k(0)$ (соответственно $D_k(\infty)$) связную компоненту множества $D(0)\bigcap\overline{P_k}$ (соответственно $D(\infty)\bigcap\overline{P_k}$), содержащую точку $w=0$ (соответственно $w=\infty$).

Будем говорить, что открытое множество D, $\{0,\infty\}\cup A_{n,2m-1}\subset D$ удовлетворяет условие неналегания относительно системы точек $\{0,\infty\}\cup A_{n,2m-1}$ если:

$$\left[D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k+1,p})\right]\bigcup\left[D_k(0)\bigcap D_k(a_{k,p})\right]\bigcup\left[D_k(0)\bigcap D_k(\infty)\right]\bigcup$$

$$\bigcup\left[D_k(\infty)\bigcap D_k(a_{k,p})\right]\bigcup\left[D_k(\infty)\bigcap D_k(a_{k+1,p})\right]\bigcup\left[D_k(0)\bigcap D_k(a_{k+1,p})\right]\bigcup$$

$$\bigcup\left[D_k(a_{k,s})\bigcap D_k(a_{k,u})\right]\bigcup\left[D_k(a_{k+1,s})\bigcap D_k(a_{k+1,u})\right]=\varnothing, \tag{2}$$

$k=\overline{1,n}$, $p,s,u=\overline{1,2m-1}$, $s\neq u$ для всех углов $\overline{P_k}$.

Систему областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $k=\overline{1,n}$, будем называть системой частично неналегающих областей, если

$$D:=\bigcup_{k=1}^{n}B_k, \tag{3}$$

и открытое множество D, удовлетворяет условие неналегания (2).

Пускай $r(B;a)$ — внутренний радиус области $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a\in B$ (см. [4–7, 14]).

2. Результаты.

Предметом изучения данной работы являются следующие задачи.

Задача 1. Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$. Определить максимум функционала

$$J=\left(r\left(D,0\right)\cdot r\left(D,\infty\right)\right)^{\frac{n^2\alpha}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(D,a_{k,2p-1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1}r^{\alpha}\left(D,a_{k,2p}\right),$$

где $A_{n,2m-1}$ – произвольная $(n,2m-1)$-равноугольная система точек, удовлетворяющая соотношению (1), D – произвольное открытое множество, удовлетворяющее соотношению (2), $0,\infty,a_{k,p}\in D\subset\overline{\mathbb{C}}$, и определить все экстремали ($k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,2m-1}$).

Задача 2. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Определить максимум функционала

$$J = \left(r\left(B_0, 0\right) \cdot r\left(B_\infty, \infty\right)\right)^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^\beta\left(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha\left(B_{k,2p}, a_{k,2p}\right),$$

где $A_{n,2m-1}$ – произвольная $(n, 2m-1)$-равноугольная система точек, удовлетворяющая соотношению (1), $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$ – произвольная система частично неналегающих областей, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, и определить все экстремали $(k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1})$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. *Тогда для произвольной* $(n, 2m-1)$*-равноугольной системы точек, удовлетворяющей условию* (1), *и произвольного открытого множества* D, *удовлетворяющего условию неналегания* (2) *относительно системы точек* $\{0, \infty\} \cup A_{n,2m-1}$, $0, \infty, a_{k,p} \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, *справедливо неравенство*

$$\left(r\left(D, 0\right) \cdot r\left(D, \infty\right)\right)^{\frac{n^2\alpha}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^\beta\left(D, a_{k,2p-1}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1} r^\alpha\left(D, a_{k,2p}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2mn}\right)^{nm(\alpha+\beta)} \cdot \left(M\left(A^{(1)}_{n,2m-1}\right)\right)^\beta \cdot \left(M\left(A^{(2)}_{n,2m-1}\right)\right)^\alpha \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha^\alpha}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{\frac{mn}{2}}.$$

Равенство достигается в неравенстве, когда открытое множество

$$D = \bigcup_{k,p} B_{k,p} \cup B_0 \cup B_\infty,$$

точки $a_{k,p}$ *и области* $B_0, B_\infty, B_{k,p}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2}\left(1+w^n\right)^{2m-2} \times$$

$$\times \frac{(\beta-\alpha)\left(\left(1-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m} + \left(1+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m}\right) - 2(\beta+\alpha)\left(1+w^n\right)^{2m}}{\left(\left(1-iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m} - \left(1+iw^{\frac{n}{2}}\right)^{4m}\right)^2} dw^2. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. *Тогда для произвольной* $(n, 2m-1)$*-равноугольной системы точек, удовлетворяющей условию* (1), *и произвольной системы частично неналегающих областей* $\{B_0, B_{k,p}, B_\infty\}$, *удовлетворяющей условию* (3), $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m-1}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$,

$\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$(r(B_0,0)\cdot r(B_\infty,\infty))^{\frac{n^2\alpha}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\beta}(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1})\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1} r^{\alpha}(B_{k,2p},a_{k,2p})\leq$$

$$\leq\left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\cdot\left(\frac{1}{2mn}\right)^{nm(\alpha+\beta)}\cdot\left(M\left(A^{(1)}_{n,2m-1}\right)\right)^{\beta}\cdot\left(M\left(A^{(2)}_{n,2m-1}\right)\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha^{\alpha}}{|\sqrt{\alpha}-1|^{|\sqrt{\alpha}-1|^2}|\sqrt{\alpha}+1|^{|\sqrt{\alpha}+1|^2}}\right)^{\frac{mn}{2}}.$$

Равенство в этом неравенстве достигается, когда точки $a_{k,p}$ *и области* B_0, B_∞, $B_{k,p}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* (4).

3. Доказательства.

Доказательство теоремы 1. Сразу отметим, что из условия неналегания следует, что cap $\overline{\mathbb{C}}\backslash D>0$ и множество D имеет обобщенную функцию Грина $g_D(z,a)$, где $g_D(z,a)=\begin{cases} g_{D(a)}(z,a),\ z\in D(a),\\ 0,\ z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D(a)},\\ \lim\limits_{\zeta\to z} g_{D(a)}(\zeta,a),\ \zeta\in D(a), z\in\partial D(a)\end{cases}$ – обобщенная функция Грина множества D относительно точки $a\in D$, и $g_{D(a)}(z,a)$ – функция Грина области $D(a)$ относительно точки $a\in D(a)$.

Далее, мы будем использовать методы работ [6, 7, 9]. Введем в рассмотрение следующие множества $E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D$; $\overline{U}_t=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|\leqslant t\}$, $\Delta_t=\left\{w\in\mathbb{C}:\ |w|\geqslant\frac{1}{t}\right\}$, $E(a_{k,p},t)=\{w\in\mathbb{C}:\ |w-a_{k,p}|\leqslant t\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,2m-1}$, $n\geqslant 3$, $n,m\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$. Для достаточно малых $t>0$ определим конденсатор

$$C(t,\,D,\,A_{n,2m-1})=\left\{E_0,\,\overline{U}_t,\,\Delta_t,\,E_1,\,E_2\right\},$$

$E_1=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m}E(a_{k,2p-1},t)$, $E_2=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m-1}E(a_{k,2p},t)$. Емкостью конденсатора $C(t,\,D,\,A_{n,2m-1})$ мы назовем величину (см. [5, 7])

$$\mathrm{cap}C(t,\,D,\,A_{n,2m-1})=\inf\int\int\left[(G'_x)^2+(G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по всем непрерывным и липшицевым в $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $G=G(z)$, таким, что $G\Big|_{E_0}=0$, $G\Big|_{E_1}=\sqrt{\beta}$, $G\Big|_{E_2}=\sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{\overline{U}_t}=\frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$, $G\Big|_{\Delta_t}=\frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$.

Будем называть модулем конденсатора величину

$$|C|=[\mathrm{cap}C]^{-1}.$$

Согласно теореме 1 [6] имеем

$$|C\,(t,D,A_{n,2m-1})\,| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{n\,(\alpha\,(n+2m-2)+2m\beta)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{n,2m-1})+$$
$$+o(1),\qquad t\to 0, \tag{5}$$

где

$$M(D,A_{n,2m-1}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{n^2\cdot(\alpha\,(n+2m-2)+2m\beta)^2}\cdot\Big[\frac{\alpha n^2}{4}\log r(D,0)+$$
$$+\frac{\alpha n^2}{4}\log r(D,\infty)+\frac{\alpha n^2}{2}g_D(0,\infty)+n\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(g_D(0,a_{k,2p-1})+g_D(\infty,a_{k,2p-1})\right)+$$
$$+n\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m-1}\left(g_D(0,a_{k,2p})+g_D(\infty,a_{k,2p})\right)+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m-1}\log r(D,a_{k,2p})+$$
$$+\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,2p-1})+\beta\sum_{(k,2p-1)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p-1},a_{q,2s-1})+$$
$$+\alpha\sum_{(k,2p)\neq(q,2s)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s})+2\sqrt{\alpha\beta}\sum_{(k,2p)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s-1})\Big]. \tag{6}$$

Функция
$$z_k(w)=(-1)^k\,i\cdot w^{\frac{n}{2}},$$
реализует однолистное и конформное отображение области P_k на правую полуплоскость $\mathrm{Re}z>0$.

Тогда функция
$$\zeta_k(w):=\frac{1-z_k(w)}{1+z_k(w)} \tag{7}$$
отображает однолистно и конформно область P_k на единичный круг $U=\{z:\,|z|\le 1\}$, $k=\overline{1,n}$.

Очевидно, что $\zeta_k\,(0)=1$, $\zeta_k\,(\infty)=-1$, $k=\overline{1,n}$.

Определим $\omega^{(1)}_{k,p}:=\zeta_k\,(a_{k,p})$, $\omega^{(2)}_{k-1,p}:=\zeta_{k-1}\,(a_{k,p})$, $a_{n+1,p}:=a_{1,p}$, $\omega^{(2)}_{0,p}:=\omega^{(2)}_{n,p}$, $\zeta_0:=\zeta_n$ $(k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,2m-1})$.

Согласно формуле (7), получаем следующие асимптотические соотношения

$$\Big|\zeta_k(w)-\zeta_k(a_{k,p})\Big|\sim\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(\Big|a_{k,p}\Big|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}\cdot|w-a_{k,p}|,$$
$$w\to a_{k,p},\quad w\in\overline{P}_k.$$
$$\Big|\zeta_{k-1}(w)-\zeta_{k-1}(a_{k,p})\Big|\sim\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(\Big|a_{k,p}\Big|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}\cdot|w-a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}, \quad k = \overline{1,n}, p = \overline{1,2m-1}, \tag{8}$$

$$\left|\zeta_k(w) - 1\right| \sim 2|w|^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0,\, w \in \overline{P}_k,\, k = \overline{1,n}$$

$$\left|\zeta_k(w) + 1\right| \sim 2|w|^{-\frac{n}{2}}, \quad w \to \infty,\, w \in \overline{P}_k,\, k = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Пусть, также, множество $\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}$ является связной компонентой $\zeta_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащей точку $\omega_{k,p}^{(1)}$, а $\mathbf{\Omega}_{k-1,p}^{(2)}$ – связной компонентой $\zeta_{k-1}\left(D \bigcap \overline{P}_{k-1}\right) \bigcup \left(\zeta_{k-1}\left(D \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, содержащей точку $\omega_{k-1,p}^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,2m-1}$, $\overline{P}_0 := \overline{P}_n$, $\mathbf{\Omega}_{0,p}^{(2)} := \mathbf{\Omega}_{n,p}^{(2)}$. Отметим, что $\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(s)}$ вообще говоря, многосвязные области, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,2m-1}$, $s = 1, 2$. Пара областей $\mathbf{\Omega}_{k-1,p}^{(2)}$ и $\mathbf{\Omega}_{k,p}^{(1)}$ является результатом кусочно-разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейства углов $\{P_{k-1}, P_k\}$, $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ в точке $a_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,2m-1}$. Пусть $\mathbf{\Omega}_k^{(0)}$ – связная компонента $\zeta_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащая точку 1, $k = \overline{1,n}$; $\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)}$ – связная компонента $\zeta_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащая точку -1, $k = \overline{1,n}$. Семейство областей $\left\{\mathbf{\Omega}_k^{(0)}\right\}_{k=1}^n$ является результатом кусочно-разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейства углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точке $w = 0$, $k = \overline{1,n}$; семейство областей $\left\{\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)}\right\}_{k=1}^n$ является результатом кусочно-разделяющего преобразования открытого множества D относительно семейства углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точке $w = \infty$, $k = \overline{1,n}$.

Рассмотрим конденсаторы

$$C_k\left(t,\, D,\, A_{n,2m-1}\right) = \left(E_0^{(k)},\, \overline{U}_t^{(k)},\, \Delta_t^{(k)},\, E_1^{(k)},\, E_2^{(k)}\right),$$

где

$$E_s^{(k)} = \zeta_k\left(E_s \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left[\zeta_k\left(E_s \bigcap \overline{P}_k\right)\right]^*,$$

$$\overline{U}_t^{(k)} = z_k\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P_k}\right) \bigcup \left\{z_k\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P_k}\right)\right\}^*,$$

$$\Delta_t^{(k)} = z_k\left(\Delta_t \bigcap \overline{P_k}\right) \bigcup \left\{z_k\left(\Delta_t \bigcap \overline{P_k}\right)\right\}^*,$$

$k = \overline{1,n}$, $s = 0, 1, 2$, $\{P_k\}_{k=1}^n$ – система углов, соответствующая системе точек $A_{n,2m-1}$. Пусть операция $[A]^*$, определяет множество $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, симметричное множеству A относительно единичной окружности $|w| = 1$. Из этого следует, что конденсатору $C\left(t,\, D,\, A_{n,2m-1}\right)$, при кусочно-разделяющем преобразовании относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$, соответствует множество конденсаторов $\{C_k\left(t,\, D,\, A_{n,2m-1}\right)\}_{k=1}^n$, симметричных относительно $\{z : |z| = 1\}$. Согласно результатам работ [6, 7, 9], получаем, что

$$\mathrm{cap} C\left(t, D, A_{n,2m-1}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cap} C_k\left(t, D, A_{n,2m-1}\right). \tag{10}$$

Отсюда следует, что

$$|C(t, D, A_{n,2m-1})| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k(t, D, A_{n,2m-1})|^{-1}\right)^{-1}. \tag{11}$$

Формула (5) выражает асимптотику модуля конденсатора $C(t,\, D,\, A_{n,2m-1})$ при $t \to 0$. Используя соотношения (8), (9) и тот факт, что множество D удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек $A_{n,2m-1}$, для конденсаторов $C_k(t, D, A_{n,2m-1})$, $k = \overline{1,n}$, мы получим аналогичные асимптотические представления

$$|C_k(t, D, A_{n,2m-1})| =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\alpha(2m+n-2)+2m\beta)}\log\frac{1}{t} + M_k(D, A_{n,2m-1}) + o(1), \quad t \to 0, \tag{12}$$

где

$$M_k(D, A_{n,2m-1}) = \frac{1}{2\pi(\alpha(2m+n-2)+2m\beta)^2}\cdot\left[\alpha\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_k^{(0)}, 1\right)}{2} + \right.$$

$$+\beta\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2p-1}^{(1)}, \omega_{k,2p-1}^{(1)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-1}} + \alpha\sum_{p=1}^{m-1}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2p}^{(1)}, \omega_{k,2p}^{(1)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-1}} +$$

$$+\alpha\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)}, -1\right)}{2} + \beta\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2t-1}^{(2)}, \omega_{k,2t-1}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2t-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2t-1}|\right]^{-1}} +$$

$$\left. +\alpha\sum_{t=1}^{m-1}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2t}^{(2)}, \omega_{k,2t}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2t}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2t}|\right]^{-1}}\right], \qquad k = \overline{1,n}.$$

С помощью (12), мы получаем

$$|C_k(t, D, A_{n,2m-1})|^{-1} = \frac{2\pi(\alpha(2m+n-2)+2m\beta)}{\log\frac{1}{t}}\times$$

$$\times\left(1 + \frac{2\pi(\alpha(2m+n-2)+2m\beta)}{\log\frac{1}{t}}M_k(D, A_{n,2m-1}) + o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{2\pi(\alpha(2m+n-2)+2m\beta)}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi(\alpha(2m+n-2)+2m\beta)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 M_k(D, A_{n,2m-1}) +$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right), \qquad t \to 0. \tag{13}$$

Используя соотношение (13), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,2m-1}\right)\right|^{-1}=\frac{2\pi n\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)}{\log\frac{1}{t}}-$$

$$-\left(\frac{2\pi\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m-1}\right)+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right),\quad t\to 0. \tag{14}$$

В свою очередь (14), позволяет получить следующее асимптотическое равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k\left(t,D,A_{n,2m-1}\right)\right|^{-1}\right)^{-1}=\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi n\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)}\times$$

$$\times\left(1-\frac{2\pi\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)}{n\log\frac{1}{t}}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m-1}\right)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi n\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)}+\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m-1}\right)+o(1),\qquad t\to 0. \tag{15}$$

Неравенства, (10) и (11), принимая во внимания (5) и (15), дают возможность заметить, что

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n\left(\alpha\left(n+2m-2\right)+2m\beta\right)}\cdot\log\frac{1}{t}+M(D,A_{n,2m-1})+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\log\frac{1}{t}}{\pi n\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)}+\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m-1}\right)+o(1). \tag{16}$$

Из соотношения (16), при $t\to 0$, мы получаем, что

$$M(D,A_{n,2m-1})\leqslant\frac{2}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}M_k\left(D,A_{n,2m-1}\right). \tag{17}$$

Используя формулы (6), (12) и (17) имеем, что

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4}{n^2\left(\alpha\left(n+2m-2\right)+2m\beta\right)^2}\cdot\Big[\frac{\alpha n^2}{4}\log r(D,0)+\frac{\alpha n^2}{4}\log r(D,\infty)+$$

$$+\frac{\alpha n^2}{2}g_D(0,\infty)+n\sqrt{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(g_D(0,a_{k,2p-1})+g_D(\infty,a_{k,2p-1})\right)+$$

$$+n\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m-1}\left(g_D(0,a_{k,2p})+g_D(\infty,a_{k,2p})\right)+\alpha\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m-1}\log r(D,a_{k,2p})+$$

$$+\beta\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,2p-1})+\beta\sum_{(k,2p-1)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p-1},a_{q,2s-1})+$$

$$+\alpha\sum_{(k,2p)\neq(q,2s)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s})+2\sqrt{\alpha\beta}\sum_{(k,2p)\neq(q,2s-1)}g_D(a_{k,2p},a_{q,2s-1})\Big]\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi n^2\left(\alpha\left(2m+n-2\right)+2m\beta\right)^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_k^{(0)},1\right)}{2}+\right.$$

$$+\beta\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2p-1}^{(1)},\omega_{k,2p-1}^{(1)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-1}}+\alpha\sum_{p=1}^{m-1}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2p}^{(1)},\omega_{k,2p}^{(1)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-1}}+$$

$$+\alpha\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)},-1\right)}{2}+\beta\sum_{t=1}^{m}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2t-1}^{(2)},\omega_{k,2t-1}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2t-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2t-1}|\right]^{-1}}+$$

$$\left.+\alpha\sum_{t=1}^{m-1}\log\frac{r\left(\mathbf{\Omega}_{k,2t}^{(2)},\omega_{k,2t}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\cdot\chi\left(|a_{k+1,2t}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k+1,2t}|\right]^{-1}}\right]$$

Таким образом, получаем

$$\left(r\left(D,0\right)\cdot r\left(D,\infty\right)\right)^{\frac{n^2\alpha}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(D,a_{k,2p-1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1}r^{\alpha}\left(D,a_{k,2p}\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{nm(\beta+\alpha)}\cdot\left(M\left(A_{n,2m-1}^{(1)}\right)\right)^{\beta}\cdot\left(M\left(A_{n,2m-1}^{(2)}\right)\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[r^{\alpha}\left(\mathbf{\Omega}_k^{(0)},1\right)\cdot\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(\mathbf{\Omega}_{k,2p-1}^{(1)},\omega_{k,2p-1}^{(1)}\right)\cdot\prod_{p=1}^{m-1}r^{\alpha}\left(\mathbf{\Omega}_{k,2p}^{(1)},\omega_{k,2p}^{(1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, r^{\alpha}\left(\mathbf{\Omega}_k^{(\infty)},-1\right)\cdot\prod_{t=1}^{m}r^{\beta}\left(\mathbf{\Omega}_{k,2t-1}^{(2)},\omega_{k,2t-1}^{(2)}\right)\cdot\prod_{t=1}^{m-1}r^{\alpha}\left(\mathbf{\Omega}_{k,2t}^{(2)},\omega_{k,2t}^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство теоремы заканчивается аналогично доказательству теорема 3.3.3 [7]. □

Доказательство теоремы 2. В случае частично неналегающих областей, открытое множество введенное соотношением (3), удовлетворяет условию (2). Тогда, мы имеем

$$B_0,B_{k,p},B_\infty\subset D,\quad k=\overline{1,n},\qquad p=\overline{1,2m-1}.\tag{18}$$

Из (18), используя результаты работ [4, 5, 14], мы получаем

$$r\left(B_0,0\right)\leq r\left(D,0\right),\quad r\left(B_\infty,\infty\right)\leq r\left(D,\infty\right),$$
$$r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leq r\left(D,a_{k,p}\right),\quad k=\overline{1,n},p=\overline{1,2m-1}. \tag{19}$$

Перемножая неравенства (19), можем сделать вывод, что

$$\left(r\left(B_0,0\right)\cdot r\left(B_\infty,\infty\right)\right)^{\frac{n^2\alpha}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1}r^{\alpha}\left(B_{k,2p},a_{k,2p}\right)\leq$$

$$\leq\left(r\left(D,0\right)\cdot r\left(D,\infty\right)\right)^{\frac{n^2\alpha}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r^{\beta}\left(D,a_{k,2p-1}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m-1}r^{\alpha}\left(D,a_{k,2p}\right).$$

При этом, используя теорему 1, получаем окончательный результат. □

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – Т. 5. – С. 159–245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1975. – 11 с.
4. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 168. – С. 48–66.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 1(295). – С. 3–76.
6. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1997. – Т. 237. – С. 56–73.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
8. *Бахтін О. К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 5. – С. 596–610.
9. *Дубинин В. Н.* О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена // Мат. сборник. – 2009. – Т. 200, № 10. – С. 25–38.
10. *Бахтин А. К.,Вьюн В.Е., Трохимчук Ю. Ю.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН Украини. – 2007. – № 8. – С. 7–10.
11. *Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о частично неналегающих областях на римановой сфере // Доп. НАН Украини. – 2008. – № 9. – С. 31–36.
12. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – Т. 276. – С. 253–275.
13. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – Т. 286. – С.103–114.
14. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
15. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
16. *Таргонский А. Л., Таргонская И. И.* Экстремальная задача для открытых множеств в случае безконечно удаленной точки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 102–109.
17. *Таргонський А. Л., Таргонська І. І.* Одна екстремальна задача для функціоналу другого типу у випадку частинно-неперетинних областей // Аналіз та застосування. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 236–242.

18. *Targonskii A., Targonskaya I.* On the One Extremal Problem on the Riemann Sphere // International Journal of Advanced Research in Mathematics. – 2016. – V. 4. – P. 1–7.
19. *Targonskii A.* Extremal problem (2n; 2m-1)-system points on the rays // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2016. – V. 24, № 2. – P. 283–299.
20. *Targonskii A.* On the One Extremal Problem with the Free Poles on the Unit circle // International Journal of Advanced Research in Mathematics. – 2016. – V. 6. – P. 26–31.

A. L. Targonskii

One extremal problem on equiangular systems of points for partially non-overlapping domains and open sets.

Results of this work are received in the well-known direction geometrical theory of functions of the complex variable. It the direction is called – extremal problems on classes the non-overlapping domains. Its beginning is necessary with classical work Lavrentyeva [1] in which, in particular, was put for the first time also the task about work of conformal radiuses of two is solved non-overlapping domains. This section geometric theory function complex variable is experienced by active development now. It is possible to examine the main classical results in works [2]–[13]. Results it was succeeded to receive the strengthening results of work [7] in this work.

Keywords: *inner radius of domain, quadratic differential, piecewise-separating transformation, the Green function, radial systems of points, logarithmic capacity, variational formula, non-overlapping domains, open set, partially non-overlapping domains.*

А.Л. Таргонський

Одна екстремальна задача на рівнокутній системі точок.

Результати цієї роботи отримані у добре відомому напряму геометричної теорії функцій комплексного змінного – екстремальним задачам на класах неперетинних областей. Його початок покладено з класичної роботи Лаврентьєва [1], у якій, зокрема, вперше розв'язана задача о добутку конформних радиусів двох неперетинних областей. Зараз цей розділ геометричної теорії функцій комплексного змінного перебуває у активному розвитку. Основні класичні результати можно знайти у роботах [2]–[13]. Результати цієї роботи посилюють деякі результати робіт [7].

Ключові слова: *внутрішній радіус області, квадратичний диференціал, кусково-поділяюче перетворення, функція Гріна, рівнокутна система точок, логарифмічна ємність, варіаційна формула, неперетинні області, відкрита множина, частинно неперетинні області.*

Житомирский государственный университет им. И. Франка, Житомир
`targonsk@zu.edu.ua`

Получено 15.11.16