УДК 513.83, 517.5

©2016. **Т. М. Осипчук**

ЗАДАЧА О ТЕНИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

В работе исследуется задача о тени, обобщенная на области пространства $\mathbb{R}^2$. Под задачей о тени в $\mathbb{R}^n$ подразумевается нахождение минимального количества шаров, удовлетворяющих некоторым условиям, и таких, что каждая прямая, проходящая через заданную точку, пересечет хотя бы один шар из набора. Доказано, что для того, чтобы создать тень в каждой фиксированной точке произвольной области на плоскости набором замкнутых или открытых не пересекающихся кругов, которые не содержат заданную точку и с центрами на границе области, необходимо и достаточно двух таких кругов.

Ключевые слова: *задача о тени, выпуклость, линейная выпуклость, круг, окружность.*

1. Введение.

В 1982 году Г. Худайбергановым была поставлена задача о тени [8],которая может быть сформулирована следующим образом: *найти минимальное число замкнутых (открытых) шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые попарно не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1} и радиусами, меньше радиуса сферы и таких, что произвольная прямая, проходящая через центр сферы, пересекает хотя бы один из этих шаров.*

Если для m шаров это имеет место, то говорят, что m замкнутых (открытых) шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые попарно не пересекаются, с центрами на сфере S^{n-1} и радиусами, меньшими радиуса сферы *создают тень в центре сферы.*

Эта задача была решена Г. Худайбергановим для случая сферы при $n = 2$: было показано, что для окружности на плоскости достаточно двух кругов [8]. Там же было сделано предположение о том, что и для случая $n > 2$ минимальное число таких шаров равно n. С задачей можно ознакомиться в [1, 2]. Она также интересна с точки зрения выпуклого анализа тем, что является частичным случаем задачи о принадлежности точки обобщенно выпуклой оболочке семьи компактных множеств [2].

В [3] Ю. Зелинский со своими учениками доказал, что для $n = 3$ трех шаров не достаточно, вместе с тем, четыре шара уже будут создавать тень в центре сферы. Там же доказывается, что в общем случае необходимо и достаточно $n + 1$ шара. Таким образом, предположение Г. Худайберганова оказалось ошибочным. В [3] также предложен другой подход к решению задачи для $n = 2$, который дает некоторые числовые оценки радиусов шаров.

В [5] задачу обобщено на произвольную точку внутренности круга для случая $n = 2$. Доказано, что для того, чтобы семья попарно непересекающихся открытых (замкнутых) кругов с центрами на окружности и радиусами, меньшими радиуса окружности, создавала тень в каждой точке внутренности окружности, необходимо и достаточно трех кругов.

Для случая $n > 2$ эта задача остается открытой.

Можно изучать обобщенные задачи о тени, если вместо сферы рассматривать другую поверхность.

В [6, 7] рассматривается вытянутый эллипсоид вращения. Доказано, что для того, чтобы создать тень в центре вытянутого эллипсоида вращения с отношением d большой полуоси к малой строго большим $2\sqrt{2}$ семьей попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров с центрами на эллипсоиде и таких, что не содержат его центр, необходимо и достаточно трех шаров. Для эллипсоидов с $d <= 2\sqrt{2}$ трех шаров не достаточно.

С некоторыми приведенными здесь и другими обобщениями задачи о тени можно ознакомиться также в обзорной работе [4].

2. Основные результаты.

В данной работе задача о тени обобщена с окружности на произвольные области пространства $\mathbb{R}^2$. Рассматриваются круги с центрами на границе данной области, которые попарно не пересекаются, и такие, которые не содержат некоторую фиксированную точку области. Найдено минимальное число таких кругов, для того, чтобы создать тень в каждой фиксированной точке данной области пространства $\mathbb{R}^2$. Для доказательства теоремы используются свойства кругов из задачи о тени для окружности, которые отражены в следующей лемме.

Лемма. *Пусть заданы два замкнутых или открытых круга в пространстве $\mathbb{R}^2$, которые не пересекаются, с центрами на окружности S^1 и радиусами меньше радиуса окружности. Тогда, каждый круг с центром за окружностью, гомотетичный меньшему кругу (в случае, если круги равны — гомотетичный одному из кругов) относительно центра окружности, не пересекает второй круг.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем рассматривать единичную окружность. Обозначим круги, как $B_1(O_1, R)$, $B_2(O_2, r)$ с радиусами R, r и центрами O_1, O_2 соответственно и пусть

$$r \leq R. \tag{1}$$

Пусть расстояние между центрами кругов равно d, тогда, условие о том, что шары не пересекаются, равносильно неравенству

$$r + R \leq d. \tag{2}$$

Дальше будем рассматривать угол α (рис. 1) между отрезком OO_2, что соединяет центры окружности и круга B_2, и между лучом, который выходит из центра окружности и касается круга B_2 в точке A, а также угол φ между отрезком OO_2 и перпендикуляром к d. Случай, когда треугольник O_1OO_2 вырождается в отрезок O_1O_2, не рассматриваем, поскольку он соответствует диаметрально противоположному размещению кругов B_1, B_2, для которых утверждение леммы справедливо. Легко видеть, что $\angle\alpha \leq \angle\varphi$. Действительно, рассмотрим прямоугольные треугольники OAO_2 и ODO_2. Из них $\sin\alpha = r$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}d$. С неравенств (1), (2) вытекает, что $r \le \frac{1}{2}d$, поэтому

$$\sin\alpha \le \sin\varphi,$$

а значит, $\angle\alpha \le \angle\varphi$.

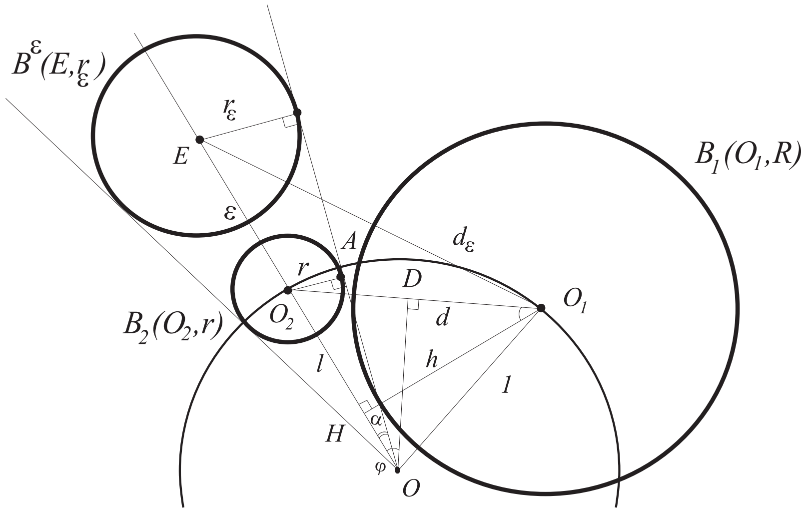

Рис. 1.

Теперь рассмотрим любой круг $B^{\varepsilon}(E, r_{\varepsilon})$ с центром за окружностью в точке E на расстоянии ε от центра круга B_2, гомотетичный кругу B_2 относительно центра окружности O и радиусом r_{ε}. Покажем, что для этого круга справедливо неравенство

$$r_{\varepsilon} + R \le d_{\varepsilon},$$

где d_{ε} — расстояние между центрами кругов B^{ε}, B_1.

Сначала отметим, что из того, что $r_{\varepsilon} = r + \varepsilon\sin\alpha$ и с (2) имеем

$$r_{\varepsilon} + R \le d + \varepsilon\sin\alpha.$$

Дальше, в $\triangle O_1OO_2$ опустим высоту $O_1H = h$ с вершины O_1 на сторону OO_2, тогда $\angle O_2O_1O = \varphi$ и

$$HO_2 = l = d\sin\varphi.$$

Из $\triangle O_1HO_2$

$$d^2 = h^2 + l^2,$$

а из $\triangle O_1HE$ и двух предыдущих формул

$$d_\varepsilon^2 = h^2 + (l+\varepsilon)^2 = d^2 + \varepsilon^2 + 2l\varepsilon = d^2 + \varepsilon^2 + 2d\varepsilon\sin\varphi. \tag{3}$$

Рассмотрим выражение

$$(d+\varepsilon\sin\alpha)^2 = d^2 + \varepsilon^2\sin^2\alpha + 2d\varepsilon\sin\alpha. \tag{4}$$

Из (3), (4) теперь легко видеть, что

$$d + \varepsilon\sin\alpha \le d_\varepsilon,$$

а значит $r_\varepsilon + R \le d_\varepsilon$, что и нужно было показать. Лемму доказано. $\square$

Несложно привести контрпример, для кругов, гомотетичных меньшему кругу относительно центра окружности и с центрами внутри нее.

Следствие 1. Пусть задано два замкнутых или открытых круга в пространстве $\mathbb{R}^2$, попарно не пересекающихся, с центрами на окружности S^1 и радиусами меньше радиуса окружности. Тогда, каждый круг с центром внутри окружности, гомотетичный большему кругу (в случае, если круги равны — гомотетичный одному из кругов) относительно центра окружности, не пересечет второй круг.

Следствие 2. Пусть задано два замкнутых или открытых круга в пространстве $\mathbb{R}^2$, попарно не пересекающихся, с центрами на окружности S^1и радиусами меньше радиуса окружности. Тогда, каждый круг, гомотетичный меньшему кругу (в случае, если круги равны — гомотетичный одному из кругов) относительно центра окружности, с коэффициентом гомотетии k_1, не пересечет каждый круг, гомотетичный большему кругу относительно центра окружности, с коэффициентом гомотетии k_2, если $k_1 \ge k_2$.

Доказательство обоих следствий есть очевидным.

В [2] вводятся множества, подобные выпуклым. Они описываются следующими двумя определениями.

Определение 1. ([2]) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *m-выпуклым относительно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если существует m-мерная плоскость L, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \emptyset$.

Определение 2. ([2]) Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *m-выпуклым* если оно m-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Нетрудно убедиться, что каждое из определений удовлетворяет аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства из семейства таких множеств также удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать минимальное m-выпуклое множество, содержащее E и которое называют m-оболочкой множества E.

Тогда задачу о тени можно рассматривать как частный случай принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров или других множеств.

Далее, под областью будем понимать открытое связное множество.

Теорема. *Для того, чтобы любая фиксированная точка x_0 области $D \subset \mathbb{R}^2$ принадлежала 1-оболочке замкнутых (открытых) кругов, которые попарно не пересекаются, не содержат точку x_0 и с центрами на границе области D, необходимо и достаточно двух таких кругов.*

Доказательство. Рассмотрим окружность S^1 с центром в точке x_0 максимального радиуса, такого, что его внутренность содержится в области D. Тогда, для такой окружности, построим семью из двух замкнутых (открытых) кругов, которые попарно не пересекаются, не содержат точку x_0 и с центрами на окружности так, как это было сделано в [8], при этом, разместим центр большего круга в точке $x \in \partial D \cap S^1$. Теперь, построим круг, гомотетичный меньшему, относительно точки x_0 и с центром на ∂D. Тогда, по лемме 2, этот круг не пересечет больший круг. Очевидно, что для создания тени в точке x_0 одного круга не достаточно. Теорема доказана. □

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — К.: Наукова думка, 1993. — 264 с.
2. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы // Праці Інституту математики НАНУ. — К.: Інститут математики НАНУ. — 2012. — Т. 92. — 280 с.
3. *Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В.* Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 12. — С. 1658–1666.
4. *Зелинский Ю. Б.* Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени // Укр. мат. вiсник. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 278–289.
5. *Зелінський Ю. Б., Стефанчук М. В.* Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. — 2016. — Т.68, № 6. — С. 757 – 762.
6. *Ткачук М. В., Осіпчук Т. М.* Задача о тени для эллипсоида вращения // Зб. праць Ін-ту математики НАНУ. — 2015. — Т. 12, № 4. — С. 246–253.
7. *Tkachuk M., Osipchuk T.* On the shadow problem and its generalizations to ellipsoids // arXiv preprint arXiv:1501.06747, 2015.
8. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 – 85 Деп.

T. M. Osipchuk

On the shadow problem for domains of plane.

In the present work, the problem about shadow, generalized on domains of space $\mathbb{R}^2$ is investigated. Here the shadow problem in $\mathbb{R}^n$ means to find the minimal number of balls satisfying some conditions an such that every line passing through the given point intersects at least one ball of the collection. It is proved that to generate the shadow at every given point of any domain of the plane with collection of mutually non-overlapping closed or open circles which do not hold the point and with centers on the boundary of the domain, it is necessary and sufficient to have two circles.

Keywords: *shadow problem, convexity, linear convexity, circle, circumference.*

Т. М. Осіпчук

Задача про тінь для областей на площині.

У роботі досліджується задача про тінь, узагальнена на області простору $\mathbb{R}^2$. Під задачею про тінь в $\mathbb{R}^n$ тут мається на увазі знаходження мінімального числа куль, що задовільняють деяким умовам, і таких, що кожна пряма, що проходить через дану точку, перетне принаймні одну кулю з набору. Доведено, що для того, щоб створити тінь в кожній фіксованій точці довільної області на площині набором замкнених або відкрити кругів, які не перетинаються, не містять дану точку та з центрами на межі області, необхідно та достатньо двох таких кругів.

Ключові слова: *задача про тінь, опуклість, лінійна опуклість, круг, коло.*

Ин-т математики НАН Украины, Киев
osipchuk@imath.kiev.ua

Получено 08.12.2016