

UDK 517.9

©2016. М. В. Краснощок

ПЕРША ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ

Доведено існування та єдиність класичного розв'язку на довільному відрізку часу першої початково-крайової задачі для квазілінійного рівняння дробової дифузії

Ключові слова: простір Гельдера, похідна дробового порядку, нерухома точка.

1. Формулювання задачі.

Позначимо $Q = (0, 1)$, $\Sigma = \{0\} \cup \{1\}$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \Sigma \times (0, T)$. Через $D_{*,t}^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) позначимо регуляризовану похідну порядку α

$$D_{*,t}^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} (u(x, \tau) - u(x, 0)) d\tau. \quad (1)$$

Розглянемо задачу

$$D_{*,t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + g(u) = f(x, t), \quad Q_T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (3)$$

Припустимо, що функція $g(u)$ задовольняє наступним умовам

$$\begin{aligned} g &\in C^1(\mathbb{R}), \quad |g(u)| \leq l_1(1 + |u|^r), \\ g(u)u &\geq -l_2 + l_3|u|^{r+1}, \quad g'(u) \geq -l_4, \end{aligned} \quad (4)$$

де $l_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, $r \geq 0$.

Рівняння виду (2) мають чисельні застосування при вивченні складних процесів і систем, які характеризуються нелокальністю та довгостроковою пам'яттю (див. [1]–[5]).

Питання розв'язності крайових задач для лінійних і квазілінійних рівнянь з дробовою похідною за часом досліджувалося в роботах [6]–[15]. Наскільки нам відомо, на даний час відсутні результати з класичної розв'язності квазілінійних рівнянь з дробовими похідними для нелінійної нелінійності g .

2. Функціональні простори і основний результат.

Нехай $\theta \in (0, 1)$. Введемо стандартні позначення (див. [16]) $|f|_{Q_T}$, $\langle f \rangle_{x, Q_T}^{(\theta)}$, $\langle f \rangle_{t, Q_T}^{(\theta)}$ для, відповідно, максимуму та сталих Гельдера функції f за змінними x і t з показником θ в області Q_T .

Позначимо

$$|f|_{\alpha, Q_T}^{(\theta)} = |f|_{Q_T} + \langle f \rangle_{x, Q_T}^{(\theta)} + \langle f \rangle_{t, Q_T}^{(\frac{\theta}{2}\alpha)}$$

Визначимо простір $C_\alpha^\theta(Q_T)$ як множину функцій із скінченною нормою $|f|_{\alpha, Q_T}^{(\theta)}$. Простір $C_\alpha^{2+\theta}(Q_T)$, $k \in \mathbb{N}$ визначимо як множину функцій із скінченною нормою

$$|f|_{\alpha, Q_T}^{(2+\theta)} = |f|_{Q_T} + |D_{*,t}^\alpha f|_{\alpha, Q_T}^{(\theta)} + |f_{xx}|_{\alpha, Q_T}^{(\theta)} + \langle f_x \rangle_{t, Q_T}^{((1+\theta)\frac{\alpha}{2})}.$$

Умови сумісності мають вигляд

$$u_0(x) = 0, \quad u_{0,xx}(x) + f(x, 0) - g(0) = 0, \quad x \in \Sigma. \quad (5)$$

Теорема 1. *Нехай $u_0 \in C^{2+\theta}(\Omega)$, $f \in C_\alpha^\theta(\Omega_T)$, $\psi \in C_\alpha^{2+\theta}(\Sigma_T)$, і виконано умови (4), (5). Тоді для довільних функцій існує єдиний розв'язок $u \in C_\alpha^{2+\theta}(\Omega_T)$ задачі (2)–(3).*

3. Допоміжні твердження.

Використовуємо наступні позначення

$$\omega_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (\omega_\alpha * v)(t) = \int_0^t \omega_\alpha(t-\tau)v(\tau)d\tau. \quad (6)$$

Позначимо через $D_t^\alpha u$ дробову похідну Рімана–Ліувіля порядку α

$$D_t^\alpha u(x, t) = \partial_t(\omega_{1-\alpha} * u)(x, t)$$

Регуляризовану дробову похідну запишемо у вигляді

$$D_{*,t}^\alpha u(x, t) = D_t^\alpha(u - u_0)(x, t) = D_t^\alpha u(x, t) - \omega_{1-\alpha}(t)u_0(x)$$

За допомогою Теорема 3.8 з [17], маємо

$$(\omega_\alpha * D_t^\alpha u)(x, t) = u(x, t), \quad (7)$$

для u , таких, що $D_{*,t}^\alpha u(x, t) \in C([0, T])$ для всіх $x \in Q$.

З результатів роботи [13] випливає, що для довільної функції $u \in C_\alpha^{2+\theta}(Q_T)$ при $p = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}$) має місце нерівність

$$pu^{p-1}(x, t)D_t^\alpha u(x, t) \geq D_t^\alpha u^p(x, t) + (p-1)\omega_{1-\alpha}(t)u^p(x, t). \quad (8)$$

Для лінійної задачі

$$D_{*,t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad Q_T, \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T, \quad (10)$$

з результатів роботи [10] випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконано умови сумісності*

$$u_0(x) = 0, \quad -u_{0,xx}(x) = f(x, 0), \quad x = 0, 1,$$

тоді для довільних $f \in C_\alpha^\theta(Q_T)$, $u_0 \in C^{2+\theta}(Q)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_\alpha^{2+\theta}(\Omega_T)$ задачі (9)–(10). Крім того, має місце оцінка

$$|u|_{\alpha, \Omega_T}^{(2+\theta)} \leq C(T) \left(|u_0|_{\Omega}^{(2+\theta)} + |f|_{\alpha, Q_T}^{(\theta)} \right). \quad (11)$$

4. Оцінка максимуму.

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$D_\tau^\alpha u(x, \tau) - u_{xx}(x, \tau) + g(u(x, \tau)) = f(x, \tau) + \omega_{1-\alpha}(\tau)u_0(x), \quad Q_T, \quad (12)$$

Помножимо останнє рівняння на pu^{p-1} . Далі $p = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$ Зазначимо, що

$$p(p-1)u^{p-2}|u_x|^2 \geq \frac{p^2}{4}(u^{\frac{p}{2}-1}u_x)^2 = |(u^{\frac{p}{2}})_x|^2.$$

Скористаємося (8), (4). Отримуємо

$$\begin{aligned} \omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q u^p(x, \tau) dx + D_\tau^\alpha \int_Q u^p(x, \tau) dx + \int_Q |(u(x, \tau)^{\frac{p}{2}})_x|^2 dx + pl_3 \int_Q |u(x, \tau)|^{r+p-1} dx \leq \\ \leq p \int_Q |f(x, \tau)| u^{p-1}(x, \tau) dx + pl_2 \int_Q u^{p-2}(x, \tau) dx + \\ + p\omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q |u_0(x)| u^{p-1}(x, \tau) dx \end{aligned} \quad (13)$$

Оцінимо праву частину (13) за допомогою нерівності Юнга.

$$\begin{aligned} D_\tau^\alpha \int_Q u^p(x, \tau) dx + \int_Q |(u(x, \tau)^{\frac{p}{2}})_x|^2 dx \leq \\ \leq p \int_Q u^p(x, \tau) dx + \int_Q (|f(x, \tau)|^p + 1) dx + \omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q |u_0(x)|^p dx \end{aligned} \quad (14)$$

Далі, нерівність Ніренберга–Гальярдо (див. Теорему 2.2 розділу II в [16]) для функції $v = u^{\frac{p}{2}}$ і нерівність Юнга дозволяють оцінити перший інтеграл в правій частині (14) наступним чином

$$\int_Q u^p(x, \tau) dx \leq \epsilon \int_Q |(u^{\frac{p}{2}}(x, \tau))_x|^2 dx + C\epsilon^{-\frac{1}{2}} \left(\int_Q u^{\frac{p}{2}}(x, \tau) dx \right)^2. \quad (15)$$

Повернемося до (14), враховуючи (15) при $\epsilon = \frac{1}{2p}$

$$D_\tau^\alpha \int_Q u^p(x, \tau) dx \leq Cp^{\frac{3}{2}} \left(\int_Q u^{\frac{p}{2}}(x, \tau) dx \right)^2 + \int_Q (|f(x, \tau)|^p + 1) dx + \omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q |u_0(x)|^p dx.$$

Згортка обох частин останньої нерівності з ω_α приводить до оцінки

$$\int_Q u^p(x, t) dx \leq Cp^{\frac{3}{2}} \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) \left(\int_Q u^{\frac{p}{2}}(x, \tau) dx \right)^2 d\tau + C_T (|f|_{Q_T}^p + |u_0(x)|_Q^p + 1)$$

На наступному кроці, ми добуваємо корінь p з лівої та правої частини останньої нерівності і використовуємо нерівність $(A + B)^{\frac{1}{p}} \leq A^{\frac{1}{p}} + B^{\frac{1}{p}}$, $A, B \geq 0$. В результаті одержуємо

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L_p(Q)} \leq [C_T p^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{p}} (1 + \sup_{Q_T} |f| + \sup_Q |u_0| + \sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L_{\frac{p}{2}}(Q)}). \quad (16)$$

Зазначимо, що при $p = 2$, за допомогою нерівності Коші–Буняковського і нерівності Пуанкаре з (13), можна одержати оцінку

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(Q)} \leq [C_T p^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{p}} (1 + \sup_{Q_T} |f| + \sup_Q |u_0|). \quad (17)$$

Далі, маємо $[C(T)p^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{p}} = [C(T)2^{k\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{2^k}} \leq [2C(T)]^{\frac{3k}{2^{k+1}}}$. Оскільки ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{3k}{2^{k+1}}$ збігається, можна застосувати стандартні ітерації (див., наприклад, [18, 19, 20]) і одержати з (16) та (17) оцінку

$$\sup_{Q_T} |u| \leq M_0 \equiv C \left(\sup_{Q_T} |f| + \sup_Q |u_0| + 1 \right) \quad (18)$$

5. Оцінка максимуму похідної u_x .

Перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$-D_\tau^\alpha u(x, \tau) + u_{xx}(x, \tau) + (g(u) + l_4 u - g(0)) = -f - (l_4 u - g(0)) - \omega_{1-\alpha}(\tau) u_0(x).$$

Помножимо дане рівняння на $p(u_x^{p-1})_x = p(p-1)u_x^{p-2}u_{xx}$. Одержимо

$$\begin{aligned} D_\tau^\alpha \int_Q u_x^p(x, \tau) dx + (p-1) \int_Q u_x^p(x, \tau) \omega_{1-\alpha}(\tau) dx + p(p-1) \int_Q u_x^{p-2}(x, \tau) u_{xx}^2(x, \tau) dx + \\ + p \int_Q (g'(u(x, \tau)) + l_4) u_x^p(x, \tau) dx \leq p \omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q |u_{0,x}| |u_x(x, \tau)|^{p-1} dx + \\ + p(p-1) \int_Q [|f(x, \tau)| + \lambda(l_4 |u(x, \tau)| + l_1)] (u_x(x, \tau))^{p-2} |u_{xx}(x, \tau)| dx = R_1 + R_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Внаслідок нерівності Юнга одержимо

$$R_1 \leq \omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q |u_{0,x}|^p dx + (p-1) \omega_{1-\alpha}(\tau) \int_Q |u_x(x, \tau)|^p dx. \quad (20)$$

Використовуючі послідовно нерівність Коші–Буяковського і нерівність Юнга, одержимо

$$\begin{aligned}
 R_2 &\leq p(p-1)\epsilon \int_Q (u_x(x, \tau))^{p-2} |u_{xx}(x, \tau)|^2 dx + \\
 &+ p(p-1)C_\epsilon \int_Q [|F(x, \tau)|^2 + |u(x, \tau)|^2 + 1] (u_x(x, \tau))^{p-2} dx \leq \\
 &\leq p(p-1)\epsilon \int_Q (u_x(x, \tau))^{p-2} |u_{xx}(x, \tau)|^2 dx + \\
 &+ p(p-1)C_\epsilon \int_Q (u_x(x, \tau))^p dx + p(p-1)C_\epsilon \int_Q [|F(x, \tau)|^p + |u(x, \tau)|^p + 1] dx. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Для оцінки другого інтегралу нам знадобиться нерівність типу Ніренберга–Гальярдо (див. нерівність (2.19), розділ II в [16]) для $v = (u_x)^{\frac{p}{2}}$. За допомогою нерівності Юнга одержимо

$$\int_Q (u_x(x, \tau))^p dx \leq \delta \left(\frac{p^2}{4} \int_Q u_x^{p-2} u_{xx}^2 dx + \int_Q u_x^p dx \right) + C\delta^{-\frac{1}{2}} \left(\int_Q (u_x(x, \tau))^{\frac{p}{2}} dx \right)^2. \quad (22)$$

Збираємо разом оцінки (19)-(22) при $\epsilon = \frac{1}{4}$. Далі помножимо отримане співвідношення на $\omega_\alpha(t - \tau)$ і проінтегруємо по $(0, t)$. У підсумку маємо

$$\begin{aligned}
 &\int_Q (u_x(x, t))^p dx + \frac{3p(p-1)}{4} \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) d\tau \int_Q (u_x(x, \tau))^{p-2} (u_{xx}(x, \tau))^2 dx \leq \\
 &\leq \int_Q (u_{0,x}(x))^p dx + p(p-1)C \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) d\tau \int_Q [|F(x, \tau)|^p + |u(x, \tau)|^p + 1] dx + \\
 &+ \delta p(p-1)C \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) \left(\frac{p^2}{4} \int_Q (u_x(x, \tau))^{p-2} (u_{xx}(x, \tau))^2 dx + \int_Q (u_x(x, \tau))^p dx \right) d\tau + \\
 &+ \delta^{-\frac{1}{2}} p(p-1)C \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) \left(\int_Q (u_x(x, \tau))^{\frac{p}{2}} dx \right)^2 d\tau. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Далі бачимо, що

$$\sup_{(0,T)} \int_Q (u_x(x, t))^p dx + \frac{3p(p-1)}{4} \sup_{(0,T)} \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) d\tau \int_Q (u_x(x, \tau))^{p-2} (u_{xx}(x, \tau))^2 dx \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq p(p-1)C_T \left(|u_{0,x}|_Q^p + |f|_{Q_T}^p + |u|_{Q_T}^p + 1 \right) + \\
 &+ \delta p(p-1) \frac{p^2}{4} C \sup_{(0,T)} \int_0^t \omega_\alpha(t-\tau) \int_Q (u_x(x,\tau))^{p-2} (u_{xx}(x,\tau))^2 dx d\tau + \\
 &+ \delta p(p-1) C_T \sup_{(0,T)} \int_Q (u_x(x,\tau))^p dx + \delta^{-\frac{1}{2}} p(p-1) C_T \sup_{(0,T)} \left(\int_Q (u_x(x,\tau))^{\frac{p}{2}} dx \right)^2. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Обираємо параметр δ за умови

$$\delta C p^2 \leq 2, \quad \delta p(p-1) C_T \leq \frac{1}{2}.$$

Звідси можна вважати, що $\delta = c p^{-2}$ для деякої сталої c . Тоді з (24) випливає

$$\sup_{(0,T)} \int_Q (u_x(x,t))^p dx \leq p^3 C_T \left(|u_{0,x}|_Q^p + |f|_{Q_T}^p + |u|_{Q_T}^p + 1 + \sup_{(0,T)} \left(\int_Q (u_x(x,\tau))^{\frac{p}{2}} dx \right)^2 \right).$$

Неважко помітити, що при $p = 2$ (див. (23)) обчислення дещо спрощуються, тому в даному випадку маємо

$$\sup_{(0,T)} \int_Q (u_x(x,t))^2 dx \leq C_T (|u_{0,x}|_Q^2 + |f|_{Q_T}^2 + |u|_{Q_T}^2 + 1).$$

Знову використовувачи ітерації, одержуємо

$$\sup_{Q_T} |u_x| \leq C(1 + \sup_{Q_T} |f| + \sup_Q |u_0| + \sup_Q |u_{x,0}|) \equiv M_1. \quad (25)$$

6. Гельдеровість розв'язку за часом.

Візьмемо довільні значення $x, y \in Q$. Нехай $h \in (0, 1)$ і $x + h^{\frac{\alpha}{2}} \in Q$. Будемо оцінювати різницю $u(x, t+h) - u(y, t)$.

З інтегральної теореми про середнє випливає, що існує значення $x^* \in [x, x + h^{\frac{\alpha}{2}}]$ таке, що

$$\int_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} (u(z, t+h) - u(z, t)) dz = (u(x^*, t+h) - u(x^*, t)) h^{\frac{\alpha}{2}}.$$

З іншого боку

$$u(z, t) = u(z, 0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} D_{*,s}^\alpha u(z, s) ds$$

і, як наслідок, для довільного $z \in Q$

$$\begin{aligned} u(z, t+h) - u(z, t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [(t-s)^{\alpha-1} - (t+h-s)^{\alpha-1}] D_{*,s}^\alpha u(z, s) ds + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} D_{*,s}^\alpha u(z, s) ds. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} (u(x^*, t+h) - u(x^*, t)) h^{\frac{\alpha}{2}} &= \int_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} (u(z, t+h) - u(z, t)) dz = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [(t-s)^{\alpha-1} - (t+h-s)^{\alpha-1}] \left(\int_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} D_{*,s}^\alpha u(z, s) dx \right) ds + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\alpha-1} \left(\int_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} D_{*,s}^\alpha u(z, s) dx \right) ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Оскільки функція u задовольняє рівняння (2), маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} D_{*,s}^\alpha u(z, s) dx \right| &= \left| \int_x^{x+h^{\frac{\alpha}{2}}} (u_{zz}(z, s) - g(u(z, s)) + f(z, s)) dx \right| \leq \\ &\leq 2M_1 + \sup_{Q_T} |f| + l_1(1 + M_0^r). \end{aligned} \quad (27)$$

З оцінок (26), (27) і Лема 3.3 [21] випливає

$$|(u(x^*, t+h) - u(x^*, t)) h^{\frac{\alpha}{2}}| \leq C(2M_1 + \sup_{Q_T} |f| + l_1(1 + M_0^r)) h^\alpha,$$

і, після скорочення на $h^{\frac{\alpha}{2}}$,

$$|u(x^*, t+h) - u(x^*, t)| \leq C(2M_1 + \|k\|_{L_1(Q)} 2M_1 + \sup_{Q_T} |f| + l_1(1 + M_0^r)) h^{\frac{\alpha}{2}} = Nh^{\frac{\alpha}{2}}$$

Перейдемо до оцінки гельдеровості розв'язку

$$\begin{aligned} |u(x, t+h) - u(y, t)| &\leq |u(x, t+h) - u(x^*, t+h)| + |u(x^*, t+h) - u(x^*, t)| + |u(x^*, t) - u(y, t)| \leq \\ &\leq M_1|x - x^*| + Nh^{\frac{\alpha}{2}} + M_1|x^* - y|. \end{aligned}$$

Розглянемо три можливості: а) $y \geq x^*$, тоді $|y - x^*| \leq |y - x|$; б) $x \leq y < x^*$, тоді $|y - x^*| < h^{\frac{\alpha}{2}}$; в) $y < x$, тоді $|y - x^*| \leq |x - y| + h^{\frac{\alpha}{2}}$. Підсумовуючі наведені вище міркування, бачимо, що

$$|u(x, t + h) - u(y, t)| \leq 2M_1(|x - y| + h^{\frac{\alpha}{2}}) + Nh^{\frac{\alpha}{2}} \leq (2M_1 + N)(|x - y| + h^{\frac{\alpha}{2}}). \quad (28)$$

7. Доведення Теорема 1.

Визначимо простір \mathfrak{B}

$$\mathfrak{B} = \{w \in C_\alpha^\theta(Q_T) : w(x, 0) = 0, \text{ при } x \in \Sigma\}.$$

Для довільної функції $w \in \mathfrak{B}$ визначимо u як єдиний розв'язок задачі (див. Теорему 1)

$$D_{*,t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + \sigma g(w) = \sigma f(x, t), \quad Q_T, \quad (29)$$

$$u(x, 0) = \sigma u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (30)$$

Неважко переконатися в тому, що умови сумісності задач (2)–(3) та (29)–(30) співпадають. Таким чином (див. Теорему 2) визначено оператор $\mathcal{T} : w \rightarrow u$.

У свою чергу, рівняння $u = \sigma \mathcal{T}u$ еквівалентно наступній задачі

$$D_{*,t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + \sigma g(u) = \sigma f(x, t), \quad Q_T, \quad (31)$$

$$u(x, 0) = \sigma u_0(x), \quad x \in Q, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (32)$$

Далі, з теореми Арцела–Асколі випливає, що множина

$$K_R = \{u \in C_\alpha^{2+\theta}(Q_T) : |u|_{\alpha, Q_T}^{(2+\theta)} \leq R\}$$

є компактом в просторах $C_\alpha^\theta(Q_T)$ і $C_\alpha^2(Q_T)$, де

$$C_\alpha^2(Q_T) = \{u : |u|_{Q_T} + |u_x|_{Q_T} + |u_{xx}|_{Q_T} + |D_{*,t}^\alpha u|_{Q_T} < \infty\}.$$

Таким чином, оператор \mathcal{T} є компактним і неперервним відображенням банахова простора \mathfrak{B} в себе. З нерівностей (18), (25), (28) бачимо, що існує стала M така, що для всіх $u \in \mathfrak{B}$ і $\sigma \in [0, 1]$, які задовольняють рівняння $u = \sigma \mathcal{T}u$, справедлива нерівність

$$\|u\|_{\mathfrak{B}} < M.$$

Як наслідок Теорема Лере–Шаудера (див. Теорему 11.3 в [22]) маємо, що відображення \mathcal{T} має нерухому точку, отже існує принаймні один розв'язок задачі (2)–(3).

Якщо u_1, u_2 — два розв'язки задачі (2)–(3), тоді $v = u_1 - u_2$ задовольняє співвідношення

$$D_{*,\tau}^\alpha v(x, \tau) - v_{xx}(x, \tau) + (g(u_1) + l_4 u_1 - (g(u_2) + l_4 u_2))(x, \tau) = l_4 v(x, \tau), \quad Q_T, \quad (33)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in Q, \quad v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Sigma_T. \quad (34)$$

Помножимо рівняння (33) на $\omega_\alpha(t - \tau)v(x, \tau)$ і проінтегруємо по області Q_t за змінними x, τ . З урахуванням (7), (8) та припущення (4), одержуємо

$$\int_Q v^2(x, t) dx \leq l_4 \int_0^t \omega_\alpha(t - \tau) d\tau \int_Q v^2(x, \tau) dx.$$

З Леми Гронуола (див. Лему 6.19 в [17]) випливає, що $v(x, t) = 0$ в Q_T . Теорему 1 доведено.

1. *Hilfer R.* Applications of fractional analysis in physics. – World Scientific: Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000. – 560 p.
2. *Тарасов В. Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва–Ижевск: Ижевский институт компьютерных технологий. – 2011.
3. *Langlands T. A. M., Henry B. I.* Fractional chemotaxis diffusion equation // *Phys. Rev. E.* – 2010. – V. 81. – P. 051102.
4. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *J. Phys. A.* – 2004. – V. 37. – P. 161–208.
5. *Weiss M., Hashimoto H., Nilsson T.* Anomalous protein diffusion in living cells as seen by fluorescence correlation spectroscopy // *Biophys. J.* – 2003. – V. 84. – P. 4043–4052.
6. *Eidelman S. D., Kochubei A. N.* Cauchy problem for fractional diffusion equations // *Journal of differential equations.* – 2004. – V. 199. – P. 211–255.
7. *Kemppainen J., Ruotsalainen K.* Boundary Integral Solution of the Time-Fractional Diffusion Equation // *Integr. equ. oper. theory.* – 2009. – V. 64. – P. 239–249.
8. *Clément Ph., Londen S.-O., Simonett G.* Quasilinear evolutionary equations and continuous interpolation spaces // *Journal of differential equations.* – 2004. – V. 196. – P. 418–447.
9. *Kochubei A. N.* Fractional parabolic systems // *Potential analysis.* – 2012. – V. 37. – P. 1–30.
10. *Krasnoschok M., Vasylyieva N.* On a solvability of nonlinear fractional reaction-diffusion system in the Hölder spaces // *Nonlinear Studies.* – 2013. – V. 20. – P. 591–621.
11. *Mophou G. M., N'Guérékata G. M.* On a class of fractional differential equations in a Sobolev space // *Applicable Analysis.* – 2012. – V. 91. – P. 15–34.
12. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.* – 2009. – Т. 73:2. – С. 141–182.
13. *Zacher R.* Quasilinear parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Ph. D. Thesis, Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg. – 2003.
14. *Лопушанская Г. П., Лопушанский А. О., Пасичник Е. В.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций // *Сиб. матем. журн.* – 2011. – Т. 52. – С. 1288–1299.
15. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // *J. Math. Anal. Appl.* – 2011. – V. 382. – P. 426–447.
16. *Ладженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
17. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. – Springer: Berlin, 2010. – 310 p.
18. *Alikakos N.* An Application of the Invariance Principle to Reaction-Diffusion Equations // *Journal of Differential Equations.* – 1979. – V. 33. – P. 201–225.
19. *Rothe F.* Uniform Bounds from Bounded-Functionals in Reaction-Diffusion Equations // *Journal of Differential Equations.* – 1982. – V. 45. – P. 207–233.
20. *Yin H.-M.* The classical solutions for nonlinear parabolic integrodifferential equations // *Journal of Integral Equations and Applications.* – 1988. – V. 1. – P. 249–263.

21. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Наука и техника: Минск, 1987. – 688 с.
22. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 465 с.

М. V. Krasnoschok

On a first initial-boundary problem for an one-dimensional quasilinear fractional diffusion equation.

We prove the existence and the uniqueness of a classical solution to the first initial-boundary problem to quasilinear fractional diffusion equation.

Keywords: Höolder space, fractional derivative, fixed point.

Н. В. Краснощек

Первая начально-краевая задача для одномерного квазилинейного уравнения дробной диффузии.

Доказано существование и единственность классического решения первой начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения дробной диффузии.

Ключевые слова: пространство Гельдера, дробная производная, неподвижная точка.

Ин-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янск
i.amn012@ukr.net

Отримано 20.12.16