

УДК 517.977, 531.36

©2016. В. В. Грушковская, А. Л. Зуев

О ЗАДАЧЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДАННОЙ КРИВОЙ

В статье рассматривается задача приближенного отслеживания траектории для нелинейных систем, векторные поля которых удовлетворяют ранговому условию со скобками Ли первого порядка. Показано, что путем выбора подходящего разбиения кривой поставленная задача может быть сведена к последовательности локальных двухточечных задач управления. Основным результатом работы является построение семейства тригонометрических управлений, обеспечивающих движение системы в сколь угодно малой окрестности заданной кривой. С помощью разложения решений системы в ряд Вольтерры задача нахождения коэффициентов функций управления сведена к решению системы алгебраических уравнений, для которой описаны условия локальной разрешимости. Полученные результаты проиллюстрированы на нескольких примерах.

Ключевые слова: линейные по управлению системы, отслеживание траектории, планирование движения, ранговое условие со скобками Ли, тригонометрические управления.

1. Введение.

Задаче планирования движения посвящено значительное количество исследований, существенное место среди которых занимают работы, направленные на изучение линейных по управлению систем, удовлетворяющих ранговому условию со скобками Ли [18]. В качестве основных классов управлений, использующихся для планирования движения таких систем, можно выделить тригонометрические, полиномиальные и кусочно-гладкие функции. Р. Брокетт доказал, что для канонических систем, удовлетворяющих ранговому условию со скобками Ли первого порядка, минимальными управлениями в смысле L^2 -нормы являются синусоиды [2]. Построение таких управлений также приведено в книге [1]. Этот результат распространен в работе [10] для классов систем в цепочной форме. Похожий метод был также описан в работе [13] для более общих классов линейных по управлению систем. В работе [6], высокочастотные тригонометрические управления применены для вычисления периодических решений задачи планирования движения с обходом препятствий. Кусочно-гладкие функции управления использованы для планирования движения некоторых частных неголономных систем в работе [5], синусоидальные и полиномиальные – в статье [3].

Отметим, что для некоторых классов неголономных систем (в частности, для нильпотентных систем), задача планирования движения может быть решена в явном виде [7]. Для систем, которые могут приведены к нильпотентной форме с помощью преобразований координат, управления, переводящие систему из одного положения в другое, предложены в работе [8]. Для более общего случая в работе [4]

Работа содержит результаты исследований, выполненных в рамках конкурсных проектов Ф63-726, Ф71-19845 ДФФД (Державний фонд фундаментальних досліджень).

описан итеративный метод решения двухточечной задачи управления линейной по управлению системой. Согласно этому методу, функции управления строятся сначала для нильпотентной аппроксимации, а затем применяются к исходной системе. Такие управления считаются изначально заданными, и явные формулы для них не приводятся в цитируемой работе. Итеративный алгоритм для приближенного отслеживания траектории неавтономной системы с тригонометрическими функциями управления предложен в работе [9]. Близость конечного положения системы к цели достигается за счет стремления частот управлений к бесконечности.

Исходя из изученной литературы, можно сделать следующие выводы. Большинство методов, разработанных для планирования движения линейных по управлению систем, применимы только для систем в нильпотентной форме или приводимых к ним, и задействуют дополнительные преобразования координат. Алгоритмы, предложенные для общих неавтономных систем, используют тригонометрические функции управления с частотами, стремящимися к бесконечности при уменьшении радиуса окрестности заданной кривой, что делает их неэффективными с точки зрения практического применения. Кроме того, открытым остается вопрос о разрешимости уравнений, которые определяют параметры управлений в предложенных методах. Таким образом, несмотря на значительное количество исследований по этой теме, разработка конструктивных методов планирования движения для общих классов систем является актуальной задачей.

В данной статье рассматривается задача построения таких функций управления, которые обеспечивали бы движение системы в окрестности заданной траектории. Основу работы составляет идея разложения решений нелинейных систем в ряды, коэффициенты которых могут быть эффективно вычислены. Такая идея была предложена для стабилизации класса линейных по управлению систем, удовлетворяющих ранговому условию со скобками Ли первого [14] и второго [15] порядков. Применение аналогичного метода к приближенному решению двухточечной задачи управления показано в работах [17], [16].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приведена постановка задачи и сформулированы некоторые вспомогательные результаты. Раздел 3 содержит общий результат, позволяющий свести задачу приближенного отслеживания траектории к последовательности двухточечных задач управлений путем выбора подходящего разбиения заданной кривой. Основным результатом работы является построение семейства управлений, обеспечивающих движение системы в сколь угодно малой окрестности заданной кривой. Соответствующая теорема приведена в разделе 3. Полученный подход проиллюстрирован на нескольких примерах в разделе 4.

2. Предварительные построения.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с управлением

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad m < n, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^*$ обозначает фазовый вектор системы, $u = (u_1, \dots, u_m)^* \in \mathbb{R}^m$ – управление, $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – векторные поля системы класса C^2 в области D , $*$ обозначает операцию транспонирования. Предполагается, что векторные поля системы (1) в некоторой подобласти области D удовлетворяют следующему ранговому условию со скобками Ли первого порядка:

$$\text{span} \{f_i(x), [f_{j_1}, f_{j_2}](x), |i = 1, 2, \dots, m, (j_1, j_2) \in S\} = \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где $S \subseteq \{1, 2, \dots, m\}^2$ – некоторое подмножество индексов, $|S| = n - m$, $j_1 < j_2$ для всех $(j_1, j_2) \in S$, $[f_{j_1}, f_{j_2}](x) = \frac{\partial f_{j_2}(x)}{\partial x} f_{j_1}(x) - \frac{\partial f_{j_1}(x)}{\partial x} f_{j_2}(x)$.

Введем следующие обозначения:

$x(t; x^0, u) \in D$ – решение системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^0 \in D$ и управлением $u(t)$, определенное для значений времени $t \in [0, \tau]$;

$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$ – ε -окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$;

$\rho(x, \gamma) = \inf_{y \in \gamma} \|x - y\|$ – расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$;

$B_\varepsilon(\gamma) = \cup_{y \in \gamma} B_\varepsilon(y)$ – ε -окрестность множества $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

В статье рассматривается следующая задача.

Задача приближенного отслеживания траектории:

для заданной кривой $\gamma \subset D$ с начальной x^0 и конечной x^T точками, и для заданного $\varepsilon > 0$, необходимо построить кусочно-гладкое управление $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, с которым соответствующее решение системы (1) удовлетворяет условиям $\|x(T; x^0, u) - x^T\| < \varepsilon$ и $\rho(x(t; x^0, u), \gamma) < \varepsilon$ для всех $t \in [0, T]$.

Исследование такой проблемы проведем в два этапа. В первой части исследования будет доказан общий результат, показывающий, что задача приближенного отслеживания траектории может быть сведена к построению управлений, приближенно решающих двухточечную задачу управления на каждом сегменте разбиения кривой γ с достаточно малым диаметром. Сформулируем эту проблему следующим образом.

Задача (r, θ) -приближенного управления:

для заданных $x^\alpha \in D$, $\varepsilon_0 > 0$, $x^\omega \in B_{\varepsilon_0}(x^\alpha) \subset D$, необходимо построить гладкую функцию управления $u^{x^\alpha x^\omega}(t) \in \mathbb{R}^m$, определенную на $0 \leq t \leq \tau = \tau(x^\alpha, x^\omega)$ и обеспечивающую выполнение следующих условий:

$$\|x(\tau; x^\alpha, u^{x^\alpha x^\omega}) - x^\omega\| \leq r \|x^\alpha - x^\omega\|, \quad (3)$$

$$\|x(t; x^\alpha, u^{x^\alpha x^\omega}) - x^\alpha\| \leq \theta (\|x^\alpha - x^\omega\|) \quad \text{для всех } t \in [0, \tau], \quad (4)$$

с положительной постоянной $r < 1$ и функцией $\theta \in \mathcal{K}$. Напомним, что класс \mathcal{K} функций Хана состоит из непрерывных строго возрастающих функций $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$: $\phi(0) = 0$. Здесь \mathbb{R}^+ обозначает множество всех вещественных неотрицательных чисел.

Разбиение π кривой γ точками $x^j \in \gamma$, $j = 0, 1, \dots, N$, будем определять следующим образом:

$$\pi : x^0 \prec x^1 \prec \dots \prec x^N = x^T,$$

где “ \prec ” обозначает естественный порядок на γ . Введем также следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. π -аппроксимирующим управлением называется функция $u_\pi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданная следующим образом:

$$u_\pi(t) = u^{x^0 x^1}(t) \quad \text{для } t \in [t_0, t_1], \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \tau,$$

$$u_\pi(t) = u^{x^j x^{j+1}}(t - t_j) \quad \text{для } t \in (t_j, t_{j+1}], \quad t_{j+1} = (j + 1)\tau, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где семейство управлений $u^{x^j x^{j+1}}(t)$ ($0 \leq t \leq \tau$) решает задачу (r, θ) -приближенного управления, $T = t_N$, $x_\tau^0 = x^0$, $x_\tau^{j+1} = x(\tau; x_\tau^j, u^{x^j x^{j+1}})$ для $j = 0, 1, \dots, N - 1$ (см. рис. 1).

Во второй части работы будет показано, что кусочно-гладкая функция управления, удовлетворяющая Определению 1, обеспечивает движение системы (1) в окрестности заданной кривой γ , соединяющей точки x^0 и x^T , требуемого радиуса. Таким образом, будет предложен конструктивный метод решения задачи приближенного отслеживания траектории для линейных по управлению систем.

2.2. Вспомогательные результаты

Для построения функций управления, позволяющих перевести систему из начального в заданное положение, будем использовать представление решений системы (1) с допустимым управлением $u(t)$ ($0 \leq t \leq \tau$) с помощью рядов Вольтерры [12]:

$$x(t; x^0, u) = x^0 + \sum_{i=1}^m f_i(x^0) \int_0^t u_i(s) ds + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} \int_0^t \int_0^s u_i(s) u_j(p) dp ds + R(t; x^0, u), \quad t \in [0, \tau],$$

(5)

где $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x}$ обозначает матрицу Якоби, а $R(t; x^0, u)$ – остаточный член ряда Вольтерры. С использованием формулы (5), в работе [17] была доказана теорема о

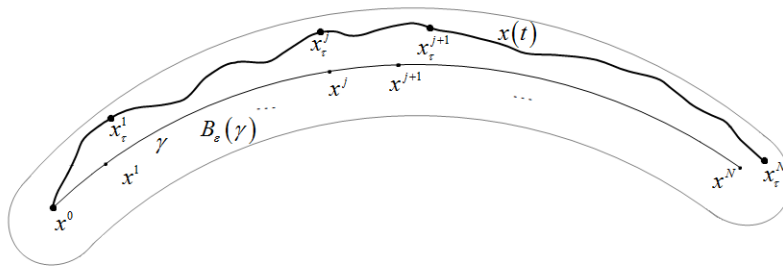


Рис. 1. Приближенное отслеживание траектории.

разрешимости задачи перевода системы (1) из точки $x^\alpha \in D$ в точку $x^\omega \in D$ за время $\tau > 0$, в классе тригонометрических функций управления вида

$$u_k(t) = a_k + \sum_{(i,j) \in S} a_{ij} \left(\delta_{ki} \cos \frac{2\pi K_{ij}t}{\tau} + \delta_{kj} \sin \frac{2\pi K_{ij}t}{\tau} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad t \in [0, \tau], \quad (6)$$

где δ_{ki} – символ Кронекера, числа $K_{ij} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ различны по модулю, т.е.

$$|K_{i_1 j_1}| \neq |K_{i_2 j_2}|, \quad \text{для всех } (i_1, j_1) \in S, (i_2, j_2) \in S, (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2), \quad (7)$$

а коэффициенты a_k, a_{ij}, a_{ijl} удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} x^\omega - x^\alpha = & \tau \sum_{k=1}^m f_k(x^\alpha) a_k + \frac{\tau^2}{4\pi} \sum_{(i,j) \in S_2} [f_i, f_j](x^\alpha) \frac{a_{ij}^2}{K_{ij}} + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^\alpha} a_i a_j \\ & + \frac{\tau^2}{2\pi} \sum_{i < j} [f_i, f_j](x^\alpha) \sum_{(q,r) \in S} \frac{a_{qr}}{K_{qr}} (\delta_{ir} a_j - \delta_{jr} a_i), \end{aligned} \quad (8)$$

с $a = \left(a_k |_{k \in \{1, \dots, m\}}, a_{ij} |_{(i,j) \in S} \right)^* \in \mathbb{R}^n$. Основной результат статьи [17] может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Предположим, что в точке $x = x^\alpha \in D$ выполнено ранговое условие (2), и в некоторой замкнутой окрестности $\bar{B}_\xi(x^\alpha) \subset D$, $\xi > 0$, выполнены следующие неравенства:*

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(x) \right\| \leq M_1, \quad \left\| \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x^2}(x) \right\| \leq M_2, \quad \text{для всех } x \in \bar{B}_\xi(x^\alpha), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ существует такое $\epsilon_0 > 0$, что:

- 1) система алгебраических уравнений (8) разрешима для всех $x^\omega \in B_{\epsilon_0}(x^\alpha)$, при условии, что параметры $K_{ij} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ выбраны в соответствии с (7);
- 2) решение системы (1) с управлениями $u(t)$, заданными формулами (6), (8), удовлетворяет условию

$$x(\tau; x^\alpha, u) = x^\omega + R(\tau; x^\alpha, u),$$

где

$$\|R(\tau; x^\alpha, u)\| \leq \frac{M_0 \tau^3}{6M_1^2} (e^{M_1 U \tau} - 1) \left(M_1^3 \frac{U^2}{\tau} + \sqrt{n} M_0 M_2 (e^{M_1 U \tau} - 1) \frac{U}{\tau^2} \right), \quad (9)$$

$$U = \sup_{t \in [0, \tau]} (|u_1(t)| + \dots + |u_m(t)|), \quad M_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i(x^\alpha)\|.$$

Кроме того, для остаточного члена формулы (5) справедливо неравенство $\|R(t; x^\alpha, u)\| \leq \|R(\tau; x^\alpha, u)\|$ для всех $t \in [0, \tau]$.

Приведем также следующий результат, доказанный в работе [14]:

Лемма 1. Пусть $x(t) \in \tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq \tau$ является решением системы (1) с управлением $u \in C[0, \tau]$, и предположим, что $\|f_i(x') - f_i(x'')\| \leq M_1 \|x' - x''\|$, $M_1 > 0$, для всех $x', x'' \in \tilde{D}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда

$$\|x(t) - x(0)\| \leq \frac{M_0}{M_1} (e^{M_1 \tilde{U} t} - 1), \quad t \in [0, \tau], \quad (10)$$

где $M_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \|f_i(x(0))\|$, $\tilde{U} = \max_{0 \leq t \leq \tau} \sum_{i=1}^m |u_i(t)|$.

3. Решение задачи приближенного отслеживания траектории.

Сформулируем вначале лемму, показывающую, что функция управления, построенная в Определении 1, корректно определена, если диаметр разбиения $\Delta(\pi) = \max_{1 \leq j \leq N} \|x^j - x^{j-1}\|$ достаточно мал. Отметим, что такой результат является достаточно универсальным и применим как к системам вида (1), так и к общему классу систем с управлением вида $\dot{x} = f(x, u)$.

Лемма 2. Пусть задана кривая $\gamma \subset D$ с концами в x^0 и x^T , и пусть положительные числа η, ϵ_0 обеспечивают разрешимость задачи (r, θ) -приближенного управления для всех $x^\alpha \in B_\eta(\gamma) \subset D$ и $x^\omega \in B_{\epsilon_0}(x^\alpha)$ с семейством управлений $\{u^{x^\alpha x^\omega}(\cdot)\}$. Предположим также, что постоянная $r \in (0, 1)$ и функция $\theta \in \mathcal{K}$ в формулах (3), (4) могут быть выбраны независимо от $x^\alpha \in B_\eta(\gamma)$.

Тогда для любых $\epsilon > \epsilon_1 > 0$ существует такое $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\epsilon, \epsilon_1) > 0$, что для любого разбиения $\pi : x^0 \prec x^1 \prec \dots \prec x^N = x^T$ кривой γ с диаметром $\Delta(\pi) < \bar{\Delta}$, соответствующее π -аппроксимирующее управление $u_\pi(t)$ корректно определено для всех $t \in [0, T]$, и справедливы следующие оценки:

$$\|x(t_j; x^0, u_\pi) - x^j\| < \epsilon_1, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\rho(x(t; x^0, u_\pi), \gamma) < \epsilon, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

где t_j и T заданы в Определении 1.

Доказательство. Без ограничения общности будем предполагать, что

$$\epsilon_1 < \min\{\epsilon_0, \eta\}, \quad ; \theta(\epsilon_1) < \epsilon - \epsilon_1. \quad (13)$$

Поскольку непрерывная функция $\theta \in \mathcal{K}$ является строго возрастающей на \mathbb{R}^+ и $\theta(0) = 0$, обратная функция $\theta^{-1}(s)$ определена на некотором полуинтервале $s \in [0, \bar{\epsilon})$, $\bar{\epsilon} \leq +\infty$. Зададим $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\epsilon, \epsilon_1) > 0$ следующим образом:

$$\bar{\Delta} = \begin{cases} \min \left\{ \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \epsilon_1, \epsilon_0 - \epsilon_1 \right\}, & \text{если } \epsilon - \epsilon_1 \geq \bar{\epsilon}, \\ \min \left\{ \left(\frac{1}{r} - 1 \right) \epsilon_1, \epsilon_0 - \epsilon_1, \theta^{-1}(\epsilon - \epsilon_1) - \epsilon_1 \right\}, & \text{если } \epsilon - \epsilon_1 < \bar{\epsilon}. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $\pi : x^0 \prec x^1 \prec \dots \prec x^N = x^T$ является разбиением кривой γ с диаметром $\Delta(\pi) < \bar{\Delta}$. Покажем, что π -аппроксимирующее управление $u_\pi(t)$, введенное в определении 1, корректно определено. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции.

Из формулы (14) вытекает, что $\|x^0 - x^1\| < \bar{\Delta} < \epsilon_0$, следовательно, управление $u_\pi(t) = u^{x^0 x^1}(t)$ корректно определено для всех $t \in [0, t_1]$, $t_1 = \tau(x^0, x^1)$. Обозначим $x_\tau^1 = x(t_1; x^0, u^{x^0 x^1})$. Несложно заметить, что в силу неравенства (3) и формулы (14),

$$\|x_\tau^1 - x^1\| \leq r\Delta(\pi) < r\bar{\Delta} \leq (1-r)\epsilon_1 < \epsilon_1. \quad (15)$$

Предположим, что управление $u_\pi(t)$, построено для $t \in [0, t_j]$, и $x_\tau^j = x(t_j; x^0, u_\pi) \in B_{\epsilon_1}(x^j)$ для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$. Тогда, поскольку $\epsilon_1 < \eta$, управление $\tilde{u}(t) = u^{x_\tau^j x^{j+1}}(t)$ корректно определено на интервале $0 \leq t \leq \tau(x_\tau^j, x^{j+1})$ и

$$\|x_\tau^j - x^{j+1}\| \leq \|x_\tau^j - x^j\| + \|x^j - x^{j+1}\| < \epsilon_1 + \bar{\Delta} \leq \epsilon_0. \quad (16)$$

Продолжим $u_\pi(t)$ на интервал $0 \leq t \leq t_{j+1} = t_j + \tau(x_\tau^j, x^{j+1})$, полагая $u_\pi(t) = \tilde{u}(t - t_j)$ для $t \in (t_j, t_{j+1}]$. Тогда из неравенств (3), (16) и формулы (14) следует оценка расстояния между $x_\tau^{j+1} = x(t_{j+1}; x^0, u_\pi)$ и x^{j+1} :

$$\|x_\tau^{j+1} - x^{j+1}\| \leq r\|x_\tau^j - x^{j+1}\| < r(\epsilon_1 + \bar{\Delta}) \leq \epsilon_1. \quad (17)$$

Применяя такую процедуру для $j = 1, 2, \dots, N-1$, получаем управление $u_\pi(t)$ для всех $t \in [0, T]$, $T = t_N$. В силу того, что $x(t) = x(t - t_j; x_\tau^j, u^{x_\tau^j x^{j+1}})$ для всех $t \in [t_j, t_{j+1}]$, решение $x(t) = x(t; x^0, u_\pi)$ системы (1) корректно определено для $t \in [0, T]$. Неравенство (11) следует из (15), (17).

Осталось показать, что $\rho(x(t), \gamma) < \epsilon$ для всех $t \in [0, T]$. Пусть $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ($0 \leq j \leq N-1$). С помощью неравенства треугольника и неравенств (4), (11), (16) получаем следующую оценку:

$$\rho(x(t), \gamma) \leq \|x(t) - x^j\| \leq \|x(t) - x_\tau^j\| + \|x_\tau^j - x^j\| < \theta(\|x_\tau^j - x^{j+1}\|) + \epsilon_1 < \theta(\epsilon_1 + \bar{\Delta}) + \epsilon_1.$$

Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\theta(\epsilon_1 + \bar{\Delta}) \leq \epsilon - \epsilon_1. \quad (18)$$

Легко видеть, что для $\bar{\epsilon} = \sup_{s \in \mathbb{R}^+} \theta(s) \leq \epsilon - \epsilon_1$ неравенство (18) выполнено с любым $\bar{\Delta} > 0$. В противном случае свойство строгого возрастания функции $\theta \in \mathcal{K}$ на \mathbb{R}^+ приводит к эквивалентному неравенству для (18): $\bar{\Delta} \leq \theta^{-1}(\epsilon - \epsilon_1) - \epsilon_1$. Полученное неравенство справедливо в предположении, что условия (13) выполнены и $\bar{\Delta} > 0$ задано формулой (14). В силу произвольности выбора $0 \leq j \leq N-1$ и $t \in [t_j, t_{j+1}]$, заключаем, что $\rho(x(t), \gamma) < \epsilon$ для всех $t \in [0, T]$. \square

Основным результатом данной работы является следующая теорема, показывающая, что конкатенация функций управления вида (6) решает поставленную задачу приближенного отслеживания траектории.

Теорема 2. Пусть задана кривая $\gamma \subset D$, соединяющая точки x^0 и x^T , и пусть ранговое условие (2) выполнено для всех $x \in \gamma$. Тогда для любых $\tau > 0$ и $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ существует такое $\bar{\Delta} > 0$, что для каждого разбиения $\pi : x^0 \prec x^1 \prec \dots \prec x^N = x^T$ кривой γ с диаметром $\Delta(\pi) < \bar{\Delta}$, соответствующее π -аппроксимирующее управление $u_\pi(t)$ корректно определено для всех $t \in [0, T]$, $T = N\tau$, и выполнены следующие условия:

$$\|x(j\tau; x^0, u_\pi) - x^j\| < \varepsilon_1, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\rho(x(t; x^0, u_\pi), \gamma) < \varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

Здесь управление $u_\pi(t)$ построено по Определению 1, в котором в качестве локальных управлений $u(t) = u^{x^\alpha x^\omega}(t)$ взяты функции вида (6) с коэффициентами, удовлетворяющими системе алгебраических уравнений (8).

Доказательство. Доказательство теоремы будем проводить в несколько этапов, направленных на проверку условий Леммы 2.

I. Вспомогательные построения

В силу принадлежности функций $f_i(x)$ классу $C^2(D)$ и условий доказываемой теоремы, ранговое условие (2) выполнено также в некоторой окрестности кривой γ , то есть существует такое $\eta > 0$, что условие (2) справедливо для всех $x \in \Gamma = \bar{B}_\eta(\gamma) \subset D$. Поскольку Γ является компактным подмножеством D , можно выбрать такое $\xi > 0$, что $D_0 = \bar{B}_\xi(\Gamma) \subset D$. Тогда по теореме Вейерштрасса существуют $M_1, M_2 < \infty$, определяемые следующим образом:

$$M_1 = \max_i \left(\sup_{x \in D_0} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(x) \right\| \right), \quad M_2 = \max_{i,k} \left(\sup_{x \in D_0} \left\| \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial x^2}(x) \right\| \right). \quad (19)$$

Пусть задано разбиение $\pi : x^0 \prec x^1 \prec \dots \prec x^N = x^T$ с диаметром $\Delta(\pi) < \bar{\Delta}$, где $\bar{\Delta} > 0$ подлжит определению.

Рассмотрим последовательность двухточечных задач управления для системы (1) с начальной точкой x^{j-1} , конечной точкой x^j , принадлежащими выбранному разбиению π , и некоторым $\tau > 0$, $j = \overline{1, N}$.

Для применения Леммы 2 необходимо показать, что, во-первых, условия теоремы обеспечивают разрешимость задачи (r, θ) -приближенного управления для каждой начальной точки $x_\tau^{j-1} \in B_\eta(\gamma) \subset D$ и конечной точки $x^j \in B_{\varepsilon_0}(x^{j-1})$ с семейством управлений $\{u^{x_\tau^{j-1} x^j}(\cdot)\}$ вида (6):

$$u_i^{x_\tau^{j-1} x^j}(t) = a_i^j + \sum_{(k,l) \in S} a_{kl}^j \left(\delta_{ik} \cos \frac{2\pi K_{kl}^j t}{\tau} + \delta_{il} \sin \frac{2\pi K_{kl}^j t}{\tau} \right), \quad t \in [(j-1)\tau, j\tau], \quad (20)$$

и во-вторых, постоянная $r \in (0, 1)$ и функция $\theta \in \mathcal{K}$ в формулах (3), (4) с $x^j = x_\tau^{j-1}$, $x^\omega = x^j$ могут быть выбраны для всех j независимо от $x_\tau^{j-1} \in B_\eta(\gamma)$. Введем переменные $\tilde{a}^j = \left(\tilde{a}_i^j \Big|_{i \in \{1, \dots, m\}}, \tilde{a}_{kl}^j \Big|_{(k,l) \in S} \right)^* \in \mathbb{R}^n$ и векторы с натуральными компонен-

тами $K_j^+ = \left(K_{kl}^+ \Big|_{(k,l) \in S} \right)^* \in \mathbb{N}^{|S|}$, где

$$\tilde{a}_i^j = \tau a_i^j \text{ для } i = 1, 2, \dots, m, \quad \tilde{a}_{kl}^j = \frac{\tau^2 a_{kl}^j}{4\pi K_{kl}^j} \text{ для } (k, l) \in S, \quad K_{kl}^{j+} = |K_{kl}^j| \text{ для } (k, l) \in S.$$

II. Разрешимость последовательности задач (r, θ) -приближенного управления

Из доказательства Теоремы 1 (см. [17]) следует, что для разрешимости соответствующей системы (8) в переменных $\tilde{a}^j \in B_d(0)$ с некоторым $d \in (0, 1)$ достаточно выполнения условия

$$\|F^{-1}(x^{j-1})\| \left(C(x^{j-1})d^{3/2} + \|x_\tau^{j-1} - x^j\| \right) < d, \quad (21)$$

где

$$F(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x), [f_{j_1}, f_{l_1}](x), \dots, [f_i, f_j](x^j) \Big|_{(i,j) \in S} \right), \quad (22)$$

а положительная величина $C(x^{j-1})$ определяется из условия

$$\|\Omega(\tilde{a}^j, x^{j-1})\| \leq C(x^{j-1})\|\tilde{a}^j\|^{3/2} \text{ для всех } \tilde{a}^j \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{a}^j\| \leq 1, \quad (23)$$

$\Omega(a, x) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} f_l(x) \tilde{a}_k \tilde{a}_l + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k < l} [f_k, f_l](x) \left(\sum_{(q,k) \in S} \tilde{a}_l \sqrt{\frac{|\tilde{a}_{qk}|}{K_{qk}^+}} - \sum_{(q,l) \in S} \tilde{a}_k \sqrt{\frac{|\tilde{a}_{ql}|}{K_{ql}^+}} \right)$. Введем в рассмотрение постоянные $C_F = \sup_{x \in \Gamma} \|F^{-1}(x)\| > 0$, $C_\Omega = \sup_{x \in \Gamma} C(x) > 0$ и функцию

$$\mu(d) = \frac{d}{C_F} - C_\Omega d^{3/2}.$$

По построению, $\mu(d) > 0$ является строго возрастающей на $d \in (0, d_{max}]$, $d_{max} = \min \left\{ 1, \left(\frac{2}{3C_F C_\Omega} \right)^2 \right\}$. Тогда неравенство (21) выполнено при $\|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \mu(d)$, $d \leq$

1. Более того, в силу строгой выпуклости функции $\mu(d)$ в \mathbb{R}^+ и свойства $\mu(0) = 0$, можно показать, что если

$$\|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \mu(d_{max}), \quad (24)$$

то неравенство (21) выполнено при

$$d = \frac{d_{max}}{\mu(d_{max})} \|x_\tau^{j-1} - x^j\|. \quad (25)$$

III. Выполнение условия (3).

Таким образом доказано, что для каждого $j = \overline{1, N}$ система (8) относительно переменных \tilde{a}^j имеет решение $\tilde{a}^j \in B_d(0)$, где d задано формулой (25). Рассмотрим соответствующие функции управления (20).

Покажем, что для заданного $r \in (0, 1)$ существует такое $\epsilon_0 > 0$, что выполнены условия теоремы и $\|R^j(\tau; x^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1} x^j})\| \leq r \|x_\tau^{j-1} - x^j\|$ при $\|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \epsilon_0$. Тогда будет выполнено неравенство

$$\|x(\tau; x_\tau^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1} x^j}) - x^j\| \leq r \|x_\tau^{j-1} - x^j\|, \text{ для всех } j = \overline{1, N}. \quad (26)$$

Обозначим

$$\bar{U}_j = \left(\sum_{i=1}^m |a_i^j| + \sqrt{2} \sum_{(k,l) \in S} |a_{kl}^j| \right) \tau.$$

Тогда, применяя полученные оценки и неравенство Гёльдера, получаем

$$\bar{U}_j \leq C_1 \|\tilde{a}^j\|^{1/2} \leq C_1 d^{1/2} = \frac{C_1 d_{max}^{1/2} \|x_\tau^{j-1} - x^j\|^{1/2}}{\mu^{1/2}(d_{max})}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (27)$$

где $C_1 = \left(m + 4\pi^{2/3} \sum_{(q,r) \in S} |K_{qr}|^{2/3} \right)^{3/4}$, в предположении, что выполнено условие (24). Кроме того, поскольку $U_j \leq \bar{U}_j/\tau$, оценка (9) может быть записана следующим образом:

$$\|R^j(\tau; x^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1} x^j})\| \leq \phi(\bar{U}_j),$$

где

$$\phi(\bar{U}_j) = \frac{M_0}{6} (e^{M_1 \bar{U}_j} - 1) \left(M_1 \bar{U}_j^2 + \frac{\sqrt{n} M_0 M_2 \bar{U}_j}{M_1^2} (e^{M_1 \bar{U}_j} - 1) \right).$$

Для заданного $r \in (0, 1)$, найдем $\epsilon_0 > 0$, с которым $\phi(\bar{U}_j) \leq r \|x_\tau^{j-1} - x^j\|$ при $\|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \epsilon_0$. Легко видеть, что функция $\phi(\bar{U}_j)$ строго возрастает на \mathbb{R}^+ . Тогда из неравенств (24) и (27) следует, что если

$$\phi \left(\frac{C_1 d_{max}^{1/2} \|x_\tau^{j-1} - x^j\|^{1/2}}{\mu_{x_\tau^{j-1}}^{1/2}(d_{max})} \right) \leq r \|x_\tau^{j-1} - x^j\| < r \mu(d_{max}), \quad (28)$$

то $\phi(\bar{U}_j) \leq r \|x_\tau^{j-1} - x^j\|$. Для выполнения условия (28) достаточно взять в качестве $\bar{\epsilon}_0$ положительный корень уравнения $\frac{1}{\bar{\epsilon}_0} \phi \left(\frac{C_1 d_{max}^{1/2} \bar{\epsilon}_0^{1/2}}{\mu^{1/2}(d_{max})} \right) = r$. Заметим, что при достаточно малых значениях \bar{U}_j ,

$$\phi(\bar{U}_j) = \frac{M_0}{6} (M_1^2 + \sqrt{n} M_0 M_2) \bar{U}_j^3 + O(\bar{U}_j^4),$$

и

$$\bar{\epsilon}_0 \approx \frac{36 \mu_{x^\alpha}^3(d_{max})}{C_1^6 d_{max}^3 M_0^2 (M_1^2 + \sqrt{n} M_0 M_2)^2} r^3 \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Принимая во внимание условие (24), получаем, что для выполнения свойства (26) значение ϵ_0 должно удовлетворять условию $\epsilon_0 < \min\{\bar{\epsilon}_0, \mu(d_{max})\}$. Кроме того, выбирая $\epsilon_0 < \epsilon_{0,1} = \min\{\bar{\epsilon}_0, \mu(d_{max}), \frac{\eta}{\tau}\}$, получим, что $x(\tau; x_\tau^{j-1}, u) \in \Gamma$ для всех $j = \overline{1, N}$, т.е. ранговое условие (2) выполнено в каждой точке $x(\tau; x_\tau^{j-1}, u)$, и можем определить $x_\tau^j := x(\tau; x_\tau^{j-1}, u)$, $j = \overline{1, N}$, $x_\tau^0 := x^0$.

IV. Принадлежность решений множеству D_0 .

Покажем, что $x(t; x_\tau^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1}x^j}) \in D_0$ для $t \in [(j-1)\tau, j\tau]$. Для этого достаточно показать, что

$$\|x(t; x_\tau^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1}x^j}) - x^j\| \leq \xi + \eta \text{ при } \|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \epsilon_0.$$

Зададим в качестве ξ_1 положительный корень уравнения $\phi_1(\xi_1) = \xi$, где

$$\phi_1(\xi_1) = \frac{\xi_1}{6} \ln^2 \left(\frac{M_1 \xi_1}{M_0} + 1 \right) + \frac{\sqrt{n} M_2 \xi_1^2}{M_1} \ln \left(\frac{M_1 \xi_1}{M_0} + 1 \right).$$

Такое ξ_1 всегда существует, поскольку непрерывная функция $\phi_1(\xi_1)$ строго возрастает на \mathbb{R}^+ , равна нулю в нуле, и $\phi_1(\xi_1) \rightarrow \infty$ при $\xi_1 \rightarrow \infty$. Полагая $\epsilon_0 < \epsilon_{0,2} = \frac{\mu(d_{max})}{M_1^2 C_1^2 d_{max}} \ln^2 \left(\frac{M_1 \xi_1}{M_0} + 1 \right)$, получаем из неравенства (27) следующую оценку:

$$\bar{U}_j \leq \frac{1}{M_1} \ln \left(\frac{M_1 \xi_1}{M_0} + 1 \right), \text{ для всех } j = \overline{1, N}. \quad (29)$$

Пусть $\epsilon_0 < \min\{\epsilon_{0,1}, \epsilon_{0,2}\}$. Тогда из Теоремы 1 и оценки (29) следует, что для всех $t \in [(j-1)\tau, j\tau]$,

$$\|x(t; x_\tau^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1}x^j}) - x^j\| \leq R^j(\tau) \leq \phi(\bar{U}_j) \leq \phi_1(\xi_1) = \xi + \eta.$$

V. Выполнение условия (4).

Покажем теперь, что существует такая функция $\theta \in \mathcal{K}$, что

$$\|x(t; x_\tau^{j-1}, u^{x_\tau^{j-1}x^j}) - x^j\| \leq \theta(\|x_\tau^{j-1} - x^j\|) \text{ для } t \in [(j-1)\tau, j\tau], j = \overline{1, N}. \quad (30)$$

при $\|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \epsilon_0$.

В качестве $\theta \in \mathcal{K}$ возьмем

$$\theta(s) = \frac{M_0}{M_1} \left(\exp \left\{ \frac{M_1 C_1 d_{max}^{1/2}}{\mu_{x^\alpha}^{1/2}(d_{max})} s^{1/2} \right\} - 1 \right), \quad (31)$$

где $M_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in \Gamma} \|f_i(x)\| > 0$. Действительно, обозначим $s = \|x_\tau^{j-1} - x^j\| < \epsilon_0$. Тогда из неравенства (27) следует:

$$\bar{U}_j \leq \frac{C_1 d_{max}^{1/2} s^{1/2}}{\mu_x^{1/2}(d_{max})} = \frac{1}{M_1} \ln \left(\frac{M_1}{M_0} \theta(s) + 1 \right).$$

В силу предыдущего шага, можем применить Лемму 1. Тогда

$$\begin{aligned} \|x(t; x_\tau^{j-1}, u) - x^j\| &\leq \frac{M_0}{M_1} (e^{M_1 U_j t} - 1) \leq \frac{M_0}{M_1} (e^{M_1 \bar{U}_j} - 1) \\ &\leq \frac{M_0}{M_1} \left(e^{\ln\left(\frac{M_1}{M_0} \theta(s) + 1\right)} - 1 \right) = \theta(s), \text{ для всех } j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Таким образом, полагая $\epsilon_0 \in \left(0, \min \left\{ \bar{\epsilon}_0, \mu(d_{max}), \frac{\eta}{r}, \frac{\mu(d_{max})}{M_1^2 C_1^2 d_{max}} \ln^2 \left(\frac{M_1 \xi_1}{M_0} + 1 \right) \right\} \right)$, приходим к выводу, что все условия Леммы 2 выполнены, поскольку постоянная $\epsilon_0 > 0$ и функция $\theta \in \mathcal{K}$ не зависят от j . Применение Леммы 2 завершает доказательство теоремы. \square

4. Примеры.

Проиллюстрируем применение предложенного подхода на нескольких примерах.

4.1. Моноцикл. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение моноцикла.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 &= u_2, \end{aligned} \tag{32}$$

где $(x_1, x_2)^* \in \mathbb{R}^2$ задают координаты точки контакта колеса, x_3 – угол между плоскостью колеса и осью x_1 , u_1, u_2 – управления поступательной и угловой скоростями, соответственно. Система (32) удовлетворяет ранговому условию (2) для всех $x \in \mathbb{R}^3$ с $S = \{(1, 2)\}$:

$$\text{span}\{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\} = \mathbb{R}^3 \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, [f_1, f_2](x) = \begin{pmatrix} -\sin x_3 \\ \cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения задачи отслеживания кривой $\gamma \in \mathbb{R}^3$ будем использовать семейство управлений вида (20):

$$\begin{aligned} u_1^{x_\tau^{j-1} x^j}(t) &= a_1^j + a_{12}^j \cos\left(\frac{2\pi k_{12}^j t}{\tau}\right), \\ u_2^{x_\tau^{j-1} x^j}(t) &= a_2^j + a_{12}^j \sin\left(\frac{2\pi k_{12}^j t}{\tau}\right), \quad t \in [(j-1)\tau, j\tau], \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{33}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими системе алгебраических уравнений (8):

$$a_1^j = \frac{1}{\tau} \left((x_1^j - x_{1\tau}^{j-1}) \cos x_{3\tau}^{j-1} - (x_2^j - x_{2\tau}^{j-1}) \sin x_{3\tau}^{j-1} \right), \quad a_2^j = \frac{1}{\tau} (x_3^j - x_{3\tau}^{j-1}),$$

$$a_{12}^j = \begin{cases} a_1^j \pm \sqrt{a_1^j + 2\pi k_{12}^j A^j}, & A^j \neq 0, \\ 0, & A^j = 0, \end{cases}$$

$$A^j = a_1^j a_2^j - \frac{2}{\tau} \left((x_2^j - x_{2\tau}^{j-1}) \cos x_{3\tau}^{j-1} - (x_1^j - x_{1\tau}^{j-1}) \sin x_{3\tau}^{j-1} \right).$$

В качестве примера зададим кривую $\gamma(s) = (\cos s, \sin 2s, \varphi(s))^*$, $s \in [0, 2\pi]$, где $\varphi(s)$ определяется как угол между касательной к плоской кривой $\gamma^1 = (\cos(s), \sin(s))^*$ и Ox_1 с таким разбиением, что $x^j = (\cos \frac{j\pi}{15}, \sin \frac{j\pi}{15}, \varphi(\frac{j\pi}{15}))^*$, $j = 1, N$, $N = 30$, и положим $k_{12}^j = \text{sign} A^j$, $\tau = 1$. Результаты численного интегрирования показывают, что соответствующая траектория системы (33) аппроксимирует кривую $\gamma(s)$ с высокой точностью (см. рис. 2).

4.2. Подводный аппарат

В статье [17] была рассмотрена двухточечная задача управления для системы дифференциальных уравнений, описывающей движение автономного подводного робота:

$$\dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2 + f_3(x)u_3 + f_4(x)u_4, \quad x = (x_1, \dots, x_6)^*, \quad (34)$$

$$f_1(x) = (\cos x_5 \cos x_6, \cos x_5 \sin x_6, -\sin x_5, 0, 0, 0)^*, \quad f_2(x) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^*,$$

$$f_3(x) = (0, 0, 0, \sin x_4 \tan x_5, \cos x_4, \sin x_4 \sec x_5)^*,$$

$$f_4(x) = (0, 0, 0, \cos x_4 \tan x_5, -\sin x_4, \cos x_4 \sec x_5)^*;$$

где x_1, x_2, x_3 обозначают координаты центра масс аппарата, x_4, x_5, x_6 – обобщенные координаты, описывающие его ориентацию (углы Эйлера), управление u_1 задает линейную скорость вдоль направления x_1 , а управления u_2, u_3, u_4 соответствуют компонентам угловой скорости вдоль осей x_1, x_2, x_3 . Такая система была описана, например, в работе [11]. Исключим из рассмотрения множество $x_5 = \pm\pi/2 \pmod{\pi}$. Ранговое условие (2) выполнено в каждой точке области $D = \{x \in \mathbb{R}^6 : -\frac{\pi}{2} < x_5 < \frac{\pi}{2}\}$, поскольку

$$\text{span}\{f_1(x), \dots, f_4(x), [f_1, f_3](x), [f_1, f_4](x)\} = \mathbb{R}^6, \quad \forall x \in D.$$

Следовательно, для выполнения условия (2) достаточно выбрать $S = \{(1, 3), (1, 4)\}$.

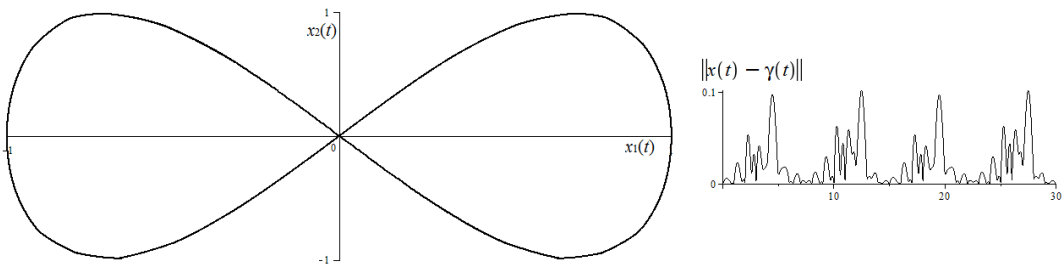


Рис. 2. Слева: траектория системы (32) с семейством управлений вида (35) в переменных $(x_1(t), x_2(t))$; справа: $\|x(t) - \gamma(t)\|$.

Для перевода системы (34) из точки x^0 в окрестность точки x^1 за время τ в работе [17], в соответствии с Теоремой 1, было предложено использовать следующие функции управления:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_1 + a_{13} \cos \frac{2\pi K_{13}}{\tau} t + a_{14} \cos \frac{2\pi K_{14}}{\tau} t, \quad u_2(t) = a_2, \\ u_3(t) &= a_3 + a_{13} \sin \frac{2\pi K_{13}}{\tau} t, \quad u_4(t) = a_4 + a_{14} \sin \frac{2\pi K_{14}}{\tau} t, \end{aligned} \quad (35)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими системе уравнений (8):

$$\begin{aligned} &\tau \sum_{i=1}^4 f_i(x^0) a_i + \frac{\tau^2}{2} \sum_{i,j=1}^4 \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} f_j(x) \Big|_{x=x^0} a_i a_j + \frac{\tau^2}{4\pi} \left(\frac{a_{13}(a_{13} - 2a_1)}{K_{13}} [f_1, f_3](x^0) \right. \\ &\left. + \frac{a_{14}(a_{14} - 2a_1)}{K_{14}} [f_1, f_4](x^0) + 2[f_3, f_4] \left(\frac{a_4 a_{13}}{K_{13}} - \frac{a_3 a_{14}}{K_{14}} \right) \right) = x^1 - x^0. \end{aligned}$$

Согласно Теореме 2, набор таких управлений может также быть применен к решению задачи приближенного отслеживания траектории. Для примера выберем кривую $\gamma(s) = (s \cos s, s \sin s, s, 0, 0, 0)^*$, $s = [0, 4\pi]$, т.е. центр масс аппарата должен двигаться вдоль конической винтовой линии. На рис. 3 показана траектория системы (34) с семейством управлений вида (35), $t = [0, 100]$. Для сравнения, рассмотрим два разбиения: с $x^j = (\frac{j\pi}{25} \cos(\frac{j\pi}{25}), \frac{j\pi}{25} \sin \frac{j\pi}{25}, \frac{j\pi}{25}, 0, 0, 0)^*$, $j = [1, 100]$, и с $x^j = (\frac{j\pi}{50} \cos(\frac{j\pi}{50}), \frac{j\pi}{50} \sin \frac{j\pi}{50}, \frac{j\pi}{50}, 0, 0, 0)^*$, $j = [1, 200]$. Легко видеть, что выбор меньшего диаметра разбиения приводит к уменьшению диаметра окрестности кривой $\gamma(s)$, в которой движется система, что также следует из доказательства Теоремы 2.

Выводы.

В данной работе предложен метод решения задачи планирования движения линейных по управлению систем в произвольно малой окрестности заданной кривой. Показано, что посредством выбора подходящего разбиения кривой, задача приближенного отслеживания заданной траектории может быть сведена к набору

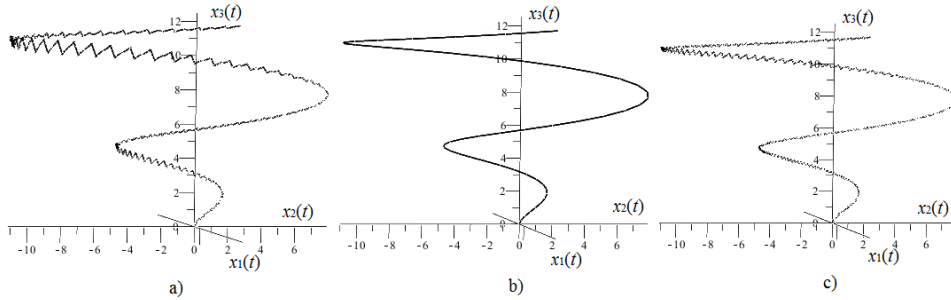


Рис. 3. а), с): траектории системы (34) с семейством управлений вида (35) в переменных $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ с разбиением кривой γ на 100 и 200 сегментов, соответственно; б): заданная кривая γ .

двухточечных задач управления. Для решения таких задач построено семейство тригонометрических управлений с коэффициентами, удовлетворяющими системе алгебраических уравнений второго порядка. В отличие от большинства существующих результатов вычислительного характера, доказана сходимости полученного алгоритма синтеза управлений. К дальнейшим преимуществам данного метода по сравнению с описанными во введении работами можно отнести следующие: полученный управляющий алгоритм не требует никаких априорных оценок или дополнительных преобразований, таких как приведение системы к нильпотентной или цепочной форме, построение базиса Холла и, таким образом, применим к более широкому классу систем. Результаты численного интегрирования, полученные для нескольких модельных систем, иллюстрируют достаточно высокую точность предложенного подхода.

Отметим, что представленный метод синтеза функций управления может быть также использован в ряде других задач, таких как планирование движения систем со сносом, а также стабилизации неголономных систем в окрестности заданной кривой.

1. Bloch A. Nonholonomic Mechanics and Control. – New-York: Springer, 2003. – 484 p.
2. Brockett R. W. Control theory and singular Riemann geometry // New Directions in Applied Mathematics (P.J. Hilton, G.S. Young, eds.). – Berlin: Springer-Verlag, 1981. – P. 11–27.
3. Bushnell L. G., Tilbury D., Sastry S. S. Steering three-input chained form nonholonomic systems using sinusoids: The firetruck example. – Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1992.
4. Chitour Y., Jean F., Long R. A global steering method for nonholonomic systems // Journal of Differential Equations. – 2013. –Vol. 254. – P. 1903–1956.
5. Chumachenko T., Zuyev A. Application of the return method to the steering of nonlinear systems // Robot Motion and Control 2009. – Springer London, 2009. – C. 83–91.
6. Gurvits L., Li Z. X. Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning // Nonholonomic motion planning. – Springer US, 1993. – C. 53–108.
7. Jean F. Control of Nonholonomic Systems: from Sub-Riemann Geometry to Motion Planning. – Cham: Springer, 2014. – 102 p.
8. Lafferriere G., Sussmann H.J. Motion planning for controllable systems without drift // Proc. 1991 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. – 1991. – Vol. 2. – P. 1148–1153.
9. Liu W. An approximation algorithm for nonholonomic systems // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1997. – Vol. 35. – P. 1328–1365.
10. Murray R. M., Sastry S. S. Steering nonholonomic systems using sinusoids // Proc. 29th IEEE Conf. Decision and Control, 1990. – P. 2097–2101.
11. Nakamura Y., Savant S. Nonholonomic motion control of an autonomous underwater vehicle // Proc. 91 IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems, 1991. – P. 1254–1259.
12. Nijmeijer H., Van der Schaft A. Nonlinear dynamical control systems. – Springer Science & Business Media, 2013.
13. Sussmann H. J., Liu W. Limits of highly oscillatory controls and the approximation of general paths by admissible trajectories // Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control, 1991. – P. 437–442.
14. Zuyev A. Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2016. – Vol. 54. – P. 1678–1696.
15. Zuyev A., Grushkovskaya V., Benner P. Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions // Proc. 2016 European Control Conference,

2016. – P. 575–580.
16. Грушковская В. В., Зуев А. Л. Двухточечная задача для систем, удовлетворяющих условию управляемости со скобками Ли второго порядка // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 357–372.
 17. Грушковская В. В., Зуев А. Л. Приближенное решение краевой задачи для управляемых систем, удовлетворяющих ранговому условию // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 4. – С. 87–102.
 18. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неавтономных систем. – М.: Наука, Физматлит, 1967. – 520 с.

V. Grushkovskaya, A. Zuyev

On the motion planning problem for a nonlinear system in a neighborhood of a given curve.

The paper is devoted to the approximate trajectory tracking problem for nonlinear systems whose vector fields satisfy the first-order Lie brackets rank condition. It is shown that, by choosing an appropriate partition of the curve, the problem considered can be reduced to a sequence of local point-to-point control problems. The main result of the paper presents the construction of a family of trigonometric controls ensuring the motion of the system in an arbitrary small neighborhood of the given curve. By using the Volterra expansion for the solutions of the system, the problem of finding the control coefficients is reduced to solving a system of algebraic equations. The local solvability conditions for such a system are described. The results obtained are illustrated by several examples.

Keywords: control-linear systems, trajectory tracking, motion planning, Lie algebra rank condition, trigonometric controls.

В. В. Грушковська, О. Л. Зуєв

Про задачу планування руху нелінійної системи в околі заданої кривої.

У статті розглянуто задачу наближеного відстеження траєкторії для нелінійних систем, векторні поля яких задовольняють рангову умову з дужками Лі першого порядку. Показано, що вибором відповідного розбиття кривої поставлену задачу може бути зведено до послідовності локальних двоточкових задач керування. Основним результатом роботи є побудова сім'ї тригонометричних керувань, які забезпечують рух системи в довільно малому околі заданої кривої. За допомогою розкладання розв'язків системи в ряд Вольтерри задачу обчислення коефіцієнтів функцій керувань зведено до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, для якої описано умови локальної розв'язності. Отримані результати проілюстровано на декількох прикладах.

Ключові слова: лінійні за керуванням системи, відстеження траєкторії, планування руху, рангова умова з дужками Лі, тригонометричні керування.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск;
Ун-т Штутгарта, Германия;
Ин-т динамики сложных технических систем им. Макса Планка,
Магдебург, Германия
vi.grushkovskaya@gmail.com,
alexander.zuyev@gmail.com

Получено 16.05.16