УДК 517.54

©2015. **А. Л. Таргонский, И. И. Таргонская**

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕНОЙ ТОЧКИ

Получены точные оценки произведений внутренних радиусов для открытого множества. В частности, решена экстремальная задача для произвольного конечного числа свободных полюсов системы точек на лучах и фиксированной бесконечно удаленной точкой.

Ключевые слова: *внутренний радиус области, квадратичный дифференциал, кусочно-разделяющее преобразование, функция Грина, лучевая система точек, логарифмическая емкость, вариационная формула.*

1. Введение.

В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о произведении внутренних радиусов областей представляют известное классическое направление. Возникновение этого направления связывается с известной работой академика М. А. Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно не пересекающихся односвязных областей. В последующем эта задача обобщалась и усиливалась в работах многих авторов (см. напр. [2–6]).

2. Определения и обозначения.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множества натуральных и вещественных чисел, соответственно, $\mathbb{C}$ – плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – её одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Сразу отметим, что в данной работе активно используется понятие квадратичного дифференциала, с которым можно ознакомиться в монографии [7].

Пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ [8 – 10], $g_D(w, a)$ – обобщенная функция Грина.

Рассмотрим систему точек $A_n := \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in \mathbb{C} \setminus \{0 \cup \infty\}$, $k = \overline{1, n}$, такую, что

$$\arg a_k = \frac{2\pi}{n}(k-1). \qquad (1)$$

Обозначим

$$P_k := \{w \in \mathbb{C} : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n}k\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – произвольное открытое множество и $w = a \in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту D, содержащую a. Для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}$, удовлетворяющей (1), и открытого множества D, $A_n \subset D$ обозначим $D_k(a_p)$ связную компоненту множества $D(a_p)\bigcap\overline{P_k(A_n)}$, содержащую точку a_p, $p = k, k+1$, $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} := a_1$.

Будем говорить, что открытое множество D, $\{\infty\} \cup A_n \subset D$ удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек A_n если выполняется условие

$$\left[D_k(a_k) \bigcap D_k(a_{k+1})\right] \bigcup \left[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_k)\right] \bigcup \left[D_k(\infty) \bigcap D_k(a_{k+1})\right] = \varnothing, \qquad (2)$$

по всем углам $\overline{P_k}$, $k = \overline{1, n}$.

Более подробно с введенными выше понятиями можно ознакомиться в работе [5].

На системе точек A_n определим функционал

$$\eta^{(\gamma)}(A_n) = \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n^2}} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{1+\frac{\gamma}{n}},$$

где $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$, $\gamma \geq 0$.

В работе, для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $n \geq 2$, удовлетворяющей (1), любого открытого множества D, $\infty, a_k \in D$, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющего условию неналегания (2), рассматривается задача по определению максимума функционала

$$r^{\gamma}(D, \infty) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k),$$

где $\gamma \geq 0$.

3. Результаты и доказательства.

Теорема. *Пусть $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\gamma \leq n^2$. Пусть также $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ – произвольная система точек вида (1), $\eta^{(\gamma)}(A_n) = 1$, и D – произвольное открытого множество, такое, что*

$$\infty, a_k \in D,\ k = \overline{1, n},$$

удовлетворяющее условию неналегания (2). Тогда справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(D, \infty) \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leq r^{\gamma}\left(B_{\infty}^{(0)}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right).$$

Равенство достигается в случае, когда $a_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$, $B_{\infty}^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, – соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2} \frac{n^2 + (w^n - 1)\gamma}{(w^n - 1)^2} dw^2. \qquad (3)$$

При $\gamma = n^2$ отметим следствие теоремы.

Следствие. *Пусть* $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. *Пусть также* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *– произвольная система точек вида (1),* $\eta^{(\gamma)}(A_n) = 1$, *и* D *– произвольное открытого множество, такое, что*

$$\infty, a_k \in D,\ k = \overline{1,n},$$

удовлетворяющее условию неналегания (2). Тогда справедливо неравенство

$$r^{n^2}(D,\infty)\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k) \leq r^{n^2}\left(B_{\infty}^{(0)},\infty\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

Равенство достигается в случае, когда $a_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$, $B_{\infty}^{(0)}$, $k=\overline{1,n}$, *– соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{2n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Доказательство теоремы. Так как, множество D удовлетворяет условию неналегания, то в соответствии с работами [5, 6, 9 – 12], открытое множество D обладает обобщенной функцией Грина $g_D(z,a)$, $\forall a \in D$.

Далее будем пользоваться результатами работ [5, 6, 9 – 12] и проводить преобразования подобные работе [5]. Для достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ образуем множества

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}}\backslash D; \qquad \overline{\Delta}_t = \{w \in \mathbb{C} :\ |w| \geq t\},$$

$$E_k(t) = \{w \in \mathbb{C} :\ |w-a_k| \leqslant t\}, \qquad k=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим конденсатор

$$C(t,D,A_n) = \left\{E_0,\ E_1(t),\ldots,E_n(t),\ \overline{\Delta}_t,\right\},$$

с предписанными значениями $0, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\,\text{раз}}, \sqrt{\gamma}$. Емкостью конденсатора $C(t,D,A_n)$ называется величина (см. [8, 10])

$$\operatorname{cap} C(t,D,A_n) = \inf \int\int \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества E_0, $G\Big|_{\overline{\Delta}_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_k(t)} = 1$, $k=\overline{1,n}$. Модуль конденсатора $|C(t,D,A_n)|$ определяется выражением

$$|C(t,D,A_n)| = \left[\operatorname{cap} C(t,D,A_n)\right]^{-1}.$$

Из теоремы 1 [11] и аналогично работе [5] определим асимптотику модуля конденсатора $C(t,D,A_n)$

$$|C(t,D,A_n)| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+\gamma}\cdot\log\frac{1}{t} + M(D,A_n) + o(1), \qquad t\to 0, \tag{4}$$

где

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(n+\gamma)^2} \cdot \left[\gamma \log r(D, \infty) + \sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k \neq p} g_D(a_p, a_k) + \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{\gamma} g_D(\infty, a_k) \right]. \tag{5}$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейства углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, где

$$z_k(w) = -i w^{\frac{n}{2}}, \quad k = \overline{1, n},$$

Рассмотрим конденсаторы при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$

$$C_k(t, D, A_n) = \left(E_0^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, \overline{\Delta}_t^{(k)} \right),$$

где

$$E_0^{(k)} = z_k \left(E_0 \bigcap \overline{P}_k \right) \bigcup \left\{ z_k \left(E_0 \bigcap \overline{P}_k \right) \right\}^*,$$

$$\Delta_t^{(k)} = z_k \left(\overline{\Delta}_t \bigcap \overline{P}_k \right) \bigcup \left\{ z_k \left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P}_k \right) \right\}^*,$$

$$E_1^{(k)} = z_k \left(E_k(t) \bigcap \overline{P}_k \right) \bigcup \left\{ z_k \left(E_k(t) \bigcap \overline{P}_k \right) \right\}^*,$$

$$E_2^{(k)} = z_k \left(E_{k+1}(t) \bigcap \overline{P}_k \right) \bigcup \left\{ z_k \left(E_{k+1}(t) \bigcap \overline{P}_k \right) \right\}^*,$$

$$k = \overline{1, n}, \quad E_{n+1}(t) = E_1(t), \qquad \{A\}^* = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : -\overline{w} \in A\}.$$

Каждому конденсатору $C_k(t, D, A_n)$ сопоставим класс V_k – всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G\Big|_{\overline{\Delta}_t^{(k)}} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_p^{(k)}} = 1$, $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t, D, A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t, D, A_n)\}_{k=1}^n$, причем в силу работ [6, 9 – 12] справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(t, D, A_n). \tag{6}$$

Откуда непосредственно получаем соотношение

$$|C(t, D, A_n)| \leqslant 2 \left(\sum_{l=1}^{n} |C_k(t, D, A_n)|^{-1} \right)^{-1}. \tag{7}$$

Из определения функций $z_k(w)$, получаем

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim \frac{n}{2} |a_m|^{\frac{n}{2} - 1} |w - a_m|, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n, \quad m = k, k+1; \tag{8}$$
$$|z_k(w)| = |w|^{\frac{n}{2}}, \qquad w \to 0, \ w \to \infty.$$

Аналогично (4) и (5), используя соотношения (8), справедливы асимптотические представления (см. [11])

$$|C_k(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2 + \frac{2\gamma}{n}} \cdot \log\frac{1}{t} + M_k(D, A_n) + o(1), \qquad t \to 0, \tag{9}$$

где

$$M_k(D, A_n) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(2 + \frac{2\gamma}{n})^2} \left[\frac{4}{n^2}\gamma \log r\left(D_k^{(\infty)}, 0\right) + \log \frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) \cdot r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)}{\frac{n}{2}|a_k|^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{n}{2}|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}} \right], \tag{10}$$
$$z_k(a_k) =: a_k^{(1)}, \ z_k(a_{k+1}) =: a_k^{(2)}, \ a_{n+1} = a_1, \ k = \overline{1, n},$$

где $D_k^{(\infty)}$, $D_k^{(s)}$ – объединение связных компоненты множеств $z_k\left(D \bigcap \overline{P}_k\right)$, содержащих точки ∞, $a_k^{(s)}$, соответственно, с их симметричным отражением относительно мнимой оси, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$.

Вычислим асимптотику правой части неравенства (7). Для этого согласно (9) запишем (при $t \to 0$)

$$|C_k(t, D, A_n)|^{-1} =$$
$$= 2\pi\left(2 + \frac{2\gamma}{n}\right) \cdot \frac{1}{\log\frac{1}{t}} \cdot \left(1 + \frac{2\pi\left(2 + \frac{2\gamma}{n}\right)}{\log\frac{1}{t}} M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} =$$
$$= \frac{2\pi\left(2 + \frac{2\gamma}{n}\right)}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi\left(2 + \frac{2\gamma}{n}\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 \cdot M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} |C_k(t, D, A_n)|^{-1} =$$
$$= \frac{2\pi\,(2n + 2\gamma)}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{2\pi\left(2 + \frac{2\gamma}{n}\right)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |C_k(t, D, A_n)|^{-1}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi\,(n + \gamma)} \left(1 - \frac{4\pi\,(n + \gamma)}{n^2 \log\frac{1}{t}} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n) + o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\,(n+\gamma)} \log\frac{1}{t} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n) + o(1). \tag{11}$$

Из соотношений (4), (7), (11) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+\gamma}\cdot\log\frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1) \leqslant \frac{1}{2\pi\,(n+\gamma)}\log\frac{1}{t} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n) + o(1).$$

Это означает, что

$$M(D, A_n) \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n). \tag{12}$$

С учетом (5), (10) из (12) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(n+\gamma)^2}\cdot\log\left[r^{\gamma}(D,\infty)\cdot\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{(n+\gamma)^2}\log\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_k^{(\infty)},\infty\right)\cdot\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right)\cdot r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)}{\frac{n}{2}|a_k|^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{n}{2}|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}}\right].$$

Отсюда следует

$$r^{\gamma}(D,\infty)\cdot\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right)\cdot r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)\cdot r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_k^{(\infty)},\infty\right)}{|a_k|^{\frac{n}{2}-1}\cdot|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}}\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(|a_k|^{\frac{n}{2}}+|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}\right)^{1-\frac{2\gamma}{n^2}}\cdot\left(|a_k|^{\frac{n}{2}}\cdot|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2\gamma}{n^2}}}{\left(|a_k||a_{k+1}|\right)^{\frac{n}{4}}}|a_k|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right)\cdot r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)\cdot r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_k^{(\infty)},\infty\right)}{\left|a_k^{(1)}-a_k^{(2)}\right|^{2-\frac{4\gamma}{n^2}}\cdot\left(\left|a_k^{(1)}\right|\left|a_k^{(2)}\right|\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^{n}\cdot\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{\gamma}{n}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|a_k|^{\frac{n}{2}}+|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}}{\left(|a_k||a_{k+1}|\right)^{\frac{n}{4}}}\right)^{1-\frac{2\gamma}{n^2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right)\cdot r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)\cdot r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_k^{(\infty)},\infty\right)}{\left|a_k^{(1)}-a_k^{(2)}\right|^{2-\frac{4\gamma}{n^2}}\cdot\left(\left|a_k^{(1)}\right|\left|a_k^{(2)}\right|\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot 2^{n-\frac{2\gamma}{n}} \cdot \eta^{(\gamma)}\left(A_n\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) \cdot r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right) \cdot r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_k^{(\infty)}, \infty\right)}{\left|a_k^{(1)} - a_k^{(2)}\right|^{2-\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \left(\left|a_k^{(1)}\right|\left|a_k^{(2)}\right|\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Функционал

$$\frac{r^{\alpha_1}(B_1, a_1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2, a_2) \cdot r^{\alpha_3}(B_3, a_3)}{|a_1 - a_2|^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3} \cdot |a_1 - a_3|^{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3} \cdot |a_2 - a_3|^{-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}},$$

$a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_p$, $k \neq p$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$, $k, p = 1, 2, 3$, инвариантный относительно дробно-линейных автоморфизмов комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ ([5]).

Принимая во внимание последнее утверждение из соотношения (13), имеем:

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \eta^{(\gamma)}\left(A_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(G_k^{(\infty)}, \infty\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, -i\right) \cdot r\left(G_{k-1}^{(2)}, i\right)\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \eta^{(\gamma)}\left(A_n\right) \cdot \left(r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_{\infty}, \infty\right) \cdot r\left(D_1, -i\right) \cdot r\left(D_2, i\right)\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{14}$$

где D_{∞}, D_1, D_2 – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = \frac{n^2 - \gamma(1+z^2)}{(1+z^2)^2} dz^2. \tag{15}$$

Проделав в квадратичном дифференциале (15) замену переменной с помощью формулы

$$z(w) = -iw^{\frac{n}{2}},$$

мы получим квадратичный дифференциал (3).

Используя соотношение (14) окончательно получаем

$$r^{\gamma}\left(B_{\infty}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^{\gamma}\left(B_{\infty}^{(0)}, \infty\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right),$$

где точки $\{a_k\}$ и области B_k, B_{∞} являются полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (3). Теорема доказана. □

В заключении хочу выразить благодарность А. К. Бахтину за постановку задачи и ряд ценных указаний.

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5.** – С. 159- 245.

2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Бахтина Г.П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
4. *Кузьмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 2001. – **276.** – С. 253-275.
5. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
6. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.
7. *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
8. *Хейман В.К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
9. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168.** – С. 48-66.
10. *Дубинин В.Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учебн. пособие. – Владивосток: Издание Дальневосточного ун-та, 2003. – 116 с.
11. *Дубинин В.Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1997. – **237.** – С. 56-73.
12. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49,** № 1 (295). – С. 3-76.
13. *Бахтін О.К.* Нерівності для внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин //Укр. мат. журн. – 2009. – 61, № 5. – С. 596-610.
14. *Емельянов Е.Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2002. – **286.** – С. 103-114.
15. *Бахтин А.К., Таргонский А.Л.* Обобщенные (n, d)-лучевые системы точек и неравенства для неналегающих областей и открытых множеств // УМЖ. – 2011. – 63, № 7. – С. 867-879.

A. Targonskii, I. Targonskaya

Extremal problem for open sets in case the point at infinity.

Sharp estimates of product of inner radii for open set are obtained. In particular, we solve an extremal problem in the case of arbitrary finite number of free poles on the system points on the rays and the point at infinity the fixed.

Keywords: *inner radius of domain, quadratic differential, piecewise-separating transformation, Green function, radial systems of points, logarithmic capacity, variational formula.*

А. Л. Таргонський, І. І. Таргонська

Екстремальна задача для відкритих множин у випадку нескінченно віддаленої точки.

Отримані точні оцінки добутку внутрішніх радіусів для відкритої множини. Зокрема, розв'язана екстремальна задача для довільного скінченого числа вільних полюсів системи точок на променях та фіксованої нескінченно віддаленої точки.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, квадратичний диференціал, кусково-поділяюче перетворення, функція Гріна, променева система точок, логарифмічна ємність, варіаційна формула.*

Житомирский государственный университет им. И. Франка, Житомир
targonsk@zu.edu.ua

Получено 18.12.15