УДК 517.5

©2015. **О. А. Новиков, О. Г. Ровенская**

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ФЕЙЕРА

Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторными методами суммирования Валле Пуссена, на классах интегралов Пуассона. Основным методом исследований является изучение интегральных представлений уклонений тригонометрических полиномов на классах периодических функций.

Ключевые слова: *ряд Фурье, линейный метод приближения, асимптотическая формула, классы периодических функций.*

1. Введение.

Целью работы является решение одной из экстремальных задач теории приближения классов периодических функций линейными методами. Получены асимптотические формулы для верхних граней уклонений линейных насыщенных операторов, порождаемых повторным применением методов суммирования Валле Пуссена на классах периодических функций, представимых в виде интегралов Пуассона. В работе использованы методы исследования интегральных представлений уклонений полиномов на классах функций, возникшие и получившие свое развитие благодаря работам С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, С. А. Теляковского, А. И. Степанца и других.

Следуя А. И. Степанцу [1], обозначим через $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$ классы непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, которые можно представить в виде свертки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt+\beta\pi/2)\ dt,$$

где функция $f^q_\beta(t)$, соответственно, удовлетворяет условию $\operatorname{esssup}|f^q_\beta(t)| \le 1$ или

$$|f^q_\beta(t') - f^q_\beta(t'')| \le \omega(|t'-t''|), \forall t', t'' \in R,$$

$\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности.

Классы $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$ принято называть классами интегралов Пуассона. Известно (см., например, [2, с. 31]), что эти классы состоят из функций $f(x)$, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы порядка n ряда Фурье 2π-периодической суммируемой функции $f(x)$. Суммы Валле Пуссена функции $f(x)$ (см. [2, с. 47]) можно определить соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x). \tag{1}$$

В случае выполнения условия $p = n$ этим соотношением задаются суммы Фейера $\sigma_n(f;x) = V_{n,n}(f;x)$.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_r$ – натуральные числа такие, что $\sum\limits_{k=1}^{r} p_k \le n+r-1$. Функции $f(x)$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических многочленов

$$V_{n,p_1,p_2,\dots,p_r}(f;x) = V_{n,\overline{p}}^{(r)}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}\cdots\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f;x), \tag{2}$$

которые будем называть r-повторними суммами Валле Пуссена [3]. При $r = 1$ эти многочлены совпадают с суммами Валле Пуссена, заданными формулой (1).

Задаче приближения классов интегралов Пуассона тригонометрическими полиномами посвящен ряд известных работ. В 1946 году С. М. Никольский [4] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье по классам $C^q_{\beta,\infty}$ имеет место асимптотическая формула

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_{n-1}(f;x)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где величина $O(1)$ не зависит от n. В 1980 году С. Б. Стечкин [5] показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1)\frac{q^{n+1}}{(1-q)n}$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n и по q.

Для классов $C^q_\beta H_\omega$ аналогичная задача решена в 2001 году А. И. Степанцом. В работе [1] была получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_\beta H_\omega\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_\beta H_\omega} ||f(x) - S_{n-1}(f;x)||_C =$$

$$= \frac{4q^n\theta_n(\omega)}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t\,dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\theta_n(\omega) \in [1/2;1]$, причем $\theta_n(\omega) = 1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности.

В работе [6] (см. также [7, с. 218]) решена аналогичная задача для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ и $C^q_\beta H_\omega$. В частности получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right). \qquad (3)$$

А. С. Сердюк в работе [8] показал, что имеет место более общий результат, чем формула (3)

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt, \quad s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 3, & p = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

В работе [9] для верхних граней уклонений сумм Фейера на классе $C^q_{1,\infty}$ получена такая асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2} + \ln\frac{1+q}{1-q}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Асимптотические формулы для верхних граней уклонений r-повторных сумм Валле Пуссена для произвольных r на классах $C^q_\beta H_\omega$ получены в работе [3] (в случае $r = 2$ в работах [10,11]).

2. Основной результат.

Большая часть перечисленных выше результатов касается случаев, когда операторы Валле Пуссена обычные (1) или повторные (2) являются такими, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} p_i < 1.$$

В данной работе изучено асимптотическое поведение уклонений на классе $C^q_{\beta,\infty}$ многочленов $V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$, заданных формулой (2), в которых $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = n+r-1$. В таком случае многочлены (2) будем называть повторными суммами Фейера и обозначать $\sigma^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$.

Предметом изучения является поведение при $n \to \infty$ величин

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(r)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_1} ||f(x) - \sigma^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C$$

для случаев $r = 2; 3$.

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = n+r-1$. *Тогда для* $r=2$ *при* $n\to\infty$, $p_i\to\infty$, $i=1,2$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \begin{cases} \frac{4q}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, & q\in(0;1/2]; \\ \frac{4q^2+1}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}, & q\in(1/2;1), \end{cases} \tag{4}$$

для $r=3$ *при* $n\to\infty$, $p_i\to\infty$, $i=1,2,3$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3)}_{n,\overline{p}}) = \begin{cases} \frac{4q(q^2+3)}{3\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3} + O(1)\frac{q^{n-p_1-p_2}+q^{n-p_1-p_3}+q^{n-p_2-p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}, & q\in(0;1/3]; \\ \frac{2(2q^3+9q^2+1)}{3\pi p_1p_2p_3(1-q^2)^3} + O(1)\frac{q^{n-p_1-p_2}+q^{n-p_1-p_3}+q^{n-p_2-p_3}}{p_1p_2p_3(1-q)^7}, & q\in(1/3;1). \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. В работе [3] показано, что для величин

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = f(x) - \sigma^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)$$

для любого натурального r имеет место интегральное представление

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\sigma^{(r)}_1\cos\frac{\beta\pi}{2} - \sigma^{(r)}_2\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{6}$$

где величины $\sigma^{(r)}_1=\sigma^{(r)}_1(t,q,n)$, $\sigma^{(r)}_2=\sigma^{(r)}_2(t,q,n)$ заданы соотношениями

$$\sigma^{(r)}_1 = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_p+r+\nu}\cos(n-\Sigma^\alpha_p+r-\nu)t,$$

$$\sigma^{(r)}_2 = \frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod_{i=1}^r p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_p+r+\nu}\sin(n-\Sigma^\alpha_p+r-\nu)t,$$

$|\alpha|$ – количество элементов множества α, $\Sigma^\alpha_p=\sum\limits_{j\in\alpha}p_j$, $C^k_n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – коэффициенты биномиального разложения, $Z_q(x)=\sqrt{1-2q\cos x+q^2}$.

Так как

$$\int\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^3} = \frac{2q^2}{(1-q)^2(1+q)^4}\frac{\sin t(\cos t+1)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}+$$

$$+\frac{4q-2q^2+4q^3}{(1-q^2)^4}\frac{\sin t}{(1+q^2-2q\cos t)}+\frac{2+8q^2+2q^4}{(1-q^2)^5}\operatorname{arctg}\frac{(1+q)\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{(1-q)},$$

то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^3} = O(1)(1-q)^{-5}.$$

Поэтому на основании (6) для $\beta=1$ и $p_1+p_2=n+1$ получаем

$$\delta^{(2)}_{n,\bar{p}}(f;x)=\frac{-q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_1(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}(\sin t-3q^2\sin t+q^3\sin 2t)dt+$$

$$+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\bar{p}})=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||\delta^{(2)}_{n,\bar{p}}(f;x)||=$$

$$=\sup_{\varphi\in S^0_M}\left|\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)[(1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}\right|\le$$

$$\le\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|(1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t|}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5},$$

где через S^0_M обозначено множество функций имеющих среднее значение на периоде равное нулю и удовлетворяющих условию $\mathrm{esssup}|\varphi(t)|\le 1$. Очевидно, что функция

$$\varphi(t)=\mathrm{sign}((1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t),$$

содержится в S^0_M. Поэтому

$$\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||\delta^{(2)}_{n,\bar{p}}(f;x)||\ge\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)((1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Таким образом

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\bar{p}})=\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|(1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t|}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Наличие нулей у функции $\xi_q(t)=(1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t$ зависит от величины q. Выполняя элементарные преобразования, получаем, что на промежутке $[-\pi;\pi]$ для $q\in(0;1/2]$ функция $\xi_q(t)$ изменяет знак только в точках $t=0; t=\pm\pi$, а для $q\in(1/2;1)$ функция $\xi_q(t)$ изменяет знак в точках $t=0; t=\pm\pi; t=\pm\arccos\frac{3q^2-1}{2q^3}$. Поэтому для $q\in(0;1/2]$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\bar{p}})=\frac{2q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(1-3q^2)\sin t+q^3\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5},$$

а для $q \in (1/2;1)$ имеем

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{2q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_0^{\arccos\frac{3q^2-1}{2q^3}} \frac{(1-3q^2)\sin t + q^3 \sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt-$$

$$-\frac{2q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{\arccos\frac{3q^2-1}{2q^3}}^{\pi} \frac{(1-3q^2)\sin t + q^3 \sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\int \frac{(1-3q^2)\sin t + q^3 \sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt = \frac{q}{2(1-2q\cos t+q^2)} - \frac{(1-q^2)^2}{4q(1-2q\cos t+q^2)^2}.$$

Поэтому, выполняя элементарные преобразования, получаем для $q \in (0;1/2]$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q}{\pi p_1 p_2 (1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5},$$

а для $q \in (1/2;1)$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{4q^2+1}{\pi p_1 p_2 p_3 (1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{n-p_1}+q^{n-p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Формула (4) доказана.

Выполняя интегрирование и элементарные преобразования, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(1+q^2-2q\cos t)^4} = O(1)(1-q)^{-7}.$$

Поэтому на основании (6) для $\beta = 1$ и $p_1+p_2+p_3 = n+2$ получаем

$$\delta^{(3)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{-q}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f^q_1(x+t)[(1-6q^2)\sin t + 4q^3\sin 2t - q^4 \sin 3t]}{p_1p_2p_3(1-2q\cos t+q^2)^4}dt + O(1)\frac{R_n(\overline{p})}{(1-q)^7},$$

где обозначено

$$R_n(\overline{p}) = \frac{q^{n-p_1-p_2}+q^{n-p_1-p_3}+q^{n-p_2-p_3}}{p_1p_2p_3}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty},\sigma^{(3)}_{n,\overline{p}}) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||\delta^{(3)}_{n,\overline{p}}(f;x)|| =$$

$$= \sup_{\varphi\in S_M^0}\left|\frac{q}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(t)[(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t]}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt\right|+O(1)\frac{R_n(\overline{p})}{(1-q)^7}\leq$$

$$\leq \frac{q}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t|}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+O(1)\frac{R_n(\overline{p})}{(1-q)^7}.$$

Очевидно, что функция

$$\varphi(t)=\mathrm{sign}((1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t),$$

содержится в S_M^0. Поэтому

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3)}_{n,\overline{p}})=\frac{q}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t|}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+O(1)\frac{R_n(\overline{p})}{(1-q)^7}.$$

Определим расположение нулей функции

$$\xi_q(t)=(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t$$

в зависимости от величины q. Выполняя элементарные преобразования, получаем, что на промежутке $[-\pi;\pi]$ для $q\in(0;1/3]$ функция $\xi_q(t)$ изменяет знак только в точках $t=0; t=\pm\pi$, а для $q\in(1/3;1)$ функция $\xi_q(t)$ изменяет знак в точках $t=0; t=\pm\pi; t=\pm\arccos\frac{2q+q^2-1}{2q^2}$. Поэтому для $q\in(0;1/3]$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3)}_{n,\overline{p}})=\frac{2q}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+O(1)\frac{R_n(\overline{p})}{(1-q)^7},$$

а для $q\in(1/3;1)$

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(3)}_{n,\overline{p}})=\frac{2q}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{0}^{\arccos\frac{2q+q^2-1}{2q^2}}\frac{(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt-$$

$$-\frac{2q}{\pi p_1p_2p_3}\int\limits_{\arccos\frac{2q+q^2-1}{2q^2}}^{\pi}\frac{(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt+O(1)\frac{R_n(\overline{p})}{(1-q)^7}.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\int\frac{(1-6q^2)\sin t+4q^3\sin 2t-q^4\sin 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^4}dt=\frac{q}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1}+$$

$$+\frac{q(1-q^2)}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-2}-\frac{(1-q^2)^3}{6q}(1-2q\cos t+q^2)^{-3}.$$

Подставив это в два предыдущих соотношения и выполнив элементарные преобразования, получаем соотношение (5). $\square$

3. Выводы.

Решение задачи Колмогорова–Никольского формулы (4), (5) обеспечивают, если выполняются условия $q \in (0; 1-\theta), \theta \in (0; 1)$, $p_i \to \infty$, $i = 1, 2, 3$. В этих случаях главный член асимптотического равенства имеет простой вид и убывает со степенной скоростью в то время, как остаточный член убывает существенно быстрее с показательной скоростью.

1. *Степанец А.И.* Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. – 2001. – Т. 192, № 1. – С. 113-138.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – К. : Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вiсник Одеського нацiонального унiверситету. Математика i механiка. – 2014. – Т. 19, вип. 3(23). – С. 14-26.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 207-256.
5. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 126-151.
6. *Рукасов В.I., Чайченко С.О.* Наближення аналiтичних перiодичних функцiй сумами Валле-Пуссена // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1653-1668.
7. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Працi Iн-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 68. – 368 с.
8. *Сердюк А.С.* Наближення iнтегралiв Пуасона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97-107.
9. *Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 4 – С. 813-820.
10. *Величко В.Е., Новиков О.А., Ровенская О.Г., Рукасов В.И.* Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена // Труды Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 33-42.
11. *Ровенская О.Г., Новиков О.А.* Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелiнiйнi коливання. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 96-99.

O. A. Novikov, O. G. Rovenska

Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums.

We obtain asymptotic formula for upper bounds of the deviations of trigonometric polynomials, generated by repeated Fejer methods of summation, taken over classes of Poisson integrals. The main method of research is the study of integral representations of deviations of trigonometric polynomials on the classes of periodic functions.

Keywords: *Fourier series, linear method of approximation, asymptotic formula, classes of periodic functions.*

О. О. Новіков, О. Г. Ровенська

Наближення класів інтегралів Пуассона повторними сумами Фейєра.

Отримано асимптотичні формули для верхніх граней відхилень тригонометричних поліномів, породжуваних повторними методами підсумовування Валле Пуссена, на класах інтегралів Пуассона. Основним методом досліджень є вивчення інтегральних уявлень відхилень тригонометричних поліномів на класах періодичних функцій.

Ключові слова: *ряд Фур'є, лінійний метод наближення, асимптотична формула, класи періодичних функцій.*

Донбасский государственный педагогический университет,
г. Славянск
Донбасская государственная машиностроительная академия,
г. Краматорск
sgpi@slav.dn.ua

Получено 01.12.15