УДК 517.977

МЕТОДИ ПОБУДОВИ ІНВАРІАНТНИХ МНОЖИН У ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ ІГРАХ УТРИМАННЯ

В.В. ОСТАПЕНКО, І.М. ТЕРЕЩЕНКО

Описано конструктивні методи побудови мінімальних та максимальних інваріантних множин у дискретному випадку. У диференціальній грі утримання розглянуто задачу знаходження інваріантних множин із застосуванням повного вимітання в новій постановці. Мета гравця-переслідувача — із будь-якої точки одержаної множини утримати в ній траєкторію динамічної системи. Мета гравця-втікача — протилежна. Наведено приклад, на якому показана важливість різних умов повного вимітання, накладених на керування гравців.

ВСТУП

У роботах [1, 2] розглядалися лінійні різницеві системи з перешкодою. Було введено поняття інваріантної множини, тобто такої, починаючи з кожної точки якої траєкторія залишається у цій множині.

У роботах [3, 4] досліджується ігрова постановка цієї задачі, де беруть участь гравець-переслідувач та гравець-утікач, що керує перешкодою.

У цій статті узагальнено результати робіт [3, 4] та проведено порівняльний аналіз розроблених методів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо гру з динамікою

$$x_{k+1} = Ax_k - u_k + v_k,\ k \geq 0, \tag{1}$$

де A — матриця розмірності $n \times n$; $u_k \in U$, $v_k \in V$, U, V — опуклі компакти. Параметрами u_k та v_k розпоряджаються гравці P (переслідувач) і E (утікач) відповідно. Причому гравець P на k-му кроці вибирає u_k, знаючи x_k і v_k, тобто $u_k = u_k(x_k, v_k)$, а гравець E вибирає v_k, знаючи x_k, тобто $v_k = v_k(x_k)$. Мета гравця P — утримати траєкторію x_k, $k \geq 1$, рівняння (1) на множині M. Причому початкова позиція $x_0 \in M$. Мета гравця E — протилежна. Множина M припускається опуклою та компактною.

Означення 1. Множину $M \subset E^n$ будемо називаюти інваріантною множиною рівняння (1), якщо для будь-якої точки $x_0 \in M$ та будь-яких керувань $v_k \in V$ існують керування $u_k = u_k(x_k, v_k)$ такі, що $x_k \in M$, $k \geq 1$.

Отже, знаходження інваріантної множини можна вважати розв'язком поставленої задачі.

КРИТЕРІЙ ІНВАРІАНТНОСТІ

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$x_{k+1} + u_k = Ax_k + v_k, \ k \geq 0. \tag{2}$$

З (2) випливає: умова інваріантності означає, що для будь-яких $x_k \in M$ і $v_k \in V$ існують $x_{k+1} \in M$ і $u_k \in U$ такі, що

$$x_{k+1} + u_k = Ax_k + v_k, \ k \geq 0.$$

Таким чином, інваріантність M еквівалентна включенню

$$M + U \supset AM + V. \tag{3}$$

Нижче шукані інваріантні множини будуть описані у вигляді деяких нескінченних рядів. Опишемо їх. Нехай $N_k \subset E^n$, $k \geq 0$, послідовність компактних множин. Під N будемо розуміти множину

$$N = N_0 + N_1 + \ldots + N_k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} N_k, \tag{4}$$

яка є об'єднанням рядів

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k, \tag{5}$$

де $x_k \in N_k$, $x \in N$. Припустимо, що ряди виду (5) збігаються і множина N цих рядів обмежена. Користуючись теоремою Тіхонова [5], можна показати, що з компактності N_k випливає компактність N.

Відмітимо також: якщо N_k — опуклі множини, то N — опукла.
Як ряд (4) розглянемо

$$N = K + AK + A^2K + \ldots + A^kK + \ldots, \tag{6}$$

де $K \subset E^n$ — компактна множина; A — $n \times n$-матриця, яку розглянуто у рівнянні (1).

Припустимо, що для будь-якого власного числа λ матриці A виконується $|\lambda| \leq q < 1$, де q — фіксоване число. Відомо, що в цьому випадку існує константа $C \geq 0$ така, що $\|A^k\| \leq Cq^k$. Оскільки K — обмежена, то існує константа $R > 0$ така, що $\|x_k\| \leq R$ для будь-якого $x_k \in K$. Кожний елемент

$x \in N$ можна представити у вигляді ряду $x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x_k$, де $x_k \in K$. Оскільки $\left\| A^k x_k \right\| \le \left\| A^k \right\| \left\| x_k \right\| \le CRq^k$, то $\|x\| \le \frac{1}{1-q} CR$. Тому множина N із (6) компактна.

Означення 2. Нехай A, B — непорожні множини з R^n . Під геометричною різницею множин A і B розуміють множину $A \overset{*}{-} B = \{ a \in A : a + B \subset A \}$.

Означення 3. Множина B повністю вимітає множину A, якщо виконується рівність $\left(A \overset{*}{-} B\right) + B = A$.

ПОБУДОВА МІНІМАЛЬНОЇ ІНВАРІАНТНОЇ МНОЖИНИ

Припустимо, що матриця A задовольняє наведеним вище умовам.

Теорема 1. Нехай множина U повністю вимітає множину V . Тоді система (1) має мінімальну інваріантну множину

$$M_{\min} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right). \tag{7}$$

Доведення. Нехай M — довільна інваріантна множина рівняння (1). Покажемо, що включення (3) еквівалентне включенню

$$M \supset AM + \left(V \overset{*}{-} U\right). \tag{8}$$

Від обох частин включення (3) віднімемо геометрично множину U . Тоді

$$M = (M + U) \overset{*}{-} U \supset (AM + V) \overset{*}{-} U \supset \left(AM + \left(V \overset{*}{-} U\right) + U\right) \overset{*}{-} U = AM + \left(V \overset{*}{-} U\right).$$

Отже, одержуємо (8). Нехай тепер виконується (8). Тоді з умови повного вимітання одержуємо

$$M + U \supset AM + \left(V \overset{*}{-} U\right) + U = AM + V ,$$

тобто отримуємо включення (3).

З (8) маємо

$$M \supset AM + \left(V \overset{*}{-} U\right) \supset A^2 M + A\left(V \overset{*}{-} U\right) + \left(V \overset{*}{-} U\right) \supset \ldots$$

$$\ldots \supset A^k M + A^{k-1}\left(V \overset{*}{-} U\right) + \ldots + \left(V \overset{*}{-} U\right).$$

Оскільки множина M обмежена, то послідовність множин $A^k M$ прямує до нуля у метриці Хаусдорфа. Звідси та із замкненості M отримуємо

$$M_{\min} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) \subset M .$$

Покажемо, що $M_{\min}$ інваріантна множина. Для цього перевіримо включення (8), яке еквівалентне (3). Дійсно,

$$AM_{\min} + \left(V \overset{*}{-} U\right) = \left(V \overset{*}{-} U\right) + A\sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) = M_{\min} .$$

Теорему доведено.

Одержимо інше, ніж у формулі (7), представлення множини $M_{\min}$.

Теорема 2. Нехай множина U повністю вимітає множину $\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-}$ $\overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right)$. Тоді система (1) має мінімальну інваріантну множину

$$M_{\min} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k U\right).$$

Доведення. Нехай M — довільна інваріантна множина рівняння (1). Скористаємося формулою (3). Домножимо обидві частини включення на A та додамо V. Звідси

$$A(AM + V) + V \subset A(AM + U) + V ,$$

$$A^2 M + AM + V \subset AM + AU + V = AM + V + U \subset M + U + AU .$$

Застосувавши $(k+1)$ раз формулу (3), одержимо

$$A^{k+1} M + A^k V + \ldots + V \subset M + U + \ldots + A^k U .$$

Оскільки множина M обмежена, то $A^{k+1} M$ прямує до нуля у метриці Хаусдорфа. Тоді отримуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k V \subset M + \sum_{k=0}^{\infty} A^k U .$$

Звідси

$$M_{\min} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k U\right) \subset M .$$

Покажемо тепер інваріантність $M_{\min}$. Перевіримо виконання включення (3). Маємо

$$AM_{\min} + V = A\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k U\right)\right) + V = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) + V .$$

Враховуючи той факт, що $\left(M \overset{*}{-} N\right) + N \subset M$, де M, N — опуклі підмножини в E^n (із геометричних властивостей), отримуємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k U \subset \sum_{k=1}^{\infty} A^k V .$$

Отже, для нашого випадку маємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k U + V \subset \sum_{k=1}^{\infty} A^k V + V = \sum_{k=0}^{\infty} A^k V .$$

Віднімемо геометрично від обох частин включення $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k U$.

$$\left[\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) + V\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right] \overset{*}{-} \sum_{k=1}^{\infty} A^k U \subset \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right),$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) + V \subset \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right).$$

Враховуючи умову теореми, що множина U повністю вимітає множину $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k U\right)$, одержуємо

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) = \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U\right) \overset{*}{-} U\right] + U =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k U\right) + U = M_{\min} + U .$$

Теорему доведено.

Узагальнимо результат теореми 1. Нехай $M_{\min}$ — мінімальна інваріантна множина рівняння (1) та множина U повністю вимітає множину V . Використовуючи ту властивість геометричної різниці, що $(M + N) \overset{*}{-} N = M$, де M , N — опуклі підмножини в E^n , отримуємо

$$M_{\min} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) = \sum_{k=0}^{n} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k U\right) \overset{*}{-} \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k U =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A^k U\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) + \sum_{k=0}^{n} A^k U\right) \overset{*}{-} \sum_{k=0}^{n} A^k U + \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} A^k V\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=0}^{n} A^k U\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \left(V \overset{*}{-} U\right) =$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\left(V\overset{*}{-}U\right)+\sum_{k=0}^{\infty}A^kU\right)\overset{*}{-}\sum_{k=0}^{\infty}A^kU=\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^kV\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^kU\right)=M_{\min}.$$

Отже, довели такий результат.

Наслідок 1. Нехай множина U повністю вимітає множину V. Тоді система (1) має мінімальну інваріантну множину, яка може бути виражена однією з еквівалентних формул:

а) $M_{\min}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k\left(V\overset{*}{-}U\right)$;

б) $M_{\min}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^kV\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^kU\right)$;

в) $M_{\min}=\sum_{k=0}^{n}A^k\left(V\overset{*}{-}U\right)+\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A^kV\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A^kU\right)$;

г) $M_{\min}=\left(\sum_{k=0}^{n}A^kV\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=0}^{n}A^kU\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}A^k\left(V\overset{*}{-}U\right)$.

ПОБУДОВА МАКСИМАЛЬНОЇ ІНВАРІАНТНОЇ МНОЖИНИ

Змінимо обмеження на матрицю A та опишемо в цьому випадку максимальну інваріантну множину. Вважаємо, що матриця A невироджена і існує таке $p>1$, що для будь-якого власного числа λ матриці A виконується $|\lambda|\geq p$.

Теорема 3. Нехай множина V повністю вимітає множину U. Тоді система (1) має максимальну інваріантну множину

$$M_{\max}=\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right).$$

Доведення. Нехай M — довільна інваріантна множина рівняння (1). Так само, як і у теоремі 1, можна показати, що включення (3) еквівалентне включенню

$$M+\left(U\overset{*}{-}V\right)\supset AM$$

або

$$A^{-1}M+A^{-1}\left(U\overset{*}{-}V\right)\supset M. \qquad (9)$$

Із (9) випливає, що

$$M\subset A^{-1}M+A^{-1}\left(U\overset{*}{-}V\right)\subset A^{-2}M+A^{-1}\left(U\overset{*}{-}V\right)+A^{-2}\left(U\overset{*}{-}V\right)\subset$$

$$\subset A^{-k}M+A^{-1}\left(U\overset{*}{-}V\right)+\ldots+A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right).$$

Оскільки M — обмежена, то $A^{-k}M$ прямує до нуля у метриці Хаусдорфа і, отже,

$$M \subset M_{\max} = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} \left(U \overset{*}{-} V\right).$$

Покажемо тепер інваріантність $M_{\max}$, використовуючи формулу (9). Отримуємо

$$A^{-1} M_{\max} + A^{-1} \left(U \overset{*}{-} V\right) = \sum_{k=2}^{\infty} A^{-k} \left(U \overset{*}{-} V\right) + A^{-1} \left(U \overset{*}{-} V\right) = M_{\max},$$

що й доводить теорему.

Одержимо інше представлення множини $M_{\max}$.

Теорема 4. Нехай виконується співвідношення

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k} V\right) = \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k} U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k} V\right) + A^{-1} U .$$

Тоді система (1) має максимальну інваріантну множину

$$M_{\max} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} V\right).$$

Доведення. Нехай M — довільна інваріантна множина рівняння (1). Перепишемо включення (3) у вигляді

$$M + A^{-1} V \subset A^{-1} M + A^{-1} U . \tag{10}$$

Домножимо обидві частини включення на A^{-1} та додамо $A^{-1} U$. Звідси

$$A^{-1} \left(M + A^{-1} V\right) + A^{-1} U \subset A^{-1} \left(A^{-1} M + A^{-1} U\right) + A^{-1} U ,$$

$$A^{-1} M + A^{-1} U + A^{-2} V \subset A^{-2} M + A^{-2} U + A^{-1} U .$$

З іншого боку,

$$M + A^{-1} V + A^{-2} V \subset A^{-1} M + A^{-1} U + A^{-2} V \subset A^{-2} M + A^{-1} U + A^{-2} U .$$

Застосувавши формулу (10) k раз, одержимо

$$M + A^{-1} V + \ldots + A^{-(k+1)} V \subset A^{-(k+1)} M + A^{-1} U + \ldots + A^{-(k+1)} U .$$

Оскільки множина M обмежена, то $A^{-(k+1)} M$ прямує до нуля у метриці Хаусдорфа. Звідси отримуємо

$$M + \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} V \subset \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} U .$$

Тоді

$$M \subset M_{\max} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k} V\right).$$

Тепер покажемо інваріантність множини $M_{\max}$. Перевіримо включення (10). Застосувавши цей вираз, маємо

$$M + A^{-1}V = \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V\right) + A^{-1}V .$$

Використовуючи властивість геометричної різниці $\left(M \overset{*}{-} N\right) + N \subset M$, де M, N — опуклі підмножини в E^n, отримуємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V \subset \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U .$$

Отже, для нашого випадку маємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V\right) + A^{-1}V + \sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}V \subset \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U .$$

Віднімемо геометрично від обох частин включення $\sum_{k=2}^{\infty} A^{-1}V$. Звідси отримуємо такий результат:

$$\left[\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V\right) + A^{-1}V\right) + \sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}V\right] \overset{*}{-} \sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}V \subset$$

$$\subset \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}V\right).$$

Враховуючи умову теореми про співвідношення, одержуємо

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V\right) + A^{-1}V \subset \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}V\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=2}^{\infty} A^{-k}V\right) + A^{-1}U = A^{-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}V\right)\right] + A^{-1}U =$$

$$= A^{-1}M_{\max} + A^{-1}U .$$

Теорему доведено.

Узагальнимо результати теореми 3. Припустимо, що $M_{\max}$ — максимальна інваріантна множина рівняння (1) та множина V повністю вимітає множину U. Використавши властивість геометричної різниці $\left(M + N\right) \overset{*}{-} N = M$, де M, N — опуклі підмножини в E^n, отримуємо

$$M_{\max} = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}\left(U \overset{*}{-} V\right) = \sum_{k=1}^{n} A^{-k}\left(U \overset{*}{-} V\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-k}\left(U \overset{*}{-} V\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A^{-k}\left(U \overset{*}{-} V\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-k}\left(U \overset{*}{-} V\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-k}V\right) \overset{*}{-} \sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-k}V =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A^{-k}\left(U \overset{*}{-} V\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-k}U\right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A^{-k}V\right) =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)+\sum_{k=1}^{n}A^{-k}V\right)\overset{*}{-}\sum_{k=1}^{n}A^{-k}V+\sum_{k=n+1}^{\infty}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}A^{-k}U\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=1}^{n}A^{-k}V\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)=$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)+\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}V\right)\overset{*}{-}\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}V=\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}U\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}V\right)=M_{\max}\,.$$

Отже, доведено такий результат.

Наслідок 2. Нехай множина V повністю вимітає множину U. Тоді система (1) має максимальну інваріантну множину, яка може бути виражена однією з еквівалентних формул:

а) $M_{\max}=\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)$;

б) $M_{\max}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}U\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{-k}V\right)$;

в) $M_{\max}=\sum_{k=1}^{n}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)+\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A^{-k}U\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}A^{-k}V\right)$;

г) $M_{\max}=\left(\sum_{k=1}^{n}A^{-k}U\right)\overset{*}{-}\left(\sum_{k=1}^{n}A^{-k}V\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}A^{-k}\left(U\overset{*}{-}V\right)$.

Приклад. У теоремах 1 та 2 за різних умов вимітання будуються різні мінімальні інваріантні множини. Причому в загальному випадку множина із теореми 2 ширше за множину із теореми 1. Тому, якщо виконується умова теореми 1, то мінімальна інваріантна множина визначається за формулою (7), і нема необхідності застосовувати теорему 2.

Побудуємо приклад, де взято такі множини (рис. 1 та 2), що не виконується умова теореми 1, проте справедлива теорема 2.

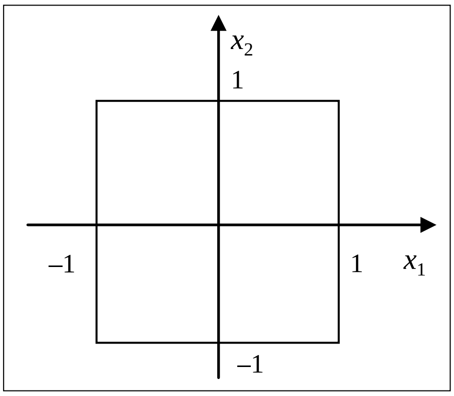

Рис. 1. Множина P

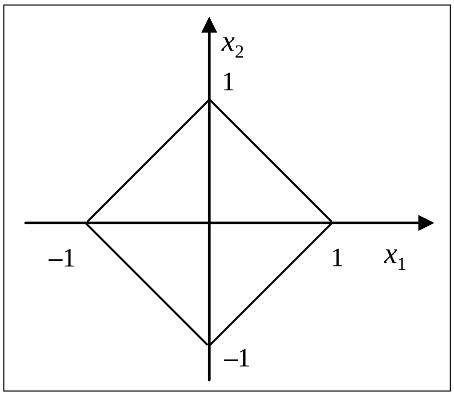

Рис. 2. Множина Q

Позначимо

$$P=\left\{x=(x_1,x_2):\ |x_i|\le 1,\ i=1,2\right\},$$

$$Q=\left\{x=(x_1,x_2):\ |x_1|+|x_2|\le 1\right\}.$$

Покладемо $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Тоді $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Множина P є квадратом, Q — «ромбом», який є зменшеним квадратом P, що повернули на $\frac{\pi}{4}$. Матриця A є матрицею повороту на $\frac{\pi}{4}$, що зменшує довжину вектора в $\sqrt{2}$ рази.

Далі

$$AP=\left\{x=(x_1,x_2):\ A^{-1}x\in P\right\}=$$
$$=\left\{x=(x_1,x_2):\ |x_1-x_2|\le 1,\ |x_1+x_2|\le 1\right\}=$$
$$=\left\{x=(x_1,x_2):\ |x_1|+|x_2|\le 1\right\}=Q\,.$$

Аналогічно знаходимо

$$AQ=\left\{x=(x_1,x_2):\ A^{-1}x\in Q\right\}=$$
$$=\left\{x=(x_1,x_2):\ |x_1-x_2|+|x_1+x_2|\le 1\right\}=$$
$$=\left\{x=(x_1,x_2):\ |x_i|\le \frac{1}{2},\ i=1,2\right\}=\frac{1}{2}P\,.$$

Розглянемо гру з матрицею A та множинами $V=P$, $U=Q$. Очевидно, що $V\overset{*}{-}U=P\overset{*}{-}Q=\{0\}$, проте U не вимітає повністю V. Отже, умова теореми 1 не виконується.

Дослідимо умову теореми 2. Із зроблених позначень випливає

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^kV=V+AV+A^2V+A^3V+\ldots=$$
$$=P+Q+\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{4}P+\frac{1}{4}Q+\ldots\frac{1}{2^k}P+\frac{1}{2^k}Q+\ldots\ .$$

Множини P та Q — компактні, ряди чисел, що стоять у якості коефіцієнтів перед множинами P та Q, збігаються абсолютно. Знайдемо, чому дорівнює $\sum_{k=0}^{\infty}A^kV$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}P=\left\{x=(x_1,x_2):|x_i|\le 1, i=1,2\right\}+\left\{x=(x_1,x_2):|x_i|\le\frac{1}{2}, i=1,2\right\}+\ldots$$

$$\ldots+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_i\right|\le\frac{1}{2^k},\ i=1,2\right\}+\ldots=2P,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}Q=\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\le 1\right\}+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\le\frac{1}{2}\right\}+\ldots$$

$$\ldots+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\le\frac{1}{2^k}\right\}+\ldots=2Q,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^kV=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}P+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}Q=2(P+Q).$$

Покажемо процес побудови множини A^kP (рис. 3).

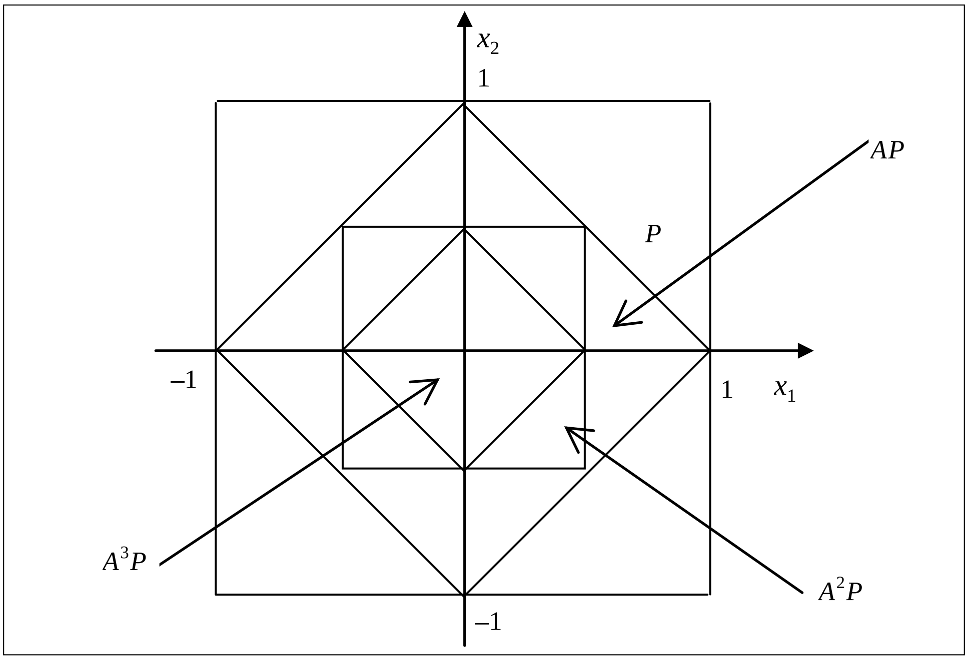

Рис. 3. Множина A^kP

Аналогічно обчислимо $\sum_{k=1}^{\infty}A^kU$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^kU=AU+A^2U+A^3U+\ldots=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{4}P+\frac{1}{4}Q+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2^k}P+\frac{1}{2^k}Q+\ldots=\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_i\right|\le\frac{1}{2},\ i=1,2\right\}+$$

$$+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_i\right|\le\frac{1}{4},\ i=1,2\right\}+\ldots+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_i\right|\le\frac{1}{2^k}\right\}+\ldots$$

$$\ldots+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\le\frac{1}{2}\right\}+\left\{x=(x_1,x_2):\left|x_1\right|+\left|x_2\right|\le\frac{1}{4}\right\}+\ldots$$

$$\ldots + \left\{ x = (x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| \le \frac{1}{2^k} \right\} + \ldots = \left\{ x = (x_1, x_2) : |x_i| \le 1, i = 1, 2 \right\} +$$

$$+ \left\{ x = (x_1, x_2) : |x_1| + |x_2| \le 1 \right\} = P + Q .$$

Звідси

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V \right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U \right) = 2(P + Q) \overset{*}{-} (P + Q) = P + Q .$$

Таким чином отримуємо

$$\left((P + Q) \overset{*}{-} Q \right) + Q = P + Q ,$$

тобто множина $\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V \right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A^k U \right)$ повністю вимітається множиною $U = Q$.

Отже, умова теореми 2 виконується і у випадку

$$M_{\min} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k V \right) \overset{*}{-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k U \right) = (P + Q) \overset{*}{-} Q = P = V .$$

Далі розглянемо, як будується множина $P + Q$ (рис. 4).

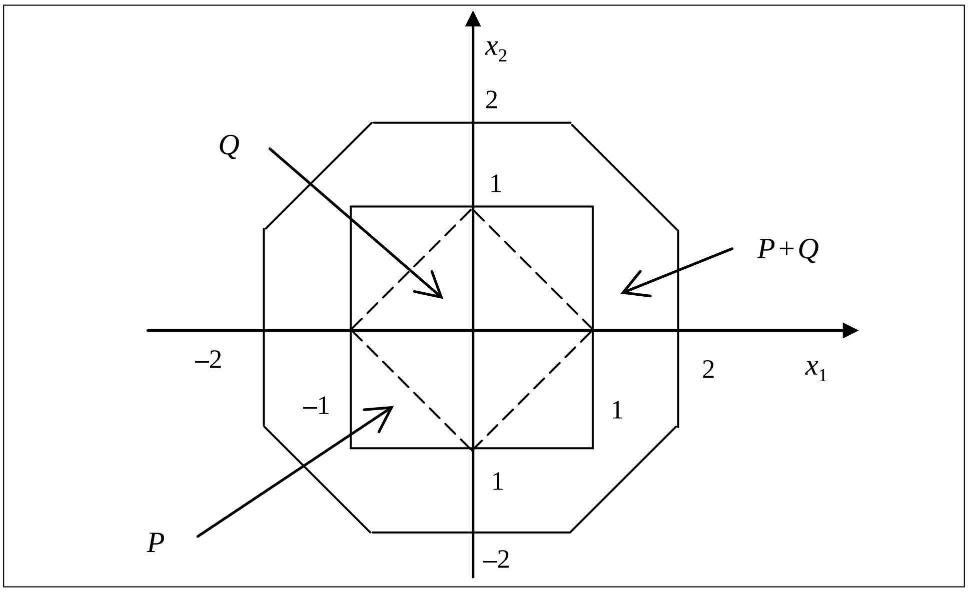

Рис. 4. Множина $P + Q$

Звернемо увагу на те, що у розглянутому випадку формула (7) дала б множину, яка складалася б із одного нуля, що є невірним ($M_{\min} = P$). Це говорить про важливість умов вимітання, які використовуються в теоремах 1 та 2.

ВИСНОВКИ

Запропоновано два різних підходи до побудови інваріантних множин у лінійних різницевих іграх утримання.

У залежності від власних чисел матриці A, що описує динаміку системи, побудовано мінімальну або максимальну інваріантну множину.

Наведено приклад відмінності різних підходів до побудови інваріантних множин.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розгляд даних задач при невиконанні умови повного вимітання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.М.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с аддитивными ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — №1. — С. 74–81.
2. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук. думка, 2006. — 264 с.
3. *Остапенко В.В., Амиргалиева С.Н., Остапенко Е.В.* Выпуклый анализ и дифференциальные игры. — Алматы: Fылым, 2005. — 392 с.
4. *Амиргалиева С.Н., Остапенко В.В., Терещенко И.Н.* Инвариантные множества в дискретной игре удержания // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — №2. — С. 150–154.
5. *Келли Дж.Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 431 с.

Надійшла 20.06.2006