

PACS numbers: 05.40.-a, 73.23.-b, 73.40.Gk, 73.50.Gr, 73.63.-b, 82.20.Wt, 85.35.-p

Влияние цветного шума на время релаксации в туннельных двухбарьерных наноструктурах

В. Н. Ермаков, Е. А. Понежа

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины,
ул. Метрологическая, 14^б,
03680, ГСП, Киев, Украина*

Исследовано влияние цветного гауссового шума на время релаксации в точке неустойчивости для процесса резонансного туннелирования электронов через двухбарьерную нанометровую структуру. Методом численной симуляции рассчитано среднее время первого прохода, в течение которого интенсивность проходящего через туннельную систему потока электронов вырастает с начального низкого значения до определенной достаточно высокой величины, гарантирующей переход на новое стационарное состояние. Это время вычислено при разных значениях параметров шума: интенсивности и времени корреляции τ . Численными расчетами показано, что процесс замедляется в том смысле, что время релаксации монотонно увеличивается, как функция τ ; в то же время рост интенсивности шума ускоряет процесс перехода. При этом в численных расчетах использовано как нелинейное уравнение модели туннельного процесса, так и его линейное приближение. Показано, что линейное приближение позволяет удовлетворительно описать процесс релаксации в точке неустойчивости для рассматриваемой системы. Полученные зависимости сравнены с аналитическими расчетами, выполненными с использованием результатов ряда теоретических работ.

Досліджено вплив кольорового Гауссового шуму на час релаксації в точці нестійкості для процесу резонансного тунелювання електронів через двобар'єрну нанометрову структуру. Методом числової симуляції розраховано середній час першого проходження, під час якого інтенсивність прохідного через тунельну систему потоку електронів зростає з початкового низького значення до певної досить високої величини, що гарантує перехід у новий стаціонарний стан. Цей час обчислено за різних значень параметрів шуму: інтенсивності і часу кореляції τ . Числовими розрахунками показано, що процес уповільнюється в тому сенсі, що час релаксації монотонно збільшується, як функція τ ; в той же час зростання інтенсивності шуму пришвидшує процес переходу. При цьому в числових розрахунках використано як нелінійне рівняння моделю тунельного проце-

су, так і його лінійне наближення. Показано, що лінійне наближення дозволяє задовільно описати процес релаксації в точці нестабільності для розглядуваної системи. Одержані залежності порівнювалися з аналітичними розрахунками, виконаними з використанням результатів ряду теоретичних робіт.

Effects of Gaussian colour noise on the relaxation time close to the point of instability for the process of resonant tunnelling of electrons through a double-barrier nanometre structure are considered. By means of numerical simulation, a mean first passage time for the intensity of electrons going out of the system to reach a certain threshold value, which guarantees the transition to a new stationary state, is evaluated. This time is calculated for different values of noise parameters—intensity and correlation time, τ . As shown by numerical calculations, the process is slowing down in the sense that the relaxation time is monotonically increasing as a function of τ . At the same time, a growth of noise intensity accelerates the transition. Both the nonlinear equation of the model of the tunnelling process and its linear approximation are used in numerical simulations. As shown, the linear approximation allows satisfactory description of the relaxation process near the instability point for the considered system. Obtained dependences are compared with analytical calculations carried out with the use of results of some theoretical works.

Ключевые слова: нанометровая структура, метод численной симуляции, интенсивность потока электронов, время корреляции.

(Получено 19 октября 2010 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с необходимостью рассмотрения моделей, более полно описывающих реальные процессы, широкое распространение получил стохастический анализ физических проблем. Большое внимание уделяется времени корреляции шума, действующего на стохастический процесс. Время корреляции белого шума равно нулю, что соответствует физической ситуации, когда время корреляции шума значительно меньше (на два–три порядка) времени релаксации процесса. Однако имеют место и такие ситуации, когда временные масштабы не имеют четкой границы. Такие процессы корректнее описывать цветным шумом, т.е. шумом с конечным временем корреляции.

Хорошо известно, что наибольшее влияние шум оказывает на систему, находящуюся в нестабильном состоянии, т.е. в точке, в которой система переходит из одного стационарного состояния в другое (точке бифуркации). Возле этих точек флуктуации могут привести к изменению времени жизни состояния, что наблюдается как сдвиг точки бифуркации [1, 2]. Наиболее часто для исследования

релаксации системы из одного состояния в другое используется среднее время первого прохода (СВПП), т.е. усредненное время достижения случайным процессом границы, отделяющей одно стабильное состояние от другого. Подход к расчету СВПП может быть разным в зависимости от используемой модели и характера точки бифуркации, а также от степени корреляции шума. В литературе представлено много разных формул, описывающих зависимость СВПП от параметров шума (интенсивности и времени корреляции τ). В частности, обзор разных формул для СВПП, как функции параметров шума, при прохождении через барьер в случае симметричного двухъямного потенциала дан в работах [3–6].

Расчет времен релаксации в стационарном состоянии приведен в работах [7–10].

Релаксация из нестабильного состояния рассматривалась в работах [1, 2, 11–15].

В данной работе рассмотрено влияние шума с конечным временем корреляции на процесс релаксации системы, которая описывает резонансное туннелирование электронов в двухбарьерных наноструктурах. Известно, что такие структуры обладают способностью резко увеличивать коэффициент пропускания в условиях резонанса, что дало возможность создать на их основе резонансные туннельные диоды (РТД), имеющие большие перспективы использования в различных электронных приборах [16]. Эти диоды имеют нелинейные вольт-амперные характеристики с областью отрицательного дифференциального сопротивления. При настройке на работу в этой области РТД может быть использован как усилитель микроволн, так что изучение влияния шума в таких устройствах в области нестабильности является актуальным.

В рассматриваемой модели туннельного процесса [17] нестабильность имеет место при переходе от состояния с низкой эффективностью туннелирования на состояние с высокой эффективностью. Точка перехода является конечной точкой петли гистерезиса, получающегося в зависимости интенсивности прошедшего через туннельную систему потока электронов от интенсивности падающего потока, т.е. является маргинальной точкой [18]. В работах [19, 20] нами было рассмотрено влияние белого шума на динамику данной системы. В настоящей работе будет рассмотрено влияние шума с конечным временем корреляции на процесс релаксации в этой системе.

2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОГО ТУННЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Процесс туннелирования электронов через двухбарьерную структуру рассматривается в предположении, что процесс туннелирования когерентен. Для описания такого процесса используется мо-

дель, которая описана в работе [17]. В этой работе исследовалось туннелирование через структуру, состоящую из двух одинаковых потенциальных барьеров ширины a , разделенных потенциальной ямой шириной b . Кулоновское взаимодействие между падающей электронной волной и электронами, аккумулярованными в потенциальной яме между барьерами, рассматривалось в приближении Хартри. Решение для амплитуды $D(t)$ волновой функции вышедшего из туннельной системы электрона было найдено в наиболее интересном случае резонансного туннелирования. В этом приближении для волнового вектора падающего электрона k вводился малый параметр расстройки от резонансного значения k_r : $\xi = k - k_r$, $|\xi| / k_r \ll 1$. В пределе высоких и узких барьеров было получено следующее дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды выходящей волны:

$$\frac{dD}{dt} = (iL\xi - 1)D - iL\kappa |D|^2 D + D_0 F_0, \quad (1)$$

где L — обратная полуширина резонансного уровня в k -пространстве ($L = \xi_{1/2}^{-1}$), которая связана с полушириной в энергетическом пространстве соотношением $\delta E_{1/2} = 2\hbar v = \hbar k_r / (m^* L)$, m^* — эффективная масса электрона, $\kappa = \kappa_0 L / b$ — параметр нелинейности, $t = vt'$ — безразмерное время, $F_0 = -\exp[-2ik(a+b)]$.

Вводя для удобства анализа безразмерные переменные: $T = \kappa L |D(t)|^2$, пропорциональную интенсивности электронного потока, прошедшего через систему; $T_0 = F_0 |D_0(t)|^2$, пропорциональную интенсивности падающего электронного потока, и $z = L\xi$, пропорциональную расстройке волнового вектора электрона от резонансного значения, из уравнения (1) в стационарном случае получим следующую зависимость между величинами T и T_0 :

$$T_0 = T[1 + (z - T)^2]. \quad (2)$$

Это уравнение имеет три корня при значениях параметра $z > \sqrt{3}$. В этом случае в системе имеется два устойчивых стационарных состояния и одно неустойчивое. Одно из состояний соответствует высокой пропусканию («верхнее» состояние), а другое — низкой («нижнее» состояние).

Полагая, что фаза волновой функции не изменяется в процессе туннелирования, для процесса вблизи стационарного состояния получим приближенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{d\tau} = -T + \frac{T_0}{1 + (z - T)^2} = f(T). \quad (3)$$

Решая уравнение (3) при значении параметра z , обеспечивающем

нахождение в бистабильной области, и медленном изменении интенсивности T_0 в прямом и обратном направлениях, на графике зависимости T от T_0 получим гистерезис. В конечной точке гистерезисной петли (так называемой, маргинальной точке T_{0K}) осуществляется переход с нижнего на верхнее стационарное состояние. Значения интенсивности выходящего потока в момент перехода с нижнего состояния на верхнее и с верхнего на нижнее, определяются из формулы [17]

$$T_{K,h} = \frac{1}{3} (2z \mp \sqrt{z^2 - 3}). \quad (4)$$

При $z = 3,5$ критическое значение параметра T_{0K} , при котором происходит переход, равно 7,59. Значение z будет использоваться во всех дальнейших расчетах.

Будем рассматривать интенсивность падающего потока T_0 как стохастическую величину, $T_0 = \langle T_0 \rangle + \eta(t)$, где T_0 — значение падающей интенсивности в отсутствие шума, а $\eta(t)$ — флуктуации интенсивности, описываемые гауссовым шумом. Если $\eta(t)$ представляет белый шум, его корреляционная функция определяется выражением

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t - t'),$$

а в случае цветного шума (шума Орнштейна–Уленбека) — выражением

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t - t'|}{\tau}\right),$$

где D — интенсивность, а τ — время корреляции шума. Цветной шум может быть получен из белого шума $\xi(t)$ при решении дифференциального уравнения

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\eta(t) + \frac{1}{\tau}\xi(t). \quad (5)$$

Таким образом, для вычисления стохастического процесса, на который действует цветной шум, нужно одновременно решать уравнение Ланжевена

$$\frac{dT}{dt} = -T + \frac{T_0}{1 + (z - T)^2} + \frac{\eta(t)}{1 + (z - T)^2} \quad (6)$$

и уравнение (5). В уравнении (6) коэффициент при шумовом слагаемом $g(T) = 1 / (1 + (z - T)^2)$ не равен единице, так что здесь $\eta(t)$ — мультипликативный шум.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕН ПЕРВОГО ПРОХОДА В ОКРЕСТНОСТИ НЕСТАБИЛЬНОЙ ТОЧКИ

При распаде неустойчивого равновесного состояния каждая траектория временной эволюции переменной, описывающей состояние, характеризуется временем первого прохода (ВПП), т.е. временем, за которое рассматриваемая переменная впервые достигнет некоторой границы, лежащей на фиксированном расстоянии от точки неустойчивого равновесия. В микроскопической окрестности точки неустойчивого равновесия на переменную действует только малая сила, обусловленная шумом. В пределах этой области переменная движется случайным образом, и ее размер определяется интенсивностью случайной силы [1, 11].

В данной работе методом компьютерной симуляции измерялось распределение ВПП, за которое интенсивность прошедшего через туннельную систему потока электронов достигала определенного фиксированного значения T_{th} , гарантирующего переход системы с нижнего на верхнее стационарное состояние. Распределение ВПП вычислялось с использованием следующей численной процедуры. Начальное значение интенсивности выходящего потока $T(0)$ выбиралось соответствующим нахождению системы на нижнем стационарном состоянии. Система уравнений (5), (6) интегрировалась пошагово по методу, предложенному в работе [21]. Рассчитывались временные последовательности, включавшие 2000 точек. На каждом временном шаге отмечалось значение интенсивности T . Как только оказывалось, что $T \geq T_{th}$, регистрировалось количество за-

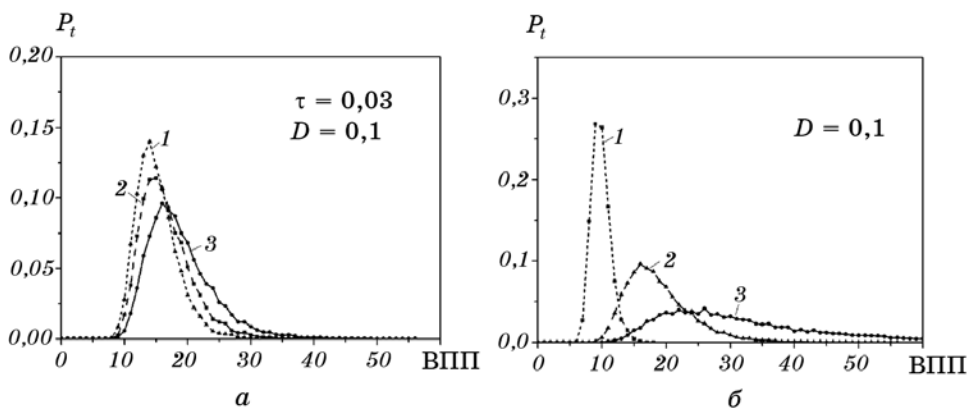


Рис. 1. Распределение вероятности ВПП при интенсивности шума $D = 0,1$ и времени корреляции шума $\tau = 0,03$ при разных интенсивностях падающего потока ($T_0 = 7,7$ — кривая 1, $T_0 = 7,65$ — кривая 2, $T_0 = 7,59$ — кривая 3) (а); $T_0 = 7,59$ и разных временах корреляции шума ($\tau = 0,01$ — кривая 1, $\tau = 0,03$ — кривая 2, $\tau = 0,1$ — кривая 3) (б).

траченных временных шагов, которое запоминалось. Для построения вероятности распределения ВПП, а также вычисления СВПП, эта процедура повторялась 10000 раз.

На рисунке 1 представлены вероятности распределения ВПП (P_t) в зависимости от ВПП для разных значений контрольного параметра T_0 и времени корреляции шума τ при интенсивности шума $D = 0,1$. На рисунке 1, а вероятности распределения ВПП получены при разных значениях интенсивности падающего потока T_0 и времени корреляции шума $\tau = 0,03$. Видно, что при приближении параметра T_0 к точке бифуркации $T_{0K} = 7,59$ (см. кривую 3) пик распределения ВПП сдвигается вправо (т.е. требуется больше времени, чтобы достичь порогового значения), распределение уширяется и увеличивается его асимметрия. Это соответствует выводам работ [1, 11] о том, что флуктуации особенно велики в самой точке неустойчивости и система проводит в этой точке наибольшее время.

На рисунке 1, б показано распределение вероятности ВПП при $T_0 = 7,59$, когда на систему действует цветной шум с разными временами корреляции. Видно, что с увеличением времени корреляции шума увеличивается время, которое система проводит возле неустойчивой точки (см. кривую 3), что приводит к замедлению процесса перехода.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПРОХОДА

Нами были выполнены расчеты СВПП для рассматриваемой туннельной системы в точке неустойчивости. На рисунке 2, а представлены зависимости СВПП от интенсивности шума D при разных значениях времени корреляции τ шума. Графики показывают, что с увеличением интенсивности шума СВПП уменьшается по экспоненциальному закону. Увеличение времени корреляции приводит к увеличению СВПП. Эти выводы совпадают с данными литературы для других систем [3–6, 15].

При рассмотрении распада неустойчивого состояния рядом авторов [1, 12, 14] подчеркивалось, что СВПП определяет предел применимости линейной теории. Разложим функцию $f(T)$, определяющую динамическое поведение системы в детерминистическом случае (см. уравнение (3)), в ряд вблизи точки бифуркации T_K :

$$f(T) = f(T_K) + f'(T - T_K) + \frac{f''(T_K)}{2!} (T - T_K)^2 + O(T - T_K)^3. \quad (7)$$

Введем замену переменных: $\beta = T_0 - T_{0K}$ и $x = T - T_K$. Тогда с учетом выражений для T_{0K} (2) и T_K (4) получим:

$$f(x) = -\alpha x^2 - \gamma \beta, \quad (8)$$

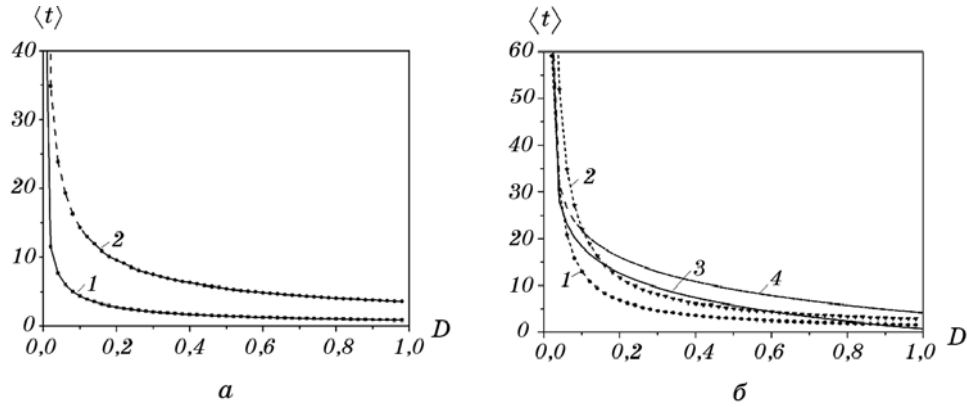


Рис. 2. Зависимость СВПП от интенсивности шума D при разных временах корреляции τ в точке бифуркации $T_{0K} = 7,59$ компьютерная симуляция уравнений (5), (6) при $\tau = 0,005$ (кривая 1), $\tau = 0,02$ (кривая 2) (а); компьютерная симуляция уравнений (5), (10) с $\alpha = 0,001, \gamma = 1$ при $\tau = 0,08$ (кривая 1), $\tau = 0,2$ (кривая 2) (б); уравнение (13) при $\tau = 0,08$ (кривая 3), $\tau = 0,2$ (кривая 4) с $\alpha = 0,065, \alpha_0 = 1, C = -3$).

где α и γ — коэффициенты, значения которых можно получить из уравнений (2), (3) для конкретных значений параметров. Таким образом, вблизи маргинальной точки T_{0K} динамика рассматриваемой туннельной системы с учетом шума определяется уравнением:

$$\dot{x} = f(x) + g(t)\eta(t), \quad (9)$$

где функция $g(T)$ взята в точке T_K и равна $g(T_K) = \gamma$. Для определения СВПП в точке бифуркации следует положить $\beta = 0$. Тогда получим следующее приближенное уравнение:

$$\dot{x} = \alpha x^2 + \gamma\eta(t). \quad (10)$$

На рисунке 2, б представлены зависимости СВПП ($\langle t \rangle$) от интенсивности шума D в маргинальной точке T_{0K} при разных временах корреляции τ с использованием уравнения (10) (кривые 1, 2). Из сравнения графиков на рис. 2, а, б видно, что приближенное уравнение дает качественно тот же характер зависимости, что и нелинейное уравнение, однако имеются отличия в численных данных.

Задача определения аналитического выражения для среднего времени релаксации нестабильного состояния рассматривалась авторами ряда работ [12–14] и др. Использовался метод линеаризации, позволявший свести задачу к простому линейному уравнению для одной переменной x , на которую действует аддитивный цветной шум $\eta(t)$: $\dot{x} = \alpha x + \eta(t)$. Предполагалось, что в начальный момент

времени $t = 0$ система находится в стабильном состоянии x_0 , ассоциируемом со значением контрольного параметра $\alpha = \alpha_0$. Тогда при $t < 0$ система описывается уравнением

$$\dot{x} = -\alpha_0 x + \eta(t). \quad (11)$$

В этом случае x_0 не является величиной произвольной, а определяется решением уравнения (11):

$$x_0 = \int_{-\infty}^0 \eta(t') e^{\alpha_0 t'} dt'.$$

Тогда дисперсия $\langle x_0^2 \rangle$ дается выражением [13, 14]:

$$\langle x_0^2 \rangle = \frac{D}{\alpha_0(1 + \alpha_0 \tau)}. \quad (12)$$

Полагается, что в момент времени $t = 0$ контрольный параметр мгновенно изменяется от значения $-\alpha_0$ к значению $\alpha > 0$, так что система становится нестабильной. Формула для среднего времени распада $\langle t \rangle$ нестабильного состояния была получена в работе [12]:

$$\langle t \rangle = -\frac{1}{2\alpha} \ln \left(C \left\{ \langle x_0^2 \rangle + D \left[\alpha(1 + \alpha\tau)^{-1} \right] \right\} \right), \quad (13)$$

где C — постоянная. В [12] рассматривались независимые начальные условия, т.е. полагалось, что $\langle x_0^2 \rangle$ — константа. В работе [13] при определении $\langle t \rangle$ была учтена зависимость $\langle x_0^2 \rangle$ от параметров шума, данная выражением (12).

На рисунке 2, б приведены графики зависимости $\langle t \rangle$ от интенсивности шума D с использованием формул (13) и (12) (кривые 3, 4). Кривые качественно повторяют зависимости кривых 1, 2, полученные методом численной симуляции.

В работе [15] было получено другое выражение для определения $\langle t \rangle$. Принимая во внимание, что внутри маргинальной области размером $L \propto (D / \alpha)^{1/3}$ влияние шума является доминирующим, было сделано предположение, что эволюция внутри этой области является свободной диффузией:

$$\dot{x} = \eta(t), \quad |x| \leq L. \quad (14)$$

В этом случае ширина распределения ВПП определяется выражением

$$\langle x^2 \rangle = 2D[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})].$$

С учетом предположения, что СВПП, $\langle t \rangle$, для процесса (14) пропор-

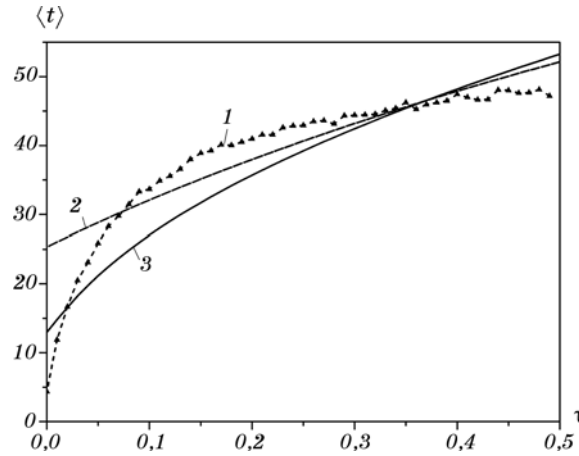


Рис. 3. Зависимость СВПП $\langle t \rangle$ от времени корреляции шума τ в точке бифуркации $T_{OK} = 7,59$ при интенсивности шума $D = 0,01$ (кривая 1 — уравнения (5), (6); кривая 2 — уравнение (13) с $\alpha = 0,02$, $\alpha_0 = 1$, $C = -3$; кривая 3 — уравнение (15) с $\alpha = 0,02$).

ционально времени, за которое $\langle x^2 \rangle$ растянется до величины L^2 , в [15] было получено следующее уравнение для определения $\langle t \rangle$:

$$\langle t \rangle - t_0 = \tau t_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\langle t \rangle}{\tau t_1}\right) \right], \quad (15)$$

где $t_0 = 3^{-1/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^2$, $\Gamma(1/3)$ — гамма-функция, а $t_1 = 2\pi 3^{-1/2}$.

На рисунке 3 график зависимости $\langle t \rangle$ от времени корреляции шума τ , полученный при решении уравнения (15) (кривая 3), сравнивается с результатом компьютерной симуляции уравнений (5), (6) (кривая 1). Кривая 2 является решением уравнения (13).

Из численных расчетов для системы (5), (6) (см. кривую 1) следует, что зависимость СВПП от τ имеет заметную кривизну в области малых τ . Эта особенность видна на кривой 3, полученной с использованием формулы (15).

Полученные зависимости отличаются от характера зависимости СВПП от τ для бистабильной модели с двухъямным потенциалом. Как следует из литературных данных [3–6], в этой модели СВПП увеличивается с увеличением τ по экспоненциальному закону.

5. ВЫВОДЫ

В выполненных исследованиях воздействия цветного шума на ди-

намику резонансного туннельного процесса в точке перехода из состояния с низкой эффективностью туннелирования в состояние с высокой эффективностью туннелирования показано, что увеличение времени корреляции шума приводит к замедлению процесса перехода, а, следовательно, к увеличению времени жизни нестабильного состояния, что может проявиться в сдвиге точки бифуркации.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что характер влияния цветного шума на туннельную систему в точке перехода аналогичен случаю распада нестабильного состояния, при рассмотрении которого можно пренебречь нелинейными членами и рассматривать шум как аддитивный.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. F. de Pasquale, J. M. Sancho, M. San Miguel, and P. Tartaglia, *Phys. Rev. A*, **33**, No. 6: 4360 (1986).
2. M. C. Torrent and M. San Miguel, *Phys. Rev. A*, **38**, No. 1: 245 (1988).
3. R. F. Fox, *Phys. Rev. A*, **37**, No. 3: 911 (1988).
4. G. P. Tsironis and P. Grigolini, *Phys. Rev. A*, **38**, No. 7: 3749 (1988).
5. L. Ramirez-Piscina, J. M. Sancho, F. J. de la Rubia et al., *Phys. Rev. A*, **40**, No. 4: 2120 (1989).
6. J. Masoliver, B. J. West, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. A*, **35**, No. 7: 3086 (1987).
7. A. Hernandez-Machado, M. San Miguel, and J. M. Sancho, *Phys. Rev. A*, **29**, No. 6: 3388 (1984).
8. P. Jung and H. Risken, *Z. Phys. B*, **59**: 469 (1985).
9. J. M. Sancho, R. Manella, and P. V. E. McClintock, *Phys. Rev. A*, **32**, No. 6: 3639 (1985).
10. J. Casademunt, R. Manella, P. V. E. McClintock et al., *Phys. Rev. A*, **35**, No. 12: 5183 (1987).
11. F. Haake, J. W. Haus, and R. Glauber, *Phys. Rev. A*, **23**, No. 6: 3225 (1981).
12. M. Suzuki, Y. Liu, and T. Tsuno, *Physica A*, **138**: 433 (1986).
13. M. James, F. Moss, P. Hanggi, and C. Van den Broek, *Phys. Rev. A*, **38**, No. 9: 4690 (1988).
14. J. M. Sancho and M. San Miguel, *Phys. Rev. A*, **39**, No. 5: 2722 (1989).
15. L. Ramirez-Piscina and J. M. Sancho, *Phys. Rev. A*, **43**, No. 2: 663 (1991).
16. V. V. Mitin, V. A. Kochelap, and M. A. Stroschio, *Introduction to Nanoelectronics. Science, Nanotechnology, Engineering, and Applications* (Cambridge: University Press: 2008).
17. A. S. Davydov and V. N. Ermakov, *Physica D*, **28**: 168 (1987).
18. P. Colet, M. San Miguel, J. Casademunt, and J. M. Sancho, *Phys. Rev. A*, **39**, No. 1: 149 (1989).
19. В. Н. Ермаков, Е. А. Понежа, *Металлофиз. новейшие технол.*, **30**: № 5, 585 (2008).
20. О. О. Понежа, *Укр. фіз. журн.*, **55**: № 2, 244 (2010).
21. J. M. Sancho, M. San Miguel, S. L. Katz, and J. D. Gunton, *Phys. Rev. A*, **26**, No. 3: 1589 (1982).