

С. В. ГОНТОВОЙ

Украина, г. Алчевск

Дата поступления в редакцию
08.10 1997 г.

Оппонент Н. И. НИКИФОРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА СОСТАВНЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Разработана методика для определения температурного поля по сечению составного пьезокерамического преобразователя при индукционной пайке.

The procedure for determination of temperature field by cross-section of component piezoelectric ceramics transducer at induction soldering has been developed.

Составной пьезокерамический преобразователь (СПП) для электромеханических фильтров представляет собой металлический резонатор с установ-

ленными на нем пьезоэлементами и служит для преобразования энергии электрических колебаний в механические и наоборот. При изготовлении СПП существует необходимость соединения керамических пьезоэлементов с металлическим резонатором. Для выполнения этой операции чаще всего применяется пайка; наиболее перспективным способом является индукционная пайка. При проектировании технологического оборудования для индукционной пайки возникает ряд задач, определяемых спецификой объекта. Важной представляется задача минимизации удельной мощности, затрачиваемой на нагревание загрузки (металлического резонатора с пьезоэлементами) до температуры плавления припоя. Индукционный нагрев позволяет достичь этого путем увеличения плотности поверхностных токов в металле и повышения динамики нагрева.

Практическому решению указанной проблемы поможет предлагаемое численное моделирование нагрева загрузки в электромагнитном поле индуктора, которое можно разделить на два этапа: на первом определяются удельная мощность, выделяемая в системе «индуктор — загрузка», и ее связь с параметрами индуктора и генератора высокочастотных колебаний; на втором находится распределение температуры по сечению металлического резонатора (МР), при этом исходными принимаются данные, полученные на первом этапе. На **рис. 1** показаны внешний вид СПП и его сечение плоскостью, параллельной XOZ , для которого определяется температурное поле в процессе пайки.

Определение удельной мощности в системе «индуктор — загрузка»

Для решения первой задачи можно предложить следующий путь. Рассмотрим наиболее распространенный в автоматизированных индукционных установках канал регулирования температуры загрузки с помощью тока индуктора [1, с. 221]. Как известно, зависимость температуры i -той точки загрузки Θ_i от тока индуктора носит нелинейный характер, и ее можно представить последовательным включением двух фиктивных звеньев (см. **рис. 2**).

Входом первого звена является ток индуктора $I_{ин}$, выходом — удельная мощность на поверхности загрузки p_0 . Для второго звена вход — p_0 , выход — температура Θ_i .

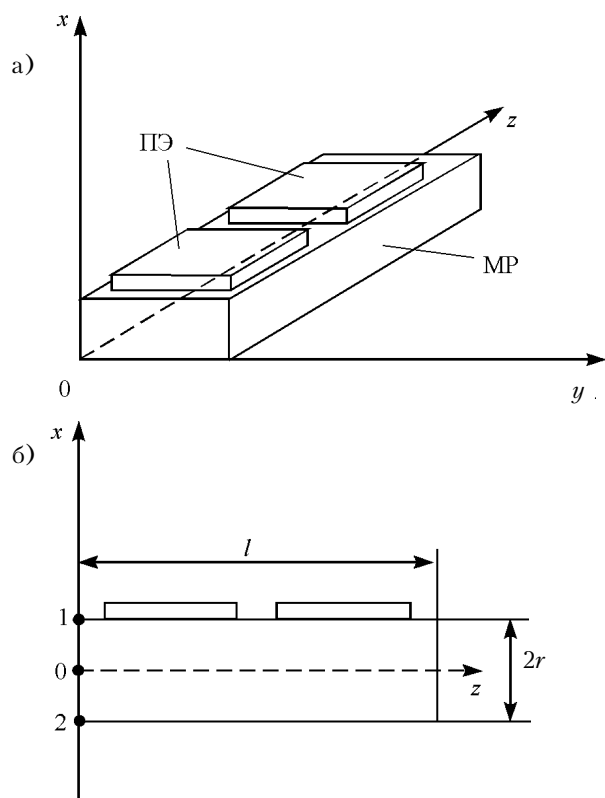


Рис. 1.

a — СПП в декартовой системе координат;
ПЭ — пьезоэлементы; МР — металлический резонатор;
b — сечение СПП плоскостью, параллельной плоскости XOZ ;
 l — длина СПП; $2r$ — толщина МР

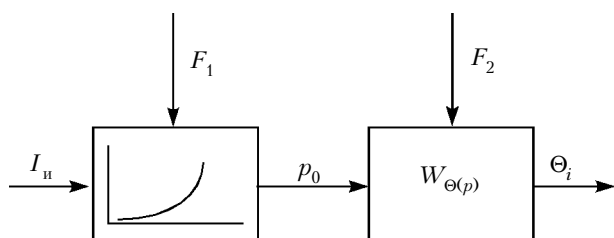


Рис. 2. Эквивалентная схема замещения индуктора с нагрузкой (F – возмущение)

Первое звено является нелинейным и практически безынерционным, связь между его входом и выходом (передаточная функция) описывается выражением

$$p_0 = kI_n^2, \quad (1)$$

где k – коэффициент, определяемый из электрического расчета индуктора.

Второе звено с передаточной функцией $W_{\Theta(p)}$ в схеме замещения «индуктор – нагрузка» является линейным при постоянстве теплофизических свойств нагрузки. Функция $W_{\Theta(p)}$ в общем случае зависит от выбора координат точки i в объеме нагрузки, по температуре которой ведется регулирование ее теплового режима. Эта точка должна быть доступна для наблюдения, а ее температура достаточно адекватно отражать температурное поле всей заготовки. Этим требованиям отвечает точка, выбранная на поверхности МР.

Основными факторами, действующими на схему, являются частота тока индуктора f и наличие зажимного приспособления, поглощающего электромагнитную энергию в поле индуктора, причем изменение частоты существенно сказывается на значении коэффициента k . Влияние частоты тока на передаточную функцию $W_{\Theta(p)}$ выражено не настолько явно.

Для определения коэффициента k представим удельную поверхностную мощность p_0 как отношение мощности P_2 , выделяющейся в нагрузке, к площади ее поверхности S_2 :

$$p_0 = P_2 / S_2. \quad (2)$$

Активную мощность в нагрузке (P_2) можно определить, используя теорему Умова – Пойтинга для мгновенных значений [2, с. 346 – 350; 3, с. 135]:

$$-\oint_S \vec{\Pi} dS = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV, \quad (3)$$

где μ , ϵ и γ – магнитная проницаемость, диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость материала резонатора, соответственно;

E и H – напряженность электрического и магнитного поля, соответственно.

Левая часть выражения представляет собой поток вектора Пойтинга сквозь замкнутую поверхность

S , ограничивающую объем V . В соответствии с законом Джоуля – Ленца в дифференциальной форме γE^2 – энергия, выделяющаяся в виде теплоты в единице объема в единицу времени:

$$-\operatorname{div} \vec{\Pi} dV = \gamma E^2. \quad (4)$$

Если поле не изменяется во времени, то справедливо выражение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, для мощности P_2 получим:

$$P_2 = \int_V \gamma E^2 dV = \gamma E^2 V, \quad (6)$$

где V – объем нагрузки.

Напряженность электрического поля E можно определить исходя из параметров индуктора и генератора ВЧ-колебаний. Опустив промежуточные преобразования, запишем окончательное выражение:

$$E = \frac{p^2 r}{\gamma \mu_a} \cdot \frac{LI}{\omega S_n} \cdot \frac{\operatorname{sh}(px)}{\operatorname{sh}(pr)}, \quad (7)$$

где $p = \sqrt{\omega \mu_a \gamma}$ – глубина проникновения электромагнитного поля в материал резонатора;

r – половина толщины резонатора;

L , ω , S_n – соответственно индуктивность, число витков и площадь поперечного сечения индуктора;

ω – круговая частота электромагнитного поля;

μ_a – абсолютная магнитная проницаемость материала резонатора;

x – координата.

Выражения (6) и (7) устанавливают связь параметров индуктора и генератора ВЧ-колебаний с мощностью, выделяющейся в металлической подложке. Из выражений (2) и (7) определим коэффициент k :

$$k = \frac{V}{S_2 \gamma} \left(\frac{p^2 r}{\mu_a} \cdot \frac{L}{\omega S_n} \cdot \frac{\operatorname{sh}(px)}{\operatorname{sh}(pr)} \right)^2. \quad (8)$$

Исследование динамики нагрева СПП в индукторе

Математическая модель индукционного нагрева СПП создается с целью выяснения физической картины процесса нагрева и исследования влияния режимов генератора высокочастотных колебаний на динамику нагрева составного пьезопреобразователя. В модели учтены влияние внутренних источников тепла и неоднородность нагрузки.

Математическая модель процесса построена на основе уравнения теплопроводности, которое относится к дифференциальным уравнениям в частных производных и в прямоугольной системе координат записывается следующим образом:

$$\chi \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) = \frac{dT}{dt}, \quad (9)$$

где $\chi = \frac{\rho c}{\lambda}$ — коэффициент температуропроводности;

λ — коэффициент теплопроводности;
 ρ — плотность;
 c — удельная теплоемкость.

Уравнение решалось методом Галеркина для вариационных задач [4, с. 716; 5 с. 603—605]. Согласно этому методу корректная постановка задачи в данном случае возможна при наличии двух граничных и одного начального условий. Для их определения использовалась схема, приведенная на рис. 1.

Здесь необходимо сделать некоторые допущения, которые облегчат решение поставленной задачи. Из анализа процесса нагрева металла в индукторе можно сделать вывод, что температурное поле вдоль осей y и z практически стационарно (краевыми эффектами на торцах подложки можно пренебречь), кроме того, в данном случае $l \gg r$.

На основании принятых допущений можно записать:

$$\frac{dT}{dy} = 0 \text{ и } \frac{dT}{dz} = 0. \quad (10)$$

В такой постановке задача сводится к плоской и совместно с граничными и начальными условиями записывается следующим образом:

$$\chi \frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{dT}{dt}; \quad (11)$$

$$T(r, t) = T_l(t); \quad (12)$$

$$g(0, t) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (13)$$

$$T(x, 0) = T_l(0). \quad (14)$$

Здесь $g(0, t)$ — тепловой поток через сечение, проходящее по оси 0.

Начальное условие (14) задает температуру по сечению загрузки в начальный момент времени. Уравнение (11) с граничными условиями (12) и (13) и начальным условием (14) представляет собой корректную постановку задачи. Для дальнейшего решения уравнения (11) заменим точные значения функций на приближенные, т. е. применим аппроксимацию.

Выберем для температуры T следующую аппроксимацию общего вида:

$$T \approx \hat{T} = \sum_{k=1}^N T_k(t) \cdot q_k(x), \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где q_k — базисные функции.

Подстановка аппроксимации (15) в уравнение (11) приводит к невязке (σ):

$$\rho \cdot c \frac{d\hat{T}}{dt} - \lambda \frac{d^2 \hat{T}}{dx^2} = \sigma. \quad (16)$$

$$\int_0^r \sigma \cdot q_k(r) dx \xrightarrow{k=1, 2, \dots, \infty} 0. \quad (17)$$

Выражение (17) представляет собой систему N уравнений и является при $N \rightarrow \infty$ условием $\sigma=0$, а при конечном N — условием минимальности σ .

Для вариации температуры запишем:

$$\delta \hat{T} = \sum_{k=1}^N \delta \hat{T}_k q_k(x). \quad (18)$$

Проварьируем уравнение (16) с учетом (17) и (18):

$$\int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial t} \cdot \delta T - \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta T \right] dx = 0. \quad (19)$$

Преобразуем выражение (19), принимая во внимание граничное условие (13) и то, что формально при $x=r$ $\delta T=0$. Окончательно получим следующую вариационную формулировку задачи:

$$\int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial t} \delta T + \chi \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial x} \right] dx = 0. \quad (20)$$

Определение аппроксимирующих соотношений

При использовании для аппроксимации кусочно-линейных базисных функций (15) q_k являются полиномами Лагранжа, а коэффициенты аппроксимации T_k имеют смысл узловых значений функции.

Для производных и вариаций автоматически получим (аргументы t и x опустим для краткости):

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \sum_{k=1}^2 \dot{T}_k^i \cdot q_k^i; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 T_k^i \cdot q_k^i; \quad (21)$$

$$\delta \hat{T} = \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \cdot q_k^i; \quad \frac{\partial \delta \hat{T}}{\partial x} = \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \cdot q_k^i, \quad (22)$$

где \dot{T}_k^i — производная температуры по времени;
 q_k^i — производная полинома по координате x .

Для удобства дальнейших вычислений перейдем к нормированной местной координате ξ при помощи соотношения:

$$\xi = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x - x_i}{h_i}. \quad (23)$$

Применив аппроксимации (21) и (22), найдем аппроксимированный вклад элемента i :

$$\sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \sum_{j=1}^2 \dot{T}_j^i h_i \int_{r_i}^{r_{i+1}} q_k^i q_j^i d\xi + \sum_{k=1}^2 \delta T_k^i \sum_{j=1}^2 T_j^i \frac{\chi}{h_i} \int_{r_i}^{r_{i+1}} q_k^i q_j^i d\xi = 0. \quad (24)$$

В матричной форме последнее выражение имеет следующий вид:

$$[\delta T^i]^T \cdot \mathbf{a}^i \cdot \dot{T}^i + [\delta T^i]^T \cdot \mathbf{c}^i \cdot T^i = 0, \quad (25)$$

где $\mathbf{a}^i, \mathbf{c}^i$ — матрицы размерами 2×2 :

$$\mathbf{a}^i = [a_{kj}^i] = h_i \begin{bmatrix} \int_0^1 q_1^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_1^i q_2^i d\xi \\ \int_0^1 q_2^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_2^i q_2^i d\xi \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c}^i = [c_{kj}^i] = \frac{\chi}{h_i} \begin{bmatrix} \int_0^1 q_1^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_1^i q_2^i d\xi \\ \int_0^1 q_2^i q_1^i d\xi & \int_0^1 q_2^i q_2^i d\xi \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Суммируя вклады, получаем аппроксимацию исходного уравнения (24) в виде

$$[\delta T]^i \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{T} + [\delta T]^T \cdot \mathbf{C} \cdot T = 0, \quad (27)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{C} — глобальные матрицы коэффициентов.

Для получения глобальных матриц коэффициентов необходимо произвести ансамблирование вкладов элементов матриц \mathbf{a}^i и \mathbf{c}^i .

Из (27) следует:

$$[\delta T]^T (\mathbf{A} \dot{T} + \mathbf{C} T) = 0, \quad (28)$$

или, в силу произвольности и независимости компонентов $[\delta T]^T$:

$$\mathbf{A} \dot{T} + \mathbf{C} T = 0. \quad (29)$$

Выражение (29) определяет систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и может быть решена любым из существующих способов. Для того, чтобы учесть граничное условие (12), необходимо исключить первое уравнение из системы (29) и перенести в правую часть первые столбцы матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} как известные. В итоге получим:

$$\mathbf{A} \dot{T} + \mathbf{C} T = \mathbf{D}, \quad (30)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{a}_{il}^i] \cdot f'(t) + [\mathbf{c}_{il}^i] \cdot f(t), \quad (31)$$

где $f(t), f'(t)$ — функция температуры от времени на поверхности металлического резонатора и ее производная, соответственно.

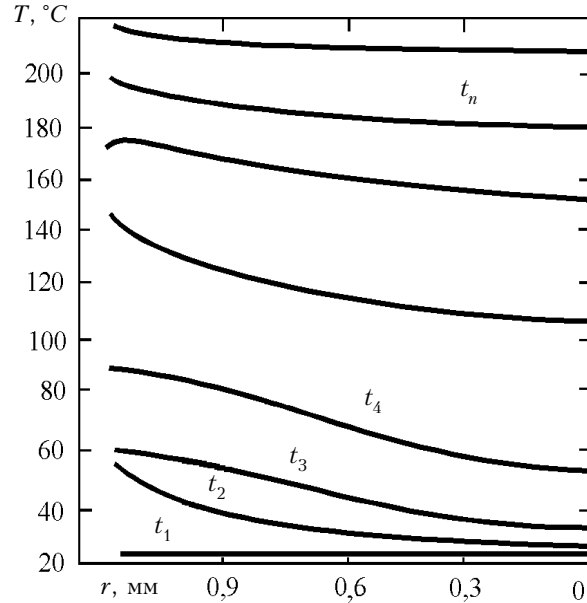


Рис. 3. Распределение температуры по оси x на различных временных слоях

На рис. 3 показаны результаты моделирования теплового поля в загрузке, выполненные с помощью математического пакета MATLAB. Приведенные графики соответствуют реальной физической картине нагрева и отражают распределение температуры в различные моменты времени t.

Описанный метод моделирования индукционного нагрева СПП позволяет связать параметры и режимы работы источника высокочастотного напряжения с физическими характеристиками процесса нагрева: распределением температуры и длительностью.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Автоматическое управление электротермическими установками / А. М. Кручинин, К. М. Махмудов, Ю. М. Миронов и др. — М. : Энергоатомиздат, 1990.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М. : Наука, 1989.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М. : Высш. шк. 1983.
4. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. — М. : Наука, 1984.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: Кн. 1. — М. : Физматгиз, 1962.