

ПРАЦЬОВИТИЙ

Микола Вікторович – доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова, в.о. завідувача відділу динамічних систем та фрактального аналізу Інституту математики НАН України

СИТА

Галина Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, фізико-математичний факультет Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова



Георгій Феодосійович Вороний
(28.04.1868–20.11.1908)

ГЕОМЕТРИЧНІ МОЗАЇКИ ВЕЛИКОГО УКРАЇНЦЯ

До 150-річчя від дня народження професора Георгія Вороного

Георгій Феодосійович Вороний – всесвітньо відомий математик, один з найвизначніших учених, яких дала світовій науці українська земля. Ще за життя його наукові праці вражали сучасників геніальністю спалахів математичної думки. У фаховому середовищі його давно визнано одним з найяскравіших талантів в історії математики на межі XIX–XX ст. Однак найбільшого значення його науковий доробок набув саме в наш час у зв'язку з розвитком комп'ютерних наук.

Сама лише математика, як яскрава зірка,
сяє переді мною, на неї всі мої сподівання.

Георгій Вороний «Щоденник»

Георгій Феодосійович Вороний¹ народився 28 квітня (16 квітня за старим стилем) 1868 р. в с. Журавка Полтавської губернії (нині Варвинський р-н Чернігівської обл.) в родині відомого своєю просвітницькою діяльністю випускника Київського університету Святого Володимира Феодосія Яковича Вороного, ініціатора створення в Києві безоплатних недільних шкіл для робітничої молоді, професора філології Ніжинського ліцею, потім – директора Прилуцької гімназії. Юний Георгій ще у шкільні роки виявив неабиякий інтерес і здібності до математики. Закінчивши Прилуцьку гімназію, з 1885 по 1889 р. він навчався у Петербурзькому університеті.

Саме в університетські роки Георгій остаточно визначився зі своїм майбутнім – математика. Його юнацька любов до цієї науки, загартована винятковою внутрішньою самодисципліною і щоденною наполегливою працею, поступово перетворилася на непереборну пристрасть до пошуку нових математичних фактів, зміцнивши його віру у власні творчі можливості. Цей про-

¹ Життєвий шлях Г.Ф. Вороного вперше було висвітлено у статті Й.З. Штокала і Й.Б. Погребиського «Жизнь и научная деятельность Г.Ф. Вороного», опублікованій у 3-му томі повного зібрання наукових праць ученого [1]. Ця стаття стала основою для подальшого вивчення біографії Г.Ф. Вороного, зокрема й досліджень авторів цієї статті.

цес самоусвідомлення себе як ученого яскраво відображено у щоденнику Вороного, який, на щастя, частково зберігся (уривки з нього увійшли до збірника науково-популярних статей, виданого Інститутом математики НАН України [2]). Щоденник — це щира сповідь юнака перед самим собою. Вороний не лише фіксує події, а й прискіпливо аналізує свої вчинки, намагається глянути на себе збоку неупередженим поглядом, іронізує над собою, іноді, в тяжкі хвилини сам себе підбадьорює. Автор щоденника — людина широкого мислення, активна, вразлива, здатна до співчуття і готова прийти на допомогу. Гортаючи сторінки щоденника, мимоволі починаєш симпатизувати авторові, захоплюєшся його глибокою порядністю, небайдужістю, його намаганнями, як він сам пише, дійти до всього серцем, а не розумом.

Під час навчання в університеті Вороний отримав стипендію лише на четвертому, останньому курсі. Матеріальна скрута постійно тяжіла над ним. Коштів, що надсилав батько, було недостатньо, доводилося підробляти, переважно приватними уроками. Мрія мати окрему кімнату в колегії також була нездійсненою. Життя в Петербурзі та нове середовище, в яке він потрапив, часто викликали у Георгія почуття самотності. Його думки знов і знов поверталися в минуле, до спогадів про батьківську домівку, про гімназичні роки в Прилуках...

1887 рік

Понеділок, 16-го березня

Від сьогодні я почав готуватися до екзаменів [...] Сьогодні вже почали рубати кригу на Неві, тож слід чекати, що невдовзі вона скресне. Товариш мій десь дістав вербових гілочок, з котиками вже, і я, дивлячись на них, довго не міг заспокоїтися. Все мені ввижалося минулі роки, коли в цей час від передчуття великих свят солодко завмирало серце, коли за два тижні до Великодня вже починали наливати воском яйця, з яких, щоправда, ніколи нічого не виходило. Нині же заглиблений у зовсім інші клопоти.

31 березня

Ось уже другий день я сиджу над розрахунками сонячного затемнення на 7-ме серпня. Вчора працював 10 годин, сьогодні годин 7, робота значно просунулася вперед, але я почувуюся страшенно втомленим, бо до того ж ціліснітькі два дні не виходив на свіже повітря. Цифри,



Студент
Петербурзького
університету
Георгій Вороний

цифри... Я вчора ними так напхав собі голову, що вони мучили мене цілу ніч, так що я навіть мушеним був піднятися і полити собі голову водою. Так само і сьогодні доведеться вдатись до цього засобу.

Працювати доводилося дуже наполегливо і старанно, часто навіть за рахунок сну. Однак при цьому Вороний не став відлюдником, навпаки, він живо відгукувався на всі події. Свої смаки і життєві висновки юнак свідомо чи підсвідомо звіряв з думкою найавторитетніших для нього людей — батька і вчителя математики Прилуцької гімназії І.В. Богословського.

Невтомна праця, самодисципліна і захоплення математикою невдовзі дали свої плоди, і вже напередодні 1889 р. Вороний занотовує у щоденнику:

1888 рік

31 грудня

[...] Так, цей рік пройшов для мене не даремно. Я багато, дуже багато працював і впевнився, що здатний працювати, а також, здається, встиг у цьому переконати інших.

Минулого року в цей самий час я писав із цього ж приводу тільки неслівне побажання, і ось я бачу його здійсненим: те, чого я боявся, не існує. Я знаю, я твердо вірю, що на ґрунті вченої діяльності і тільки на ньому я знайду своє щастя... Я не поет і не знаю того натхнення, яке описують поети, але я знаю хвилини несамодоволення, не гордості — все це приходить потім — а моменти, коли розум цілком охоплює ідею, яка раніше, як м'ячик, вислизала. Тут я забуваю, що я існую [...]

Основною галуззю досліджень, яку обрав для себе Вороний, була теорія чисел. Саме на цьому напрямі в той час у Петербурзі були зосереджені наукові математичні дослідження. У другій половині XIX ст. тут у галузі теорії чисел плідно працювали такі авторитетні фахівці, як професори П.Л. Чебишов, А.А. Марков, Є.І. Золотарьов. У результаті їхньої діяльності сформувався науковий напрям, який згодом дістав назву «Петербурзька школа теорії чисел». Науковим наставником Вороного став професор А.А. Марков.

Дебют Вороного в математичному гуртку відбувся 2 грудня 1888 р. Він виступив на засіданні з повідомленням про доведення однієї з властивостей чисел Бернуллі запропонованим ним способом. Професор Марков дуже схвально поставився до його викладу. Перший успіх надихнув і примножив сили. З гідною подиву наполегливістю Вороний продовжує свої дослідження і отримує новий вагомий результат — доводить теорему Адамса, яку той свого часу сформулював без доведення. На сторінках щоденника молодий дослідник викладає своє доведення і разом доводить ще одну теорему — Штаудта. Він продовжує далі обмірковувати свій результат і знаходить нове узагальнення. Результати Георгій подає Маркову, який, ознайомившись з ними, запропонував підготувати роботу до друку, але вимогливий до себе Вороний прагне розширити своє дослідження, узагальнити його, зробити досконалішим за формою.

У 1890 р. стаття Г. Вороного «О числах Бернуллі» було опубліковано в «Сообщениях Харьковского математического общества» [3]. Це перше важливе наукове досягнення молодого вченого виявило фундаментальні властивості чисел Бернуллі, вивчення яких триває й донині.

Нові відкриття так захоплюють Георгія, що йому тепер доводиться примушувати себе займатися іншими справами, скажімо, підготовкою до екзаменів. На початку квітня 1889 р. він виїжджає в Журавку і продовжує напружено працювати над своїми дослідженнями та готуватися до осінніх випускних іспитів.

Восени 1889 р. Георгій Вороний блискуче склав випускні екзамени і захистив кандидатську роботу, темою якої було його дослідження про числа Бернуллі. (За тодішніми правилами студент, який закінчив університет і не представив роботу на одну із запропонованих тем, мав звання дійсного студента; якщо ж він представив роботу і вона діставала позитивну оцінку, випускник здобував звання кандидата. Отже, термін «кандидатська робота» відповідає теперішній дипломній роботі.) У листопаді 1889 р. Георгій Вороний одержав пропозицію залишитися при університеті для підготовки до магістерських екзаменів на основі подання, підписаного усіма провідними професорами-математиками: А.А. Марковим, О.М. Коркіним, Ю.В. Сохоцьким, К.О. Поссе. Крім того, було задоволено прохання факультету про надання йому стипендії. Вороного також призначили позаштатним учителем у Петергофській прогімназії. Майбутнє щасливо визначилося...

Наукові інтереси молодого вченого надалі зосередилися на теорії алгебраїчних чисел, точніше — на теорії ірраціональностей третього степеня. Дві великі роботи, написані ним за цим напрямом, становили основу обох його дисертацій — магістерської «О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени», С.-Петербург [4], захищеної у квітні 1894 р., і докторської «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей» [5], яка вийшла окремим виданням у Варшаві в 1896 р. та була захищена в 1897 р., і принесли йому визначний успіх.

За допомогою алгоритму Вороного в 1976 р. було протабульовано дійсні кубічні поля з додатним дискримінантом до 100 000. І лише у 1985 р. алгоритм Вороного узагальнив Й. Бухманн (Німеччина).

Ось що в 1934 р. писав з цього приводу академік Д.О. Граве у своєму щоденнику (рукопис цього щоденника зберігається в бібліотеці Інституту математики НАН України): «Георгій Вороний — геніальний український математик. Він під час свого перебування в Петербурзькому університеті займався з гідним подиву успіхом кубічною областю і в цій області

зробив геніальне відкриття. Він узагальнив на кубічну область алгоритм неперервних дробів, що дає алгебричні одиниці в квадратичній області. Це узагальнення марно шукали з часів Ейлера протягом XIX століття усі найвидатніші математики. Вийшов таким чином алгоритм Вороного».

Одержаний Вороним результат був настільки разючим, що професор А.А. Марков довго не вірив у правильність викладок Вороного і не міг зважитися схвалити роботу. Він викликав Вороного до Петербурга і запропонував йому знайти корінь рівняння $r^3 = 23$, для якого він штучним способом один корінь уже отримав. Вороний за допомогою свого алгоритму обчислював упродовж трьох годин і знайшов інший корінь. Таким чином було доведено, що алгоритм дійсно є. Обидві дисертаційні роботи 1896 р. було відзначено премією ім. В. Буняковського Петербурзької академії наук.

Після захисту магістерської дисертації (1894) Вороний одержав призначення до Варшавського університету, де працював майже все життя. Професорське навантаження в університеті забирало багато часу. Вороний змушений був викладати кілька курсів, оскільки крім нього у Варшавському університеті тоді було тільки два професори з математики. Студентів різних курсів навіть об'єднували під час його лекцій. Вороний ставився до викладання дуже відповідально, намагався познайомити слухачів з новітніми досягненнями науки, розповідав студентам і про свої нові результати. Під час літньої відпустки, яку він майже завжди проводив у рідній йому Журавці, Вороний майже весь вільний час віддавав своїм дослідженням.

З 1898 р. Георгій Вороний працював також деканом механічного факультету Варшавсько-політехнічного інституту.

У 1898 р. Московське математичне товариство обрало Вороного своїм членом. У серпні того самого року він брав участь у роботі X з'їзду російських природознавців і лікарів у Києві, в 1901 р. був учасником наступного, XI з'їзду російських природознавців і лікарів у Петербурзі і виступив на ньому з трьома допо-



Георгій Вороний. Журавка, орієнтовно 1907 р.

відами. В одній із них Вороний запропонував оригінальний метод узагальненого підсумовування розбіжних рядів. Цей метод через 28 років перевідкрив і ввів у науковий обіг данський математик Ньорлунд (N.E. Nörlund), тривалий час він був відомий у науці як метод Ньорлунда.

На міжнародному математичному з'їзді в Гейдельбергу (1904) Вороний виступив з двома доповідями. Тут він особисто познайомився з німецьким математиком Г. Мінковським, автором монографії «Геометрія чисел» (1896). Саме Г. Мінковського і Г. Вороного вважають основоположниками геометричної теорії чисел — розділу теорії чисел, який вивчає розв'язування теоретико-числових проблем із застосуванням засобів геометрії.

У 1903–1904 рр. виходять друком дві великі праці Вороного з аналітичної теорії чисел. Метод знаходження членів асимптотичного розкладу арифметичних функцій, запропонований Вороним у 1903 р. в роботі [6], формула підсумовування Вороного і тотожність Вороного [7] стали визначальними для подальших досліджень в аналітичній теорії чисел.

У 1907 р. Вороного обрано членом-кореспондентом Петербурзької академії наук.

У зв'язку з революційними подіями 1905–1907 рр. університет і Політехнічний інститут

у Варшаві було закрито. Георгій Вороний, відчуваючи, що доведеться переїжджати в інше місце, звернувся листом до професора Київського університету Св. Володимира Б.Я. Букреева з проханням поклопотати за нього відносно викладання в цьому університеті, тим більше, що Київ — місто знайоме і близьке йому ще з дитинства. Мати Георгія Вороного, Клеопатра Михайлівна Личкова, викладала у Київській жіночій гімназії на Подолі та Подільській жіночій недільній школі. Личкови мали спадкове почесне громадянство: при хрещенні Георгія в церковній книзі його хресними батьками записано Івана Яковича Вороного (студента Ніжинського ліцею, ймовірно, брата Феодосія) і Любов Михайлівну Личкову (доньку київського почесного громадянина). На жаль, це клопотання Вороного задоволено не було (лист Г.Ф. Вороного до Б.Я. Букреева зберігається в Інституті рукопису Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського).

Отже, групу професорів варшавських вишів (серед них і Вороного) направили до Новочеркаська для створення там Донського політехнічного інституту. Вороний перебував у Новочеркаську близько року, виконуючи обов'язки декана механічного факультету.

Восени 1908 р. заняття у Варшавському університеті поновилися і Вороний повернувся у Варшаву. Навантаження стало ще більшим, оскільки він залишився єдиним професором з математики. На допомогу йому з Політехнічного інституту запросили професора І.Р. Брайцева. Вороному довелося викладати новий для нього курс — математичний аналіз. Він склав підручник з цієї дисципліни, який було надруковано за редакцією Брайцева у Варшавських університетських відомостях у 1909–1911 рр. Згодом цей підручник з диференціального і інтегрального числення було перевидано в Києві у 1914 р.

Протягом багатьох років Вороний працював над питаннями арифметичної теорії квадратичних форм. Він мав особливу звичку обмірковувати і тримати свої висновки в голові доти, доки вони остаточно не визріють і не набудуть належної їм досконалої форми. У 1908 р. Во-

роний надсилає свою роботу до одного з провідних на той час математичних журналів, який було засновано в 1826 р. німецьким математиком Креллем (A.L. Krelle), — *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, разом із таким супровідним листом: «Протягом дванадцяти років я вивчав властивості паралелоєдрів. Я можу сказати, що це тернисте поле для досліджень і що одержані результати, викладені в цьому мемуарі, коштували мені дорого... Тривимірні паралелоєдри відіграють тепер важливу роль у теорії кристалічних тіл, і кристалографи вже звернули увагу на властивості цих дивних многогранників, але до цього часу кристалографи вдовольнялися описом паралелоєдрів із суто геометричної точки зору. Я вже давно помітив, що задача розбиття n -вимірного аналітичного простору на опуклі конгруентні многогранники тісно пов'язана з арифметичною теорією додатних квадратичних форм».

Два мемуари Вороного, надруковані в журналі Крелля в 1908–1909 рр. [8, 9], поряд із роботами Г. Мінковського (1896, 1907) стали основоположними у створенні нової галузі математики — геометрії чисел.

Напружена розумова праця потребувала титанічних зусиль, а здоров'ям Вороний не відрізнявся. Лікарі діагностували в нього хворобу жовчного міхура, яка в періоди свого загострення завдавала йому багато фізичних і моральних страждань. Тепер він розробляв новий напрям досліджень — невизначені квадратичні форми, про які говорив із великим захопленням. Несприятливі умови життя в Новочеркаську спричинили серйозне загострення його хвороби. Лікарі наполягали, щоб він відпочив від тяжкої розумової праці, поїхав на лікування до Карлсбада, але вчений не міг припинити свої дослідження і, як і в попередні роки, перебрався на літо до рідної Журавки, яка завжди давала йому сили і здоров'я. Дійсно, у Журавці його самопочуття значно поліпшилося, і він повернувся до Варшави. Проте наприкінці жовтня хвороба різко загострилася, і 20 листопада (7 листопада за старим стилем) 1908 р. Георгія Вороного не стало.

Сім'я Георгія Вороного. У середньому ряду (зліва направо): дружина Георгія Ольга Крицька, Георгій Вороний, його батьки і сестра Надія Єрмакова в оточенні дітей і чотирьох служниць (сестра Георгія Феодосійовича Надія рано овдовіла і він узяв на себе матеріальне забезпечення її сім'ї)



28 листопада 1908 р. В. Серпінський, найталановитіший з учнів Георгія Вороного, вшановуючи пам'ять свого геніального вчителя, прочитав лекцію у Львівському університеті, яку розпочав словами: «Нещодавно теорія чисел втратила в особі професора Георгія Вороного одного зі своїх найвидатніших представників» [10].

Згідно з останньою волею вченого, його поховали у Журавці. Забальзамоване тіло зберігалось у спеціальному склепі, але на початку 30-х років ХХ ст. цей склеп було зруйновано, і односельці перепоховали останки великого математика в могилі його батька Феодосія Вороного.

Передчасна смерть Георгія Вороного вразила всіх, хто його знав. «Нікому не вірилося, що помер Георгій Феодосійович, якого всі так глибоко поважали і любили. Відчувалося, що трапилося щось надзвичайне. Всі усвідомлювали, що вони передчасно втратили видатного вченого, славного професора, який був гордістю і окрасою двох вищих шкіл Варшави... Проводжаючи останки покійного на вокзал для перевезення на місце поховання в містечко Журавку, всі сумували ще й тому, що втратили назавжди правдиву, чуйну і сердечну людину...», —

писав у некролозі професор Браїцев [11]. Він висловив також глибокий жаль з приводу того, що з тієї грандіозної роботи з теорії невизначених квадратичних форм, яку розробляв Вороний, він встиг викласти на папері лише окремі частини: «Навряд чи з них вдасться відтворити хоча б частково ті хитромудрі геометричні міркування, які привели до згаданого в щоденнику алгоритма, про який покійний завжди говорив з великим піднесенням і ентузіазмом. Щоб зробити це, не досить у загальних рисах знати ті напрями думок покійного, а потрібно бути таким же глибоким знавцем теорії квадратичних форм з n змінними, яким він був, потрібно володіти тією дивовижною технікою, яку під кінець свого життя опанував покійний, а ще потрібно так самовіддано любити цю область математичної науки, як любив її він...» [11].

Рукописи Г. Вороного, кілька зошитів його математичного щоденника родичі вченого передали до відділу рукописів Центральної наукової бібліотеки Академії наук УРСР (тепер — Інститут рукопису Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського), де вони нині зберігаються.

У 1952–1953 р. Інститут математики АН УРСР видав повне зібрання наукових праць

Г.Ф. Вороного у 3 томах з детальними коментарями провідних учених того часу (Б.М. Делоне, Б.О. Венкова, Ю.В. Линника, Й.Б. Погрєбиського, Й.З. Штокала) [1]. Зазначимо, що у цьому виданні було наведено опис рукописного фонду Г. Вороного. Проте цей фонд і досі чекає свого дослідника.

Праці Георгія Вороного вирізняються глибиною і довершеністю викладу. Він залишив після себе 12 основних робіт, переважно в галузі теорії чисел, проте майже кожна з них стала поштовхом для подальшого розвитку нового напрямку досліджень. «У Вороного всього шість великих і шість малих праць. Кожна з великих праць або капітальна в даному обсягу, або відкриває велику ділянку досліджень; навіть кожна мала праця Вороного незвичайно оригінальна і часом по-новому спрямовує дослідження», — писав у 1933 р. Борис Делоне, один із найталановитіших послідовників Вороного [12]. Пізніше, у 1947 р., Делоне зазначив: «Глибина і важливість його обширних досліджень залишили глибокий слід у сучасній теорії чисел. Поряд із Мінковським Вороний є творцем геометрії чисел. Роботу Вороного 1903 року про число точок під гіперболою треба вважати віхою, з якої починається сучасна аналітична теорія чисел [...] В роботі Вороного про алгоритм для обчислення кубічних одиниць поставлено ряд проблем про розподіл відносних мінімумів, одну з яких, дуже важку, вирішив сам Вороний, але більша частина їх ще чекає свого вирішення. Дослідження Вороного з квадратичних форм і заповнення простору ще далеко не вичерпують піднятого ним важливого питання, в якому він дав такі фундаментальні результати» [13].

Однак Делоне не міг передбачити, наскільки важливими виявляться теоретичні результати Вороного в галузі геометрії чисел для розвитку сучасної науки, оскільки в середині минулого століття людство ще не дозріло до розуміння значущості праць Вороного.

Основним об'єктом вивчення геометрії чисел є просторові решітки — системи всіх точок, координати яких у заданій афінній системі координат виражаються цілими числами. Такі

решітки розглядалися, зокрема, в дослідженнях кристалографа Є.С. Федорова. Вороний же, як він пише у процитованому вище листі до Крелля, помітив прямий зв'язок між задачею розбиття n -вимірного аналітичного простору на опуклі конгруентні многогранники з арифметичною теорією додатних квадратичних форм.

Вороний розглянув узагальнену на n -вимірний випадок проблему Діріхле (1850) про розташування точок з цілими координатами у n -вимірному просторі, на яких певна додатно визначена квадратична форма досягає свого мінімуму. Він увів у n -вимірному просторі поняття точкових решіток і примітивних паралелоєдрів, побудував узагальнені області Діріхле, які визначаються так: для певної точки P з деякої решітки розглядається сукупність точок простору, що віддалені від P не далі, ніж від усіх інших точок решітки (зони впливу), — і встановив, що загальне розбиття n -вимірного простору на примітивні паралелоєдри є афінним образом узагальненої області Діріхле. Таким чином він звів вивчення паралелоєдрів до теорії квадратичних форм, тобто дав математичний апарат для досліджень зон впливу.

У зв'язку з розвитком теоретичної комп'ютерної науки в середині 1970-х років науковці світу знову звернулися до двох останніх праць ученого, в яких він розглянув нові об'єкти, названі ним *примітивними паралелоєдрами*. Розвинутий у цих працях Вороного математичний апарат став відправною точкою для численних практичних застосувань, пов'язаних із розбиттям простору на певні області (зони впливу). У 1998 р. австрійські математики О. Айхгольцер та Ф. Ауренгаммер зазначали: «Термін «діаграма Вороного» ввели в теоретичну комп'ютерну науку в середині 1970-х років.

З того часу цей об'єкт став настільки поширеним у дослідженнях, пов'язаних з геометричними алгоритмами, що деякі фахівці датують народження обчислювальної геометрії саме цією подією. Значний відсоток сучасних розробок в обчислювальній геометричній літературі прямо чи опосередковано пов'язаний з діаграмами Вороного або з пов'язаними з ними

Приклади інженерних конструкцій, оснований на діаграмах Вороного: яхта «Voronoj yacht», лампа-гриб «за Вороним», проект будівлі «Instant bridge, Rome» у Римі



структурами» [14]. (Зазначимо, що елементарне пояснення поняття «діаграма Вороного» наведено в [2].)

Діаграми Вороного (таку назву дістав новий об'єкт) почали широко використовувати в багатьох актуальних напрямках науки. Вони стали об'єктом досліджень та узагальнень у численних наукових статтях та окремих виданнях. Для прикладу наведемо лише перелік застосувань, який розглядали на симпозиумі з діаграм Вороного в Калгарі (2006): молекулярне моделювання, біологічне і фізичне моделювання, діаграми Вороного у біоінформатиці, астрономії, географії, хімії, матеріалознавстві, теорії комірок, моделюванні твердих тіл, мультиплікації, в аналізі зображень і розпізнаванні, аналізі руху та його плануванні, у виявленні зіткнень, переміщень і запобіганні конфліктам, в аналізі мереж і зв'язків, імітаційне моделювання, дослідження операцій, мистецтво за Вороним.

В останні десятиліття дослідження діаграм Вороного та їх узагальнення проводяться практично в усіх країнах Європи, у США, Канаді, в країнах Південної Америки, Японії, Китаї, Австралії, Новій Зеландії. У Сеулі (Південна Корея) є Дослідницький центр з діаграм Вороного. За ініціативою цього Центру починаючи з 2004 р. в різних країнах світу проводилися щорічні міжнародні симпозиуми, присвячені узагальненням діаграм Вороного та їх використанню (ISVD). Такі симпозиуми відбулися в Японії (Токіо, 2004), Південній Кореї (Сеул, 2005), Канаді (Калгарі, 2006), Великій Брита-



нії (Гламорган, 2007), Україні (Київ, 2008), Данії (Копенгаген, 2009), Канаді (Квебек, 2010), Китаї (Циндао, 2011), США (Ратджерс, 2012), Росії (Санкт-Петербург, 2013).



Монета, випущена Національним банком України в 2008 р. на увічнення пам'яті Георгія Вороного

У Києві з 1993 р. започатковано проведення міжнародних конференцій International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations (раз на п'ять років), в яких беруть участь як математики з різних країн світу, так і фахівці з інших галузей знань, які в своїх дослідженнях використовують діаграми Вороного. Праці цих конференцій публікуються під назвою *Voronoi's Impact on Modern Science* і привертають до себе велику увагу, про що свідчить значна кількість посилань на них у науковій літературі. У 2008 р., коли відзначали 100 років від дня смерті Г. Вороного, за пропозицією Дослідницького центру з діаграм Вороного (Південна Корея) симпозіум ISVD проходив у Києві разом із IV Київською конференцією². За результатами київських конференцій вийшло друком п'ять збірників «*Voronoi's Impact on Modern Science*» (збірник 2008 р. у двох томах). Інформацію про цю спільну конференцію та її учасників наведено у статті [15].

Крім того, є кілька спільних проектів фахівців різних країн, які розробляють певні аспекти застосувань діаграм Вороного. Наприклад, у 2011–2013 рр. за європейською програмою EuroGIGA розроблявся дослідницький проект «Просторові розшарування і графіки» (коротка назва VORONOI). Цей проект складався з програм, представлених провідними вченими, які очолюють наукові школи у своїх країнах — в Австрії, Бельгії, Німеччині, Польщі, Швейцарії та Іспанії.

Діаграми Вороного використовують також в інженерних конструкціях та дизайнерських

² <https://www.imath.kiev.ua/~voronoi/>

проектах. Метод Вороного з розбиття певного об'єму на частини дає змогу обчислювати максимально міцні структури з використанням мінімальної кількості матеріалу. Так, у Китаї за проектом дизайнера Hyun-Seok Kim побудовано унікальну яхту «*Voronoi yacht*», португальський архітектор Andre Coelho створив лампу-гриб «за Вороном», у Римі планується спорудження будівлі «*Instant bridge, Rome*», на яку знадобиться на 30% менше металу, ніж для звичайних споруд зі стовпів і балок. У Селулі під час симпозіуму 2005 р. в Художньому музеї було відкрито виставку «Мистецтво за Вороном», подібна виставка відбулася і в канадському місті Калгарі у 2006 р.

Феномен Георгія Вороного полягає не тільки у сплеску популярності серед сучасних дослідників його останньої наукової роботи. Вороний є засновником ряду новітніх напрямів у галузі аналітичної теорії чисел, алгебраїчної теорії чисел, теорії підсумовування розбіжних рядів у математичному аналізі. Усі ці напрями досліджень зараз активно продовжують розвиватися.

Постановою Верховної Ради України від 08.02.2018 № 7274 150-річний ювілей Георгія Вороного увійшов до переліку пам'ятних дат і ювілеїв, що відзначатимуться на державному рівні. Деякі кроки із вшанування видатного вченого вже було зроблено у 2008 р. до 100-ї річниці його пам'яті: Національний банк України випустив монету «Георгій Вороний», ПАТ «Укрпошта» — конверт з портретом Г. Вороного і 28 квітня, в день його народження, у с. Журавка Варвинського р-ну Чернігівської обл. було організовано спеціальне погашення конверта.

24–28 вересня цього року Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова та Інститут математики НАН України проведуть міжнародну конференцію VI International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, присвячену 150-річчю від дня народження Георгія Вороного. Плануються також й інші заходи з увічнення пам'яті видатного вченого.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Г.Ф. Вороной. *Собрание сочинений в 3 томах*. К.: Ин-т матем. АН УССР, 1952–1953.
2. Георгій Вороний. *Вчений, який випередив час на століття* (за ред. М.В. Працьовитого). К., 2010. С. 39–59. ukrlife.org/main/evshan/vorony.doc.
3. Вороной Г. О числах Бернулли. *Сообщения Харьковского математического общества*. 1890. Т. 2. С. 129–148. (Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 1. К., 1952. С. 7–23.)
4. Вороной Г. *О целых алгебраических числах, зависящих от корня уравнения 3-й степени*. СПб.: Тип. Импер. Академии Наук, 1894. (Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 1. К., 1952. С. 25–195.)
5. Вороной Г. *Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей*. Докторская диссертация. Варшава, 1896. (Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 1. К., 1952. С. 197–391.)
6. Voronoi G. Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1903. **126**(4): 241–282. (Об одной задаче из теории асимптотических функций. В кн.: Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 2. К., 1952. С. 5–49.)
7. Voronoi G. Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1904. Série 3. **21**: 203–267; 459–533. (Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов. В кн.: Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 2. К., 1952. С. 51–165.)
8. Voronoi G. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premier Mémoire. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positive parfaites. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1907. **133**(2): 97–156; 1908. **133**(3): 157–178. (Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Первый мемуар. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. В кн.: Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 2. К., 1952. С. 171–238.)
9. Voronoi G. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1908. **134**(3): 198–246; 1908. **134**(4): 247–287; 1909. **136**(2): 67–178. (Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Второй мемуар. Исследования о примитивных параллелоэдрах. В кн.: Г.Ф. Вороной. *Собр. соч. в 3 т.* Т. 2. К., 1952. С. 239–368.)
10. Серпінський В. *Георгій Вороний*: конспект лекції, прочитаної у Львівському університеті дня 28 листопада 1908 р. *Wiadomości matematyczne*. 1909. (укр. перекл. Г.Ф. Вороний. *Щоденник 1885–1890*. К.: Укр. наук. асоціація, Ін-т фундамент. досл., 1994. Або: *Георгій Вороний і його родинні оточення* (за ред. Г.М. Ситої). Чернігів: Десна Поліграф, 2012. С. 34–38.)
11. Брайцев И.Р. Г.Ф. Вороной (Некролог). *Сообщения Харьковского математического общества*. 1910. Сер. 2. Т. 11 № 6. С. 197–210.
12. Делоне Б. Юрій Тодосьович Вороний. *Журнал математичного циклу ВУАН*. 1934. Т. 1, № 2. С. 15–16.
13. Делоне Б.Н. Георгий Федосеевич Вороной. В кн.: *Петербургская школа теории чисел*. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. С. 195–318.
14. Engel P., Syta H. (eds). *Voronoi's Impact on Modern Science*. (Kyiv: Institute of Mathematics, 1998). Book 2. P. 7–21.
15. Працьовитий М.В., Сита Г.М. Георгій Вороний. Український вчений, який випередив час на століття. *Світгляд*. 2009. № 2.