

Феноменологическая модель казимировского притяжения металлической пленки

В. Н. Дубрава, В. А. Ямпольский

Институт радиофизики и электроники НАН Украины, Украина, 310085, г. Харьков, ул. Акад. Проскуры, 12
E-mail: yam@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 26 мая 1999 г., после переработки 9 июля 1999 г.

С использованием техники квантовой теории поля изучается сила поверхностного взаимодействия (эффект Казимира), возникающего между массивным проводником и металлической пленкой, расположенной на диэлектрической подложке. Толщина пленки предполагается много меньше глубины скин-слоя на характерных частотах флуктуационных полей. Уравнения для одночастичной функции Грина электромагнитного поля внутри металлической пленки решены в рамках простой феноменологической модели. А именно, сложные макроскопические электродинамические свойства пленки описаны введением поверхностной диэлектрической проницаемости, которая определяется средней по толщине проводимостью $\langle\sigma\rangle$. В рамках такой модели предсказана зависимость силы казимировского притяжения от значения параметра зеркальности ρ , характеризующего взаимодействие электронов проводимости с поверхностью пленки. Результаты проведенного исследования демонстрируют принципиальную возможность экспериментального изучения электронных и поверхностных свойств металлических пленок с помощью измерения силы их казимировского притяжения.

За допомогою техніки квантової теорії поля вивчається сила поверхневої взаємодії (ефект Казимира), що виникає між масивним провідником та металевою плівкою, що розташована на діелектричній підложці. Товщина плівки передбачається набагато меншою за глибину скин-шару на характерних частотах флуктуаційних полів. Рівняння для одночастинкової функції Гріна електромагнітного поля усередині металевої плівки вирішуються в межах простої феноменологічної моделі. А саме, складні макроскопічні електродинамічні властивості плівки описано уведенням поверхневої діелектричної проникливості, яка визначається середньою за товщиною провідністю $\langle\sigma\rangle$. В межах такої моделі передбачається залежність сили казімірівського притягання від значення параметра дзеркальності ρ , що характеризує взаємодію електронів провідності з поверхнею плівки. Результати проведеного дослідження демонструють принципову можливість експериментального вивчення електронних та поверхневих властивостей металевих плівок за допомогою вимірювання сили їх казімірівського притягання.

PACS: 12.20.-m, 78.66.Bz

1. Введение

Эффект Казимира, согласно данному автором определению [1], есть «наблюдаемая неклассическая сила электромагнитного притяжения между двумя параллельными идеально проводящими пластинами». На единицу площади эта сила составляет величину

$$F_0 = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{a^4}. \quad (1)$$

Здесь \mathcal{E} — энергия взаимодействия; \hbar — постоянная Планка; c — скорость света и a — расстояние между пластинами. Казимир трактовал появление

силы F_0 как результат своеобразного высвобождения энергии электромагнитного вакуума E при его частичном заполнении материальной средой.

Сила Казимира возникает и в более общем случае взаимодействия плоскопараллельных диэлектрических сред [2] и может быть интерпретирована в духе ван-дер-ваальсовского (молекулярного) притяжения. Этот специфический вид ван-дер-ваальсовского взаимодействия имеет флуктуационное электромагнитное происхождение и связан со спонтанной поляризацией диэлектриков. В зависимости от температуры в среде преобладают либо квантовые, либо тепловые механизмы поляризации. Критерием является отно-

шение характерной частоты «излучения» ω_c к параметру kT/\hbar . При

$$kT \ll \hbar\omega_c \quad (2)$$

взаимодействие двух сред осуществляется за счет вакуумного электромагнитного поля. Казимировский результат (1) получается в низкотемпературном режиме (2), если устремить диэлектрическую проницаемость тел ϵ к бесконечности.

Для реальных проводников

$$\epsilon = 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega}, \quad (3)$$

где $\sigma(\omega)$ — проводимость. Простое исследование показывает, что при

$$\omega_c \ll \omega_p \quad (4)$$

(ω_p — плазменная частота) из-за большой электропроводности металлов частотная дисперсия в проводимости проявляется лишь в поправках к силе (1). Относительная величина этих поправок имеет масштаб [3]

$$\Delta F/F_0 \sim Z \ll 1, \quad (5)$$

где $Z = 1/\sqrt{\epsilon(i\omega_c)}$ — поверхностный импеданс металла на характерной частоте $\omega_c \sim c/a \ll \omega_p^*$. Отметим, что в условиях (2), (4) сила Казимира в главном приближении описывается формулой (1) независимо от типа проводника. В частности, она нечувствительна к анизотропии электронного спектра. Решающим является то обстоятельство, что результат (1) есть следствие «зануления» электрической компоненты флуктуационного поля на границах проводников.

При рассмотрении взаимодействия достаточно тонких пленок толщиной d , много меньшей характерной глубины скин-слоя δ , неравенство (5) нарушается даже при большой электропроводности σ . В этом случае мы переходим от асимптотики (1), полученной в пределе $d \gg \delta$, к новому выражению для силы Казимира, которое является функцией не только размеров пленки, но и ее электронных характеристик — плазменной частоты ω_p и частоты электронной релаксации ν [4].

Следует подчеркнуть, что чувствительность силы Казимира к коллективным особенностям металла не исчерпывается, конечно, только упомянутой функциональной зависимостью от плазмен-

ной частоты и частоты электронной релаксации, которые следует относить к объемным характеристикам электронной подсистемы. Важной особенностью всякой проводящей среды является также характер электрон-поверхностного рассеяния, которое играет фундаментальную роль в электродинамике проводников при $d \ll l$ ($l = v_F / (\nu - i\omega)$ — эффективная длина свободного пробега электронов; v_F — фермиевская скорость).

Основная часть настоящей работы посвящена изучению роли поверхностных свойств пленки металла в формировании силы Казимира. Результаты проведенного исследования демонстрируют принципиальную возможность экспериментального изучения параметра «шероховатости» границы металлической пленки с помощью прецизионного измерения силы ее казимировского притяжения.

В разд. 2 развита техника вычисления силы Казимира, предложенная в [2], и найдено упрощенное выражение для свободной энергии двух взаимодействующих плоскопараллельных макроскопических тел с произвольными диэлектрическими проницаемостями.

В следующих разделах исследуется сила притяжения, действующая со стороны массивного проводника на тонкую металлическую пленку, помещенную на диэлектрическую подложку с малой оптической плотностью. В разд. 3 дана постановка задачи и приведены основные неравенства, при выполнении которых в эффекте Казимира можно пренебречь влиянием температуры и учесть индивидуальные особенности проводящих сред. Раздел 4 посвящен решению электродинамических уравнений для функции Грина электромагнитного поля. Реакцию вакуума на тонкую металлическую пленку мы описываем введением в уравнения поля поверхностной диэлектрической проницаемости, связанной со средней по толщине проводимостью металлической пленки. В разд. 5 получен ряд асимптотик энергии взаимодействия массивного проводника с тонкой металлической пленкой для случаев зеркальной и диффузной границ в частотных режимах нормального и «инфракрасного» скин-эффектов. Наряду с этим мы анализируем роль диэлектрических свойств подложки, которая также участвует в казимировском взаимодействии, и находим условия, при выполнении которых полная сила Казимира

* Здесь и далее мы используем хевисайдовскую систему электромагнитных единиц, в которой определение поверхностного импеданса отличается от обычного отсутствием множителя $4\pi/c$.

мира в главном приближении определяется только электронными параметрами металла.

2. Свободная энергия в эффекте Казимира

Ван-дер-ваальсов вклад в свободную энергию неоднородной конденсированной среды с локальной комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r} | \omega)$ дается формулой [2]

$$\delta\mathcal{F} = -kT \sum'_{n=0} \omega_n^2 \int d\mathbf{r} \mathcal{D}_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r} | \omega_n) \delta\epsilon(\mathbf{r} | i\omega_n), \quad (6)$$

где $\mathcal{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \omega_n)$ — температурная функция Грина электромагнитного поля; $\omega_n = 2\pi n kT$; штрих у знака суммы означает, что член с $n = 0$ берется с половинным весом; здесь и далее $\hbar = c = 1$.

Формулу (6) представим в компактном виде

$$\delta\mathcal{F} = -kT \sum'_{n=0} \omega_n^2 \text{Tr}_{(\mathbf{r})} \mathcal{D}(\omega_n) \delta\epsilon(\omega_n). \quad (7)$$

Здесь $\mathcal{D}(\omega_n)$ — оператор Грина с матричными элементами $\mathcal{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \omega_n)$; $\epsilon(\omega_n)$ — диагональный оператор диэлектрической проницаемости, а операция Tr понимается в функциональном смысле, т.е.

$$\text{Tr}_{(\mathbf{r})} F = \int d\mathbf{r} \text{tr} [F(\mathbf{r}, \mathbf{r})] \quad (8)$$

($\text{tr} [\dots]$ — обычный след).

Явный вид гриниана \mathcal{D} в калибровке «излучения» определяется решением линейного уравнения

$$K\mathcal{D} = -1, \quad (9)$$

в котором дифференциальный оператор K имеет ядро

$$K_{il}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \omega_n) = [\epsilon(\mathbf{r} | i\omega_n) \omega_n^2 \delta_{il} + \text{rot}_{im} \text{rot}_{ml}] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Используя (9), легко увидеть, что полное изменение свободной энергии \mathcal{F} при изменении диэлектрической проницаемости ϵ есть

$$\mathcal{F} = kT \sum'_{n=0} \omega_n^2 \text{Tr}_{(\mathbf{r})} [\log K(\omega_n)]. \quad (10)$$

Для двух независимых e - и m -поляризаций электромагнитного поля имеем [5]

$$K_e = \omega_n^2 \epsilon - \nabla^2; \quad (11)$$

$$K_m = \omega_n^2 - (\nabla, \frac{1}{\epsilon} \nabla).$$

Без учета бесконечной аддитивной постоянной

$$\log K = - \int_0^\infty dm^2 \frac{1}{m^2 + K},$$

где вспомогательная переменная m имеет смысл эффективной массы. Таким образом, согласно (10),

$$\mathcal{F} = -kT \sum'_{n=0} dm^2 \text{Tr}_{(\mathbf{r})} \mathcal{G}(\omega_n). \quad (12)$$

Здесь $\mathcal{G} = (m^2 + K)^{-1}$ — функция Грина с матричными элементами $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \omega_n)$, удовлетворяющими уравнению

$$(m^2 + K)\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' | \omega_n) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13)$$

Для упрощения общей формулы (12) воспользуемся соображениями симметрии. С этой целью выберем систему координат таким образом, чтобы ось x была направлена перпендикулярно плоскости взаимодействующих пластин. Тогда из изотропности и трансляционной инвариантности рассматриваемой системы в плоскости y, z следует, что

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{\rho} - \mathbf{\rho}'),$$

где $\mathbf{\rho} = (y, z)$ — двумерный радиус-вектор. Раскладывая \mathcal{G} в двумерный интеграл Фурье, на основании формулы (8) находим

$$\text{Tr}_{(\mathbf{r})} \mathcal{G} = \text{Tr}_x \int \frac{d\mathbf{p}d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} g(x, x' | q^2, \omega_n).$$

В итоге выражение (12) для ван-дер-ваальсова вклада в свободную энергию системы двух плоскопараллельных сред можно представить в виде

$$\mathcal{F} = -\frac{kT}{(2\pi)^2} S \sum'_{n=0} \int_0^\infty dm^2 \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{q} (\text{Tr}_x g), \quad (14)$$

где S — площадь пластин.

В низкотемпературном режиме (2) сумму в (14) можно заменить интегралом. Полученное выражение определяет энергию E вакуумного электромагнитного поля при наличии стационарной системы тел:

$$\frac{E_{(e, m)}}{S} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dm^2 dq^2 d\zeta \int_{-\infty}^\infty dx g_{(e, m)}(x, x), \quad (15)$$

где функции Грина $g_{(e, m)}(x, x')$ для двух независимых e - и m -поляризаций электромагнитного поля, известных в электродинамике под E - и H -волнами, находятся как решения дифференциальных уравнений

$$\left(m^2 + q^2 + \zeta^2 \epsilon(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) g_e(x, x') = \delta(x - x'), \quad (16)$$

$$\left(m^2 + \frac{q^2}{\epsilon(x)} + \zeta^2 - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\epsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) g_m(x, x') = \delta(x - x'),$$

в которых $\epsilon(x)$ — диэлектрическая проницаемость рассматриваемой системы тел как функция координаты x .

3. Геометрия задачи и основные неравенства

Рассмотрим статическую систему, состоящую из массивного проводника M и тонкой металлической пленки f (область III) толщиной d на диэлектрической подложке s (область II) с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_\infty = \text{const}$. Размер зазора (область I) между пленкой f и массивным металлом M обозначим a (см. рис. 1). В условиях оптической прозрачности системы пленка-подложка в асимптотике энергии Казимира \mathcal{E} можно выделить два аддитивных вклада \mathcal{E}_{M-f} и \mathcal{E}_{M-s} , обусловленных взаимодействием проводника с металлической пленкой и проводника с диэлектрической подложкой:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{M-f} + \mathcal{E}_{M-s}. \quad (17)$$

Практически это означает, что наличие металлической пленки в главном порядке не влияет на казимировское взаимодействие проводника и диэлектрической подложки, а введение диэлектрика, в свою очередь, не сказывается на взаимодействии между проводником и металлической пленкой. Таким образом, при нахождении \mathcal{E}_{M-f} можно пренебречь влиянием подложки, т.е. считать $\epsilon_\infty = 1$, а вычисляя \mathcal{E}_{M-s} , пренебречь влиянием пленки, т.е. положить $d = 0$. Отличия, которые при этом возникнут в сравнении с точным решением задачи, будут более высокого порядка малости, чем слагаемые в (17).

Помимо оптической прозрачности мы также будем считать выполненными условие низкотемпературного приближения (2), при котором

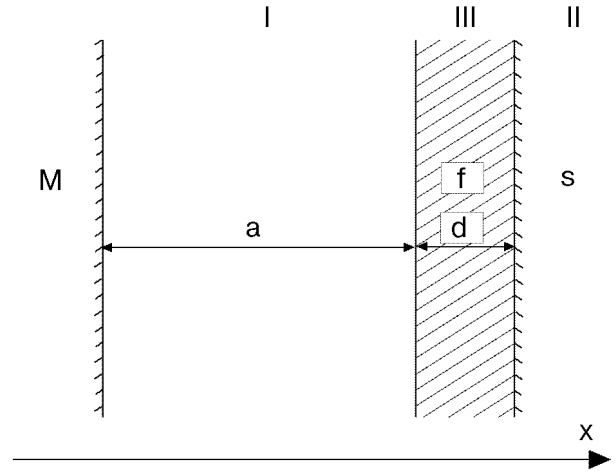


Рис. 1. Геометрия задачи. M — массивный металл, f — металлическая пленка, s — диэлектрическая подложка.

можно пренебречь тепловыми флуктуациями электромагнитного поля, и неравенство (4), эквивалентное условию пренебрежения током смещения в уравнениях Максвелла.

4. Нахождение функций Грина электромагнитного поля

При рассмотрении вклада в энергию Казимира e - и m -поляризованного флуктуационного электромагнитного поля необходимо решить уравнения (16) вместе с граничными условиями непрерывности для g и ее нормальной производной (для E -волн) и величины g'/ϵ (для H -волн) в точках разрыва $\epsilon(x)$. Известно, что функцию Грина g в каждой из областей I–III можно выразить через два линейно независимых фундаментальных решения u_- и u_+ , удовлетворяющих однородному уравнению и заданных на левой и правой границах рассматриваемой области:

$$g(x, x') = \frac{1}{W} \begin{cases} u_-(x)u_+(x'), & x < x', \\ u_-(x')u_+(x), & x' < x, \end{cases}$$

где $W = u_-(x)u'_+(x) - u'_-(x)u_+(x)$ — определитель Вронского.

Как показывает анализ, в условиях оптической прозрачности металлической пленки определяющий вклад в казимировскую энергию вносят флуктуации m -поляризованного электромагнитного поля. Поэтому выпишем только интересующие нас фундаментальные решения второго уравнения системы (16):

$$\begin{cases} u_- = \text{ch } k(x - d) - \epsilon kd \text{ sh } ka \text{ ch } k(x - a - d), \\ u_+ = \text{ch } k(x - D). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь D — бесконечно большое расстояние, на котором расположено идеально отражающее зеркало (его введение обязательно, если мы считаем рассматриваемую систему замкнутой); ϵ — поверхностная диэлектрическая проницаемость,

$$\epsilon = 1 + \frac{\langle \sigma(i\zeta) \rangle}{\zeta},$$

$\langle \sigma \rangle$ — средняя по толщине проводимость металлической пленки; $k = (\zeta^2 + q^2 + m^2)^{1/2}$. Наряду с этим подразумевается выполненным неравенство $d \epsilon^{1/2} / \zeta \ll 1$.

Система фундаментальных решений в области I получается из (18) заменой «правого» на «левое» по отношению к пленке f , т.е.

$$u_- \leftrightarrow u_+, D - x \rightarrow x, a \rightarrow D - a - d.$$

Мы не выписываем фундаментальные решения в области III, так как интеграл в (15) по интервалу $a < x < a + d$ оказывается много меньше значений интегралов по вакуумным областям I и II.

Теперь не составляет труда на основании (18) найти выражение для функции Грина m -составляющей флуктуационного электромагнитного поля. Результат ее интегрирования при совпадающих аргументах запишем в виде

$$\int_0^D dx g_m(x, x) = \frac{\partial}{\partial m^2} \ln W_m, \quad (19)$$

где

$$W_m = k [\operatorname{sh} k(D - d) + \epsilon kd \operatorname{sh} ka \operatorname{sh} k(D - d - a)] \quad (20)$$

— определитель Вронского, который имеет смысл дисперсионного уравнения для собственных мод рассматриваемой системы, взятого на мнимой частоте.

5. Вычисление энергии Казимира

Подставляя (19) в (15), после элементарного интегрирования по переменной m^2 получаем

$$\begin{aligned} \frac{E}{S} = & \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dq^2 d\zeta \ln k [\operatorname{sh} k(D - d) + \\ & + \epsilon kd \operatorname{sh} (ka) \operatorname{sh} k(D - d - a)]. \quad (21) \end{aligned}$$

Прямое вычисление интеграла (21) ведет к бесконечному значению E . Расходимость энергии

вакуума E в (21) связана, прежде всего, с высокой интенсивностью вакуумных флуктуаций при малых длинах волн. Но поскольку в эффекте Казимира наблюдаемой величиной является не энергия E , а сила притяжения F , энергия взаимодействия \mathcal{E} определена с точностью до произвольного, не зависящего от a слагаемого E_0 , которое исчезает при дифференцировании:

$$E(a) = \mathcal{E}(a) + E_0.$$

Оказывается, что именно ненаблюдаемая часть энергии E_0 приводит к расходимости в (21). Из анализа формулы (21) следует, что ее происхождение связано с бесконечной энергией нулевых колебаний, которая пропорциональна полному объему DS , занимаемому электромагнитной системой, и так называемой поверхностной энергией (пропорциональной S), возникающей вследствие прозрачности границ пленки. Вычитание соответствующих им бесконечных вкладов в $E(a)$ эквивалентно выбору $E_0 = E(a \rightarrow \infty)$. Следовательно, интересующая нас конечная часть $\mathcal{E}(a)$ в энергии электромагнитного вакуума определяется формулой

$$\mathcal{E}(a) = E(a) - E(a \rightarrow \infty), \quad (22)$$

в которой величина $E(a \rightarrow \infty)$ обозначает асимптотику E при $a \rightarrow \infty$. На основании (22) можно сделать заключение, что квантовоэлектродинамический смысл казимировской энергии состоит в частичном высвобождении энергии вакуума при внесении в него материальных тел.

С помощью (21) и (22) получаем окончательный результат для энергии казимировского взаимодействия массивного проводника и тонкой металлической пленки:

$$\mathcal{E}_{M-f} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dq^2 \int d\zeta \ln \left[1 - \frac{\epsilon kd}{2 + \epsilon kd} \exp(-2ka) \right]. \quad (23)$$

При вычислении двойного интеграла в (23) необходимо конкретизировать зависимость $\langle \sigma \rangle$ от поверхностных и объемных (ω_p , ν) характеристик электронной подсистемы. В рамках классического подхода рассеяние электрона на поверхности металла описывается с помощью граничного условия для электронной функции распределения. В простейшей модели [6] поверхностные свойства характеризуются параметром зеркальности ρ , который равен относительному числу электронов, отраженных зеркально от гра-

ницы образца. В изотропном случае для зеркальной ($\rho = 1$) и диффузной ($\rho = 0$) границ электропроводность $\langle \sigma \rangle$ тонкой металлической пленки дается следующими асимптотическими выражениями [6]:

$$\langle \sigma \rangle = \begin{cases} \sigma_L, & \rho = 1, \\ \sigma_F = (3d\sigma_L/4l) \ln(l/d), & \rho = 0, \end{cases} \quad (24)$$

в которых $\sigma_L = \omega_p^2/(\nu - i\omega)$ — проводимость массивного образца; σ_F — фуксовская проводимость.

Формула (24) справедлива в так называемом кнудсеновском пределе $d \ll l$. В этом случае проводимость пленки с диффузными границами обуславливается небольшой группой пролетных электронов, которые движутся почти параллельно поверхности пластины и не сталкиваются с границами в течение всего времени свободного пробега. Относительное число пролетных электронов по порядку величины равно d/l .

При $d \gg l$, когда эффекты, связанные с поверхностным рассеянием электронов, не заметны на фоне объемных столкновений, в главном приближении проводимость оказывается нечувствительной к характеру электрон-поверхностного взаимодействия:

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_L.$$

Используя (24), получаем аналитические выражения для энергии Казимира (23).

1. *Зеркальная граница* ($\rho = 1$). В этом простом случае мы воспроизводим результаты, полученные ранее в [7]:

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=1)} = -0,70 \hbar \omega_p \frac{\sqrt{ad}}{\pi(4a)^3}, \quad (25)$$

$$\nu \ll \omega_p \sqrt{d/a} \ll \omega_p, \quad c/a,$$

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=1)} = -\frac{\hbar \sigma_0}{2\pi^2} \frac{d}{(2a)^3} \ln \left(\frac{\nu}{\omega_p} \sqrt{a/d} \right), \quad (26)$$

$$\omega_p \sqrt{d/a} \ll \nu \ll \omega_p, \quad c/a.$$

Обратим внимание на то, что для образцов с зеркальной границей в зависимости от соотношения между частотой релаксации ν и $\omega_0 = \omega_p \sqrt{d/a}$ в эффекте Казимира могут быть реализованы режимы, соответствующие нормальному ($\omega_0 \ll \nu$) и инфракрасному ($\nu \ll \omega_0$) скин-эффектам. При $\nu \ll \omega_0$ величина \mathcal{E}_{M-f} имеет ту же функциональную зависимость от параметров задачи, что и энергия Казимира в системе двух тонких металлических пленок одинаковой толщи-

ны [4]. Это связано с тем, что в обоих случаях главный вклад в казимировское взаимодействие вносит частота $\omega_c \sim \omega_0$. В частотном режиме, соответствующем нормальному скин-эффекту, определяющий вклад в казимировское взаимодействие дает интервал частот (ω_0, ν). Поэтому в сравнении с соответствующей асимптотикой из [4] величина \mathcal{E}_{M-f} оказывается больше в логарифм параметра $(\nu/\omega_p) \sqrt{a/d} \gg 1$.

2. *Диффузная граница* ($\rho = 1$). В случае диффузного отражения электронов от границы металлической пленки вычисление энергии Казимира не удастся провести асимптотически точно. Главным образом это связано с появлением в выражении (24) для средней проводимости $\langle \sigma \rangle$ фуксовского логарифма $\ln(l/d)$. Следует, однако, заметить, что при сравнительно больших характерных частотах кнудсеновский предел $l \gg d$ нарушается. Это значительно сужает область применимости формулы (23) для энергии Казимира как функции фуксовской проводимости σ_F (24). Избежать искусственного ограничения на характерные частоты можно было бы за счет разбиения в (23) интеграла по $d\zeta$ на две части:

$$\int_0^\infty d\zeta = \int_0^{\omega_K} d\zeta (\sigma = \sigma_F) + \int_{\omega_K}^\infty d\zeta (\sigma = \sigma_L), \quad (27)$$

где ω_K — характерная частота, при которой формально нарушается кнудсеновское приближение. Такой математический прием строго справедлив лишь в том случае, когда область интегрирования в окрестности точки ω_K вносит малый вклад в величину обоих интегралов. Это условие может нарушаться в частотном режиме нормального скин-эффекта, поскольку в низкочастотном пределе характерные частоты занимают конечный интервал значений. Поэтому в общем случае использование формулы (27) требует дополнительного математического обоснования.

Для исключения трудностей, связанных с использованием фуксовской проводимости σ_F , мы воспользуемся общим выражением для средней проводимости металлической пленки произвольной толщины с диффузной границей

$$\langle \sigma \rangle = \frac{3}{2} \sigma_0 \int_0^1 dn (1 - n^2) \left[1 - \frac{l}{d} \left(1 - \exp \left(-\frac{d}{ln} \right) \right) \right] \quad (28)$$

и оценочной формулой для энергии казимировского взаимодействия

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)} = -\frac{1}{8\pi^2(2a)^3} \times \\ \times \int_0^\infty dx x^2 \exp(-x) \int_{p_c}^1 \frac{dp}{p} \langle \sigma(p, x) \rangle d + \dots, \quad (29)$$

которая приближенно (с точностью до несущественного числового множителя порядка единицы) справедлива при $p_c \ll 1$. В (29) нижний предел интегрирования p_c находится из условия

$$p \sim \langle \sigma(p) \rangle d.$$

Формула (29) является базовой при учете в силе Казимира коллективных свойств электронной подсистемы и получается из (23) после замены переменных

$$q = \omega \sqrt{1/p^2 - 1}, \quad \zeta = \frac{x}{2a} p$$

и разложения логарифма в степенной ряд.

В режиме инфракрасного скин-эффекта, когда

$$va \ll p_c,$$

считаем $d/l = \Delta x p / 2$, где $\Delta = d/v_F a$ — произвольный по величине параметр. После подстановки (28) в (29) и интегрирования по переменной x получаем следующее упрощенное выражение для энергии Казимира

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)} \simeq -\frac{3A^2}{8\pi^2(2a)^3} \int_{p_c}^1 \frac{dp}{p^2} \int_0^1 dn (1-n^2) \frac{1}{1+2n/\Delta p}, \quad (30)$$

где $A^2 = da\omega_p^2$.

При сравнительно малых расстояниях (или больших характерных частотах), когда $\Delta \gg 1$, в зависимости от величины безразмерного параметра $p_c \Delta$ в «инфракрасном» эффекте Казимира возникают две характерные частотные области. Если $p_c \Delta \gg 1$, то $p_c \sim A \ll 1$ и, согласно (30), ведущий член асимптотики энергии Казимира принимает вид

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)} \simeq -\hbar\omega_p \frac{\sqrt{ad}}{\pi(4a)^3}, \quad (31)$$

$$v \frac{l_0}{d} \ll \omega_p \sqrt{d/a} \ll c/a, \omega_p,$$

где $l_0 = v_F/v$ — длина свободного пробега электрона. При $p_c \Delta \ll 1$ оказывается, что $p_c \sim A^2 \Delta \ll 1$ и

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)} \simeq -\frac{3\hbar\omega_p}{(8\pi a)^2} \frac{d^2\omega_p}{av_F} \ln^2 \left(\frac{d\omega_p}{v_F} \sqrt{d/a} \right), \quad (32)$$

$$v \sqrt{l_0/d} \ll \omega_p \sqrt{d/a} \ll v \frac{l_0}{d} \ll \frac{c}{a}, \omega_p.$$

Наконец, в режиме нормального скин-эффекта, когда

$$\omega_p \sqrt{d/a} \ll v \sqrt{l_0/d} \ll v \frac{l_0}{d} \ll \frac{c}{a}, \omega_p,$$

асимптотику энергии Казимира можно оценить при помощи формулы (26), если вместо лоренцевской σ_0 подставить статическую фуксовскую проводимость $\sigma_F = (3d\sigma_0/4l_0) \ln(l_0/d)$:

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)} \simeq \frac{\hbar\sigma_F}{2\pi^2} \frac{d}{(2a)^3} \ln \left(\frac{d\sigma_F}{av} \right). \quad (33)$$

Как показывает анализ, для пленки с диффузной границей толщиной

$$\delta_0 \frac{v_F}{c} \ll d \ll \delta_0 \sqrt{v_F/c} \quad (34)$$

($\delta_0 = c/\omega_p$ — глубина проникновения поля при инфракрасном скин-эффекте) при

$$d \ll a \ll d \frac{c}{v_F} \quad (35)$$

формулы (31)–(33) последовательно реализуют функциональную зависимость энергии казимировского взаимодействия от расстояния между массивным металлом и пленкой. В условиях (34) и (35) толщину пленки d можно варьировать от 10^{-5} до 10^{-6} см; при этом допустимые расстояния a окажутся в интервале 10^{-2} – 10^{-6} см.

Если $d \ll \delta_0 v_F/c$, то асимптотическая формула (31) перестает быть справедливой, поскольку нарушается неравенство $\omega_c \ll \omega_p$. В этом случае при нахождении электромагнитных функций Грина следует считать

$$\epsilon = \epsilon_0 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

и вклад диэлектрической проницаемости ϵ_0 ионного остова «подавит» возможные электронные эффекты в силе Казимира, т.е. ситуация будет аналогична взаимодействию двух массивных проводников. То же самое относится к асимптотическим формулам (32) и (33) при $d \gg \delta_0 \sqrt{v_F/c}$.

В заключение отметим, что принципиальный переход от одной асимптотики к другой наблюдается только в области расстояний

$$a \sim a_0 = d^3 \omega_p^2 / v_F^2, \quad (36)$$

когда изменяется вид функциональной зависимости энергии Казимира $\mathcal{E}(a)$.

В виду отсутствия частотной дисперсии в ϵ_∞ энергия \mathcal{E}_{M-s} казимировского взаимодействия проводника с диэлектрической подложкой должна иметь ту же функциональную зависимость от расстояния, что и энергия взаимодействия массивных металлов (см. выражение для силы (1)). В случае малой оптической плотности диэлектрика

$$\epsilon_\infty - 1 \ll 1 \quad (37)$$

получаем

$$\mathcal{E}_{M-s} = - \frac{\epsilon_\infty - 1}{(2\pi)^2} \frac{\hbar c}{(2a)^3}. \quad (38)$$

Согласно (17), вклад взаимодействия $M-s$ в полную энергию \mathcal{E} оказывается малым в сравнении с энергией взаимодействия $M-f$, если параметр оптической плотности диэлектрической подложки удовлетворяет неравенству

$$c(\epsilon_\infty - 1)/a \ll \omega_c. \quad (39)$$

В этом случае дисперсионные свойства пленки f выходят в силу Казимира на первый план.

6. Заключение

Нами получены наиболее общие асимптотические формулы для энергии Казимира в случае взаимодействия массивного проводника и тонкой пленки изотропного металла, в которых коллективные свойства электронной подсистемы пленки учитываются в главном приближении. В модели параметра зеркальности продемонстрирована роль эффектов поверхностной релаксации электронов в формировании силы Казимира. Оказалось, что чувствительность силы Казимира к электронным характеристикам металлической пленки с диффузной границей наступает при толщине $d \ll \delta_0 \sqrt{v_F/c}$. Для пленок с зеркальной границей критические значения d оказываются заметно ниже [4]: $d \ll \delta_0 v/\omega_p$.

Вычисление энергии Казимира для пленки с диффузной границей показало, что при выполнении неравенства (34) влияние размерного эффекта в проводимости металлической пленки на величину силы Казимира существенно лишь в области

промежуточных (формулы (32) и (33)) расстояний, а именно, в частотном режиме, соответствующем нормальному скин-эффекту. При меньших расстояниях (или больших характерных частотах) поверхностные эффекты в электронной проводимости подавляются объемными, непосредственно связанными с высокой частотой флуктуационного электромагнитного поля. В этих условиях асимптотика энергии Казимира (31) совпадает с (25), полученной для пленки с зеркальной границей.

В режиме нормального скин-эффекта оценочную формулу для энергии Казимира можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)} \propto \hbar \sigma_F \frac{d}{a^3}.$$

В этой ситуации оказывается возможным пренебречь частотной дисперсией в проводимости, и поэтому функциональная зависимость $\mathcal{E}_{M-f}^{(\rho=0)}$ от расстояния a остается той же, что и для системы взаимодействующих идеальных проводников.

Таким образом, в модели параметра зеркальности поверхностные эффекты в электронной проводимости металлической пленки оказывают влияние только на величину силы казимировского взаимодействия (1). Объемные свойства электронной подсистемы помимо этого сказываются также на функциональной зависимости казимировского притяжения от расстояния (формула (31)). При этом точка перехода \hat{a} от одного участка асимптотики к другому оказывается тесно связанной с характером электрон-поверхностного рассеяния. В модели параметра зеркальности $\hat{a} \sim a_0$ (36), если $\rho = 0$, и $\hat{a} \sim (l_0/d)^2 a_0$ при $\rho = 1$. Это говорит о том, что для пленок с известными электронными характеристиками ω_p , v и v_F по экспериментально наблюдаемому значению \hat{a} можно судить о степени шероховатости металлической поверхности.

Все результаты настоящей работы получены для изотропных проводников. Казимировское взаимодействие пленок анизотропных металлов требует специального рассмотрения и обсуждения. Прежде всего, в реальном эксперименте следует учитывать, что в анизотропном случае помимо казимировского притяжения в системе возникают моменты сил, разворачивающие пленку, направление которых зависит от взаимной ориентации нормали к поверхности пленки и кристаллических осей. Кроме того, изменятся все асимптотические формулы для силы Казимира. Однако можно утверждать, что даже в анизотропной ситуации сила Казимира, точно так же, как и

проводимость пленок, окажется чувствительной к характеру электрон-поверхностного рассеяния.

За последнее время появился ряд работ (см., например, [8,9]), в которых экспериментально изучаются силы казимировского притяжения. При всей исключительной сложности в постановке подобных экспериментов мы все же надеемся, что в обозримом будущем и результаты нашей работы найдут свое место в исследованиях этого интересного макроскопического явления.

В заключение авторы выражают свою признательность В. Д. Нацкику за весьма полезные обсуждения работы.

1. H. B. G. Casimir, *Konink. Nederl. Acad. Wetent., Proc. Sec. Sci.* **51**, 793 (1948).
2. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1979), ч. 2.
3. В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов, *Эффект Казимира и его приложения*, Энергоатомиздат, Москва (1990).
4. В. Н. Дубрава, В. А. Ямпольский, О. И. Любимов, *Радиофизика и электроника* **4**, 70 (1999).
5. J. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **89**, 4091 (1992).
6. K. Fuchs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **34**, 100 (1938).
7. В. Н. Дубрава, В. А. Ямпольский, О. И. Любимов, *Докл. НАН Украины*, (2000) (в печати).
8. R. Onofrio, *Phys. Lett.* **A198**, 365 (1995).

9. S. K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997).

The phenomenological model for the Casimir attraction of a metal film

V. N. Dubrava and V. A. Yampol'skii

The force of the surface interaction (the Casimir effect) between a bulk conductor and a metal film on a dielectric substrate is studied using the technique of the quantum field theory. It is supposed that thickness of the film is much less than the skin depth at the characteristic frequencies of fluctuation fields. The one-particle problem of the Green function of the electromagnetic field is solved within a simple phenomenological model. Namely, the complex electrodynamic properties of the film are described by introducing a surface dielectric permittivity which is determined by the average sample conductivity $\langle\sigma\rangle$. The dependence of the Casimir force on the specularly parameter ρ characterizing the electron-surface interaction is predicted within the model. The results of this paper demonstrate the principal possibility of experimental study of the electron and surface properties of the metal films by measuring their Casimir attraction.