УДК 519.7

ИНФОРМАЦИОННЫЕ КАНАЛЫ КАК РАЗВИТИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О КАНАЛАХ СВЯЗИ

Н.Н. ДИДУК

Построено общее понятие *информационного канала*, представляющее собой расширение на все типы неопределенности понятий *канала связи* (теория информации) и *переходного распределения вероятностей* (теория вероятностей). Даны примеры каналов, в том числе — идеального и фиктивного. Кратко рассмотрены три основных способа применения информационных каналов.

Теория неопределенности представляет собой попытку создания математического аппарата для работы с *ситуациями неопределенности* произвольной природы, с которыми мы сталкиваемся при решении разнообразных практических задач. Имеется только два ограничения, налагаемых на упомянутые ситуации неопределенности: 1) должно быть известно *множество возможностей*, с которыми связана данная ситуация; 2) множество возможностей должно иметь не более чем счетную мощность (такое множество мы ради краткости называем *дискретным*).

Главная особенность теории неопределенности состоит в том, что ее математический аппарат позволяет с ситуациями неопределенности *произвольной природы* решать **ВСЕ** задачи, аналогичные тем, которые для ситуаций вероятностного типа могут быть решены средствами теории вероятностей и теории информации. Для решения таких задач используются имеющиеся в теории неопределенности *расширения* на все типы неопределенности соответствующих понятий теории вероятностей и теории информации: *распределение вероятностей*, *источник сообщений*, *количество информации*, *энтропия*, *мера неопределенности*.

Так, расширением понятий распределение вероятностей (РВ) и источник сообщений является *пространство неопределенности* (ПН) [1]. Расширениями теоретико-информационных понятий энтропия, количество информации и мера неопределенности являются одноименные (но отличающиеся от них) понятия теории неопределенности [1, 2]. Однако центральное понятие теории информации — *канал связи* — пока не имело такого расширения. Известно, что в качестве простейших каналов связи (дискретных каналов без памяти) использовались *переходные распределения вероятностей* с одного *конечного* множества на другое. Но и понятие переходного распределения пока не имело расширения в теории неопределенности.

В статье предпринимается попытка построить расширение обоих упомянутых понятий — *канала связи* и *переходного распределения* (ПР) — на все типы неопределенности. Построенное расширение названо *информационным каналом*. Показано, что возможно большое разнообразие *типов* информационных каналов и что каналы могут использоваться несколькими различными способами (не только в качестве каналов связи).

1. ПОНЯТИЕ ШЕННОНОВСКОГО КАНАЛА

Для получения первоначального представления о том, чт***о*** такое информационный канал, желательно прежде всего понять, какой объект можно построить в теории неопределенности *непосредственно* из переходного распределения. Пусть X и Y — два *дискретных* множества и пусть s есть ПР с множества X на Y. Известно, что всякое такое ПР можно представить как *семейство* вида

$$s = \left(s(\bullet \mid x) \mid x \in X \right) \tag{1}$$

(с множеством индексов X). Для каждого $x \in X$ элемент $s(\bullet \mid x)$ семейства s представляет собой *распределение вероятностей* на множестве Y (а для каждого $y \in Y$ число $s(y \mid x)$ обычно называют *условной вероятностью* элемента y относительно элемента x). Сказанное выше означает, что $s(\bullet \mid x)$ представляет собой *функцию*, определенную на Y. Подчеркнем также специально, что x есть *не аргумент* этой функции $s(\bullet \mid x)$, а *параметр*. Т.е., если $x, z \in X$ и $x \neq z$, то $s(\bullet \mid x)$ и $s(\bullet \mid z)$ — *разные* (вообще говоря) функции.

Опираясь на выражение (1), можно перевести ПР s на язык пространств неопределенности. Более конкретно, каждому РВ $s(\bullet \mid x)$ (элементу семейства s) можно поставить в соответствие некоторое *шенноновское пространство*. Напомним, что понятие шенноновского ПН было получено в результате *погружения* вероятностного типа неопределенности в пространства неопределенности [1]. Погружение свелось к тому, что каждому РВ q, заданному на дискретном множестве Y, ставится в соответствие ПН (Y, Σ_q), которое названо **шенноновским пространством** ([1], с. 130). *Критерий свертывания* (КС) Σ_q пространства (Y, Σ_q) имеет вид

$$\Sigma_q \underset{df}{=} g \mapsto \sum_{y \in Y} q(y) \odot g(y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Y \tag{2}$$

(где $\overline{\mathbf{R}}_+ \underset{df}{=} \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$; $\odot$ — операция умножения на $\overline{\mathbf{R}}_+$, а $\overline{\mathbf{R}}_+^Y$ — множество всех отображений Y в $\overline{\mathbf{R}}_+$).

Теперь с помощью выражений (1) и (2) покажем, какой объект можно построить из переходного распределения s. Если ПР s представлено в виде семейства (1), то каждый его элемент $s(\bullet \mid x)$ (являющийся распределением вероятностей на множестве Y) можно подставить в выражение (2) вместо распределения q, в результате чего получится КС $\Sigma_{s(\cdot \mid x)}$ по множеству Y, имеющий такую конструкцию:

$$\Sigma_{s(\cdot \mid x)} = g \mapsto \sum_{y \in Y} s(y \mid x) \odot g(y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Y . \tag{3}$$

Таким образом, каждому элементу $s(\bullet\,|\,x)$ семейства s мы поставили в соответствие пространство Шеннона вида $\left(Y,\, \Sigma_{s(\cdot\,|x)}\right)$. Всему же семейству s тогда будет соответствовать следующее семейство критериев свертывания (по одному и тому же множеству Y):

$$\underline{\underline{\Sigma}}_S \underset{df}{=} \left(\Sigma_{s(\cdot\,|x)} \mid x \in X\right). \tag{4}$$

Полученное семейство $\underline{\underline{\Sigma}}_S$ будем называть **шенноновским каналом** (или **каналом Шеннона**) перехода от множества X к множеству Y. Понятие шенноновского канала нетрудно обобщить на все типы неопределенности.

2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО КАНАЛА

Пусть X — дискретное множество. Это значит, что имеет место $|X| \le |\mathbf{N}|$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, а $|X|$ и $|\mathbf{N}|$ — мощности (кардинальные числа) множеств X и $\mathbf{N}$. И пусть задано семейство $\left(Y_X \mid x \in X\right)$ (с множеством индексов X) *дискретных* множеств Y_X. Вводимое ниже определение информационного канала опирается на следующее утверждение (которое приводится без доказательства).

Лемма. Объединение

$$Y \underset{df}{=} \bigcup_{X \in X} Y_X \tag{5}$$

дискретного семейства $\left(Y_X \mid x \in X\right)$ дискретных множеств является дискретным множеством. ■

Пусть задано ПН (X,S). Напомним, что результат $\mathrm{S}(f_0)$ применения критерия свертывания S к *нулевой функции* $f_0 \underset{df}{=} x \mapsto 0 \lozenge X$ (которая для каждого $x \in X$ принимает значение $f_0(x) = 0$) обозначается $\mathrm{S}\langle 0\rangle$ ([1], с. 137):

$$\mathrm{S}\langle 0\rangle \underset{df}{=} \mathrm{S}(f_0) = \underset{x \in X}{\mathrm{S}}\, 0.$$

ПН (X,S) называется **нормальным**, если его критерий S *сохраняет нуль*, т.е. имеет место равенство $\mathrm{S}\langle 0\rangle = 0$ ([2], с. 74) (в этом случае и сам критерий S иногда называем нормальным). Важное свойство каждого нормального пространства (X,S) состоит в том, что для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ выполняется $\mathrm{S}(f) \ge 0$. Действительно, ввиду того что функция f_0 является *наименьшим элементом* множества $\overline{\mathbf{R}}_+^X$, для любой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ должно выполняться неравенство $\mathrm{S}(f) \ge \mathrm{S}(f_0) = 0$.

Определение 1. Пусть задано (дискретное) семейство $(Y_X \mid x \in X)$ непустых дискретных множеств и для каждого $x \in X$ задан *сохраняющий нуль* критерий свертывания V^x по множеству Y_X. Тогда семейство

$$\mathrm{V} \underset{df}{=} (\mathrm{V}^x \mid x \in X) \tag{6}$$

будем называть **информационным каналом** (или просто **каналом**) над парой алфавитов (X, Y) (где Y определяется из (5)), или **каналом перехода** от множества X к множеству Y. Сами множества X и Y будем называть соответственно **входным** и **выходным алфавитами** канала V. ■

Примем еще следующее *обратное соглашение*: если задан некоторый канал V и его входной алфавит X, то будем предполагать, что канал V всегда может быть представлен в виде семейства (6), а каждому элементу семейства V, который соответствует индексу $x \in X$, присваивается стандартное обозначение V^x (не исключающее возможность и других обозначений). Множество всех каналов над парой алфавитов (X, Y) будем обозначать $\mathsf{V}(X, Y)$.

Пусть задан канал V над парой алфавитов (X, Y) и некоторый элемент $x \in X$. Согласно определению 1 *областью действия* критерия V^x является не выходной алфавит Y канала V, а множество Y_X (которое ввиду дефиниции (5) может не совпадать с множеством Y). Иначе говоря, область определения критерия V^x не всегда совпадает с множеством $\overline{\mathbf{R}}_+^Y$. Это может вызвать некоторые неудобства при записи выражений с участием каналов. Поэтому мы сейчас покажем, как можно раз и навсегда избавиться от этих неудобств за счет *несущественного сужения* понятия канала.

3. НЕСУЩЕСТВЕННОЕ СУЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ КАНАЛА

Если задан канал V над парой алфавитов (X, Y), то для каждого $x \in X$ с помощью критерия свертывания V^x можно построить КС CV^x *по множеству* Y (т.е имеющий область определения $\overline{\mathbf{R}}_+^Y$). Пусть задана функция $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$. Тогда положим

$$\mathrm{CV}^x(g) \underset{df}{=} \mathrm{V}^x(g \downarrow Y_x), \tag{7}$$

где $g \downarrow Y_x$ есть *сужение* функции g на множество Y_X. Таким образом, с помощью канала V можно определить новый канал вида $\mathrm{CV} \underset{df}{=} (\mathrm{CV}^x \mid x \in X)$ такой, что для каждого $x \in X$ областью действия критерия свертывания CV^x является множество Y.

Определение 2. Пусть задан канал $V \underset{df}{=} \left(V^x \mid x \in X\right)$ над парой алфавитов (X, Y) (где V^x для каждого $x \in X$ есть КС по множеству Y_X, а множество Y определяется из соотношения (5)). **Замыканием** канала V будем называть такой канал $CV \underset{df}{=} \left(CV^x \mid x \in X\right)$, что для каждого $x \in X$ КС CV^x имеет вид

$$CV^x \underset{df}{=} g \mapsto V^x(g \downarrow Y_x) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Y. \tag{8}$$

Канал будем называть **замкнутым**, если он совпадает со своим замыканием. ■

Очевидно, что для всякого канала $V \in \mathrm{V}(X, Y)$ имеют место соотношения $CV \in \mathrm{V}(X, Y)$ и $CCV = CV$.

Замечания. 1. Следует помнить, что в результате замыкания канала V, т.е. превращения его в канал CV, некоторые (или все) из составляющих его КС CV^x могут, как следует из соотношения (8), приобрести непустые *области безразличия* ([3], разд. 7), состоящие из тех элементов y множества Y, для которых значение $g(y)$ *каждой* функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ в точке y *не влияет* на результат $CV^x(g)$ применения функционала CV^x к функции g.

2. В известной монографии «Универсальная алгебра» П. Кон ввел понятие *оператора замыкания на данном множестве* ([4], гл. II, п. 1). Наше понятие замыкания канала связано с операторами замыкания по Кону следующим образом. Пусть задано некоторое множество $W \subset \mathrm{V}(X, Y)$ каналов над парой алфавитов (X, Y). *Замыканием* $\overline{W}$ множества W назовем объединение множества W с множеством замыканий всех каналов из W. Очевидно, что тогда будет также выполняться включение $\overline{W} \subset \mathrm{V}(X, Y)$. Теперь легко показать, что отображение $W \mapsto \overline{W}$ множества $\mathrm{B}\left(\mathrm{V}(X, Y)\right)$ в себя (где $\mathrm{B}(V)$ есть *булеан*, т.е. множество всех подмножеств, множества V) является оператором замыкания в множестве $\mathrm{V}(X, Y)$ (по Кону). ■

Понятие замкнутого канала, конечно, уже общего понятия канала, но, как легко видеть, такое сужение является *несущественным*, так как каждый канал общего вида можно превратить в замкнутый. Поэтому дальше, говоря о каком-нибудь канале, будем обычно (если не оговорено противное) предполагать, что он *замкнут*.

4. ПРИМЕРЫ КАНАЛОВ

1. Шенноновский канал. Этот пример уже рассмотрен выше: выражения (3) и (4) выясняют структуру *шенноновского канала* Σ_S (где s — переходное распределение с множества X на множество Y).

2. Канал Заде. Напомним, что согласно *функции погружения* ϑ_{FS} в пространства неопределенности *нечетких множеств* (выражение (7) из работы [1]) каждому нечеткому подмножеству множества Y с функцией принадлежности $\mu \in [0,1]^Y$ соответствует *пространство Заде* (Y, SUP_μ), где КС SUP_μ имеет вид

$$\mathrm{SUP}_\mu \underset{df}{=} g \mapsto \sup_{y \in Y} \mu(y) \odot g(y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Y \tag{9}$$

(там же, выражение (6)).

В теории нечетких множеств, кажется, еще не успели ввести понятие *переходной функции принадлежности*, аналогичное понятию переходного распределения вероятностей. Поэтому мы здесь даем его определение. Пусть задано некоторое семейство вида

$$\lambda = \left(\lambda(\bullet \mid x) \mid x \in X\right), \tag{10}$$

аналогичное семейству (1), но такое, что каждый его элемент $\lambda(\bullet \mid x)$ представляет собой функцию принадлежности некоторого нечеткого подмножества (дискретного) множества Y. Такое семейство λ будем называть **переходной функцией принадлежности** с множества X на множество Y. Снова подчеркнем, что в каждой функции принадлежности $\lambda(\bullet \mid x)$ из семейства λ буква x есть не аргумент, а *параметр*. Аргументами же являются элементы y множества Y, а число $\lambda(y \mid x)$ можно рассматривать как *условную степень принадлежности* (множеству Y) элемента y относительно элемента x.

В соответствии с функцией погружения ϑ_{FS} нечетких множеств каждой функции принадлежности $\lambda(\bullet \mid x)$ из семейства λ должно соответствовать пространство Заде $\left(Y, \mathrm{SUP}_{\lambda(\cdot|x)}\right)$, критерий свертывания $\mathrm{SUP}_{\lambda(\cdot|x)}$ которого, как следует из выражения (9), должен иметь вид

$$\mathrm{SUP}_{\lambda(\cdot|x)} = g \mapsto \sup_{y \in Y} \lambda(y \mid x) \odot g(y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Y. \tag{11}$$

Всему же семейству λ тогда будет соответствовать следующее семейство критериев свертывания (по одному и тому же множеству Y):

$$\cancel{\mathrm{SUP}}_\lambda \underset{df}{=} \left(\mathrm{SUP}_{\lambda(\cdot|x)} \mid x \in X\right). \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что семейство $\cancel{\mathrm{SUP}}_\lambda$ представляет собой (замкнутый) канал перехода от множества X к множеству Y. Семейства вида $\cancel{\mathrm{SUP}}_\lambda$ мы будем называть **каналами Заде**.

3. Экспоненциальный суммирующий канал. В работе [5] в качестве примера рассматривалось *экспоненциальное суммирующее ПН* вида

(Y, Σ_q^*) (где q — по-прежнему есть РВ на множестве Y). КС Σ_q^* этого пространства описывается выражением

$$\Sigma_q^* \underset{df}{=} g \mapsto \sum_{y \in Y} q(y) \odot 2^{g(y)} \Diamond \overline{\mathbf{R}}_+^Y \tag{13}$$

([5], выражение (19)). Пространство (Y, Σ_q^*) интересно тем, что демонстрирует возможность довольно необычной ситуации — когда знание заданного на множестве Y распределения вероятностей q отнюдь не означает, что на этом множестве имеет место *вероятностная* ситуация неопределенности в традиционном понимании (которая, как мы знаем, описывается шенноновским пространством (Y, Σ_q), а не пространством (Y, Σ_q^*)).

Действительно, наиболее характерными особенностями ситуации неопределенности чаще всего считаются те, которые определяют возможности и условия для отыскания нужного нам элемента (например, в процессе так называемого *свободного поиска* или при *игре в отгадывание*). Но, как легко показать, вся специфика любой задачи свободного поиска сводится к *способу определения полных затрат*, т.е. того, каким образом полные затраты зависят от тех процедур поиска, которые порождаются заданной стратегией поиска. Кроме того, практически теми же самыми способами определения полных затрат характеризуется и процесс *дешифруемого* или *префиксного* кодирования.

Легко понять, что при поиске в шенноновском пространстве (Y, Σ_q) и в экспоненциальном пространстве (Y, Σ_q^*), а также при кодировании того и другого пространства, способы определения полных затрат существенно различны (чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить выражения (1) и (13)). Это различие проявляется и в том, что *энтропия* $H_2(Y, \Sigma_q^*)$ (по основанию 2) экспоненциального пространства (Y, Σ_q^*), имеющая вид

$$H_2(Y, \Sigma_q^*) = \Big(\sum_{y \in Y} \sqrt{q(y)}\Big)^2 \tag{14}$$

([5], выражение (20)), совсем непохожа на энтропию шенноновского пространства (Y, Σ_q) ([1], выражение (13)).

Экспоненциальный канал строится аналогично тому, как строились каналы Шеннона и Заде. Пусть снова s — переходное распределение вероятностей с множества X на множество Y. Тогда для каждого $x \in X$ можно построить экспоненциальное ПН $(Y, \Sigma_{s(\cdot|x)}^*)$, критерий свертывания которого $\Sigma_{s(\cdot|x)}^*$ имеет вид

$$\Sigma_{s(\cdot|x)}^* = g \mapsto \sum_{y \in Y} s(y|x) \odot 2^{g(y)} \Diamond \overline{\mathbf{R}}_+^Y. \tag{15}$$

А семейство

$$\boldsymbol{\Sigma}^*_S \underset{df}{=} \left(\Sigma^*_{S(\cdot\,|x)} \mid x\in X\right) \tag{16}$$

является, очевидно, (замкнутым) каналом перехода от множества X к множеству Y. Этот канал и будем называть **экспоненциальным суммирующим каналом**.

4. Ассоциированные каналы. Пусть задано некоторое (непустое) дискретное множество $\mathcal{K}$ критериев свертывания по множеству X, сохраняющих нуль. Тогда для каждого $\mathcal{S}\in\mathcal{K}$ имеем нормальное ПН вида $(X,\mathcal{S})$. Пусть теперь $i_{\mathcal{K}}$ — *тождественное* отображение множества $\mathcal{K}$ на себя. Тогда, как нетрудно видеть, функция $i_{\mathcal{K}}$ (если ее представить как семейство), является *замкнутым* каналом перехода от множества $\mathcal{K}$ к множеству X. Будем говорить, что канал $i_{\mathcal{K}}$ **ассоциирован** с множеством $\mathcal{K}$ (или с элементами множества $\mathcal{K}$).

5. Канал, ассоциированный с распределениями вероятностей. Напомним, что множество *всех* распределений вероятностей на (дискретном) множестве X мы обозначаем $\mathcal{P}(X)$. Пусть задано некоторое непустое *дискретное* множество $Q\subset\mathcal{P}(X)$ распределений вероятностей на множестве X. В этом случае для каждого $q\in Q$ имеем шенноновское ПН $(X,\, \Sigma_q)$. А семейство

$$\boldsymbol{\Sigma}_Q \underset{df}{=} \left(\Sigma_q \mid q\in Q\right) \tag{17}$$

представляет собой канал над парой алфавитов $(Q,\, X)$. Будем говорить, что канал $\boldsymbol{\Sigma}_Q$ **ассоциирован с распределениями вероятностей** из Q. Заметим, что подобные каналы используются (для описания условий наблюдения) в *математической статистике* при решении, например, задач *проверки гипотез* (в этом случае элементы множества Q называются *статистическими гипотезами*).

6. Канал, ассоциированный с подмножествами. Пусть задано дискретное множество $\mathcal{X}\subset\mathcal{B}(X)$ непустых подмножеств множества X, такое, что

$$\bigcup_{A\in\mathcal{X}} A = X. \tag{18}$$

Для каждого подмножества $A\in\mathcal{X}$ получим *бесструктурное* ПН $(A,\ \mathrm{SUP}_A)$ ([1], с. 131), КС SUP_A которого имеет вид

$$\mathrm{SUP}_A \underset{df}{=} g\mapsto \sup_{x\in A} g(x) \ \Diamond\ \overline{\mathbf{R}}^A_+. \tag{19}$$

Ввиду равенства (18) семейство

$$\boldsymbol{\mathrm{SUP}}_{\mathcal{X}} \underset{df}{=} \left(\mathrm{SUP}_A \mid A\in\mathcal{X}\right) \tag{20}$$

есть канал перехода от множества X к множеству X. Специально подчеркнем, что $\cancel{\mathrm{SUP}}_{\mathrm{X}}$ — *незамкнутый* канал (хотя можно, конечно, построить его замыкание). Будем говорить (допуская вольность речи), что канал $\cancel{\mathrm{SUP}}_{\mathrm{X}}$ **ассоциирован с подмножествами** из X .

7. Идеальный канал. Интуитивно подразумевается, что информационный канал — это математическая модель такого устройства (обладающего входом и выходом), назначение которого сводится к *передаче информации* с входа на выход (мы говорим тогда, что эта информация передается *по каналу*). Пока у нас еще нет возможности получить ответ на вопрос, *как много* этой информации передается по тому или иному каналу. Однако можно показать, что все каналы, рассматривавшиеся в предыдущих примерах, неспособны передавать *всю* информацию с входа на выход. Иначе говоря, по состоянию на выходе канала (т.е. по заданному элементу выходного алфавита) невозможно однозначно восстановить состояние на входе канала (т.е. узнать, какому элементу входного алфавита он соответствует). Теперь мы собираемся ответить на вопрос, как должен выглядеть *идеальный канал*, который будет передавать с входа на выход *всю информацию*.

Пусть задан некоторый элемент x (дискретного) множества X. Рассмотрим функционал

$$\mathbf{1}^x \underset{df}{=} f \mapsto f(x) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^X. \tag{21}$$

Очевидно, что он является возрастающим и что, следовательно, пара $(X, \mathbf{1}^x)$ есть ПН. Для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеем равенство

$$\mathbf{1}^x(f) = f(x). \tag{22}$$

А опираясь на (22), легко показать, что пространство $(X, \mathbf{1}^x)$ является нормальным.

Замечание. Подчеркнем, что пространство $(X, \mathbf{1}^x)$ имеет почти максимально возможную *область безразличия*: каждый элемент $y \in X$, отличный от x, является *точкой безразличия*. ■

Рассмотрим теперь семейство

$$\mathbf{1} \underset{df}{=} \left(\mathbf{1}^x \mid x \in X\right), \tag{23}$$

которое, очевидно, представляет собой (замкнутый) канал над парой алфавитов (X, X). Этот канал будем называть **идеальным каналом** (или **каналом без помех**).

Оправдывает ли канал $\mathbf{1}$ свое название *идеального канала* и согласуется ли наше понятие канала без помех с аналогичным понятием теории информации? В теории информации канал без помех, как известно, описывается переходным распределением

$$t \underset{df}{=} \left(t(\bullet \mid x) \mid x \in X\right) \tag{24}$$

с множества X на себя, таким, что для каждого $x \in X$ распределение $t(\bullet \mid x) \in \mathrm{P}(X)$ *тривиально* и характеризуется условием $t(x \mid x) = 1$. Теперь мы можем рассмотреть шенноновский канал $\underline{\underline{\Sigma}}_t$ и выяснить, какое отношение он имеет к нашему идеальному каналу $\mathbf{1}$.

Для этого достаточно выбрать произвольный элемент $x \in X$ и сравнить два критерия свертывания: шенноновский КС $\Sigma_{t(\cdot|x)}$ и КС $\mathbf{1}^x$. Пусть задана функция $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$. Тогда для любого элемента $u \in X$, отличного от x, имеем $t(u \mid x) = 0$. Следовательно, в силу выражения (3) получим

$$\Sigma_{t(\cdot|x)}(f) = \sum_{u \in X} t(u \mid x) \odot f(u) = f(x). \tag{25}$$

Сравнивая же выражения (22) и (25), можно сделать вывод, что для каждого $x \in X$ выполняется

$$\Sigma_{t(\cdot|x)} = \mathbf{1}^x. \tag{26}$$

Следовательно, имеем равенство $\underline{\underline{\Sigma}}_t = \mathbf{1}$.

Замечание. Во избежание недоразумений напомним об *экстенсиональности* математики, опирающейся на теорию множеств. Смысл известной аксиомы теории множеств, которая так и называется *аксиома экстенсиональности* [6] (гл. II, § 1, п. 3), сводится к тому, что два множества, состоящие из одних и тех же элементов, считаются равными. Функционалы так же, как и все остальные функции (в том числе и те, которые представлены в виде семейств), являются *множествами* (более конкретно — множествами пар). Поэтому не имеет никакого значения, что *происхождение* и *способ построения* двух функционалов $\Sigma_{t(\cdot|x)}$ и $\mathbf{1}^x$ совершенно различны. Их равенство следует из того, что выражения (22) и (25) дают один и тот же результат для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$. Равенство же каналов $\underline{\underline{\Sigma}}_t$ и $\mathbf{1}$ гарантировано тем, что для каждого $x \in X$ имеет место (26). ■

Так что наше понятие канала без помех, по-видимому, хорошо согласуется с представлениями, сложившимися под влиянием теории информации, а канал $\mathbf{1}$ действительно заслуживает названия идеального.

8. Фиктивные каналы. Рассмотрим разновидность каналов, противоположную идеальным каналам, т.е. покажем, какими свойствами должен обладать канал для того, чтобы он оказался вообще *неспособным передавать информацию* с входа на выход. Итак, пусть задан некоторый канал $\mathrm{V} \underset{df}{=} (\mathrm{V}^x \mid x \in X)$ над парой алфавитов (X, Y). И предположим, что канал V обладает следующим свойством: найдется такой КС T по множеству Y, что для каждого $x \in X$ имеет место $\mathrm{V}^x = \mathrm{T}$. КС T будем в таком случае называть **реализатором** канала V.

Иначе говоря, если канал V с входным алфавитом X обладает реализатором T, то он должен иметь вид

$$\mathsf{V} \underset{df}{=} (\mathrm{T} \mid x \in X), \tag{27}$$

из которого должно быть ясно, что никакая информация с входа на выход по такому каналу передаваться не может. Каналы этого типа (т.е. такие, которые обладают реализатором) будем называть **фиктивными**.

Замечание. В двух последних примерах каналов говорилось о возможности или невозможности *передачи информации* с входа канала на его выход. При этом мы не опирались на какой-либо конкретный аппарат, позволяющий *измерять* передаваемую информацию, а опирались исключительно на самые общие соображения. Наша аргументация очень близка к той, которая позволила У.Р. Эшби обосновать в его книге «Введение в кибернетику» [7] *закон необходимого разнообразия* (гл. 11). Действительно, фиктивный канал не способен передавать информацию просто потому, что разнообразие, которое он обеспечивает на своем выходе, равно нулю. ■

Для иллюстрации сказанного применим понятие фиктивного канала к вероятностному типу неопределенности. Пусть задан шенноновский канал $\underline{\underline{\Sigma}}_S$ над парой алфавитов (X, Y). При каких условиях канал $\underline{\underline{\Sigma}}_S$ будет фиктивным? Ответ очевиден: когда найдется такое РВ $q \in \mathsf{P}\ (Y)$, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ будет выполняться равенство $s(y \mid x) = q(y)$. В этом случае шенноновский КС Σ_q будет *реализатором* канала $\underline{\underline{\Sigma}}_S$. Из теории информации известно, что, действительно, с помощью канала связи, описываемого таким переходным распределением s, нельзя передать никакую информацию.

5. СПОСОБЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ КАНАЛОВ

Введенное выше понятие информационного канала может применяться в нескольких направлениях.

Во-первых, каждый канал может рассматриваться как фрагмент формальной модели некоторой *системы связи*. Тогда (и только тогда) он играл бы роль *канала связи* (в теории информации рассматривались только каналы связи).

Во-вторых, понятие канала может использоваться при описании задач *принятия решений*, в которых перед принятием решений допускается проведение *наблюдений* (с целью получения дополнительной информации о неизвестном *состоянии природы*). В этом случае ситуация неопределенности, связанная с ожидаемым результатом наблюдения, *должна зависеть* от состояния природы. Иначе говоря, описание полных условий проведения наблюдений фактически должно представлять собой *семейство* ситуаций неопределенности (с набором возможных состояний природы в качестве множества индексов семейства). Для формализации такого семейства вполне подходит понятие информационного канала. В случае же, если связанная с наблюдениями ситуация неопределенности не зависит от состояния природы, проведение таких наблюдений бесполезно, так как это было бы равносильно попытке использования *фиктивного* канала (см. пример 8).

Наконец, возможно еще одно направление применения каналов: они могут использоваться как *строительный материал*, позволяющий конструировать способы описания *новых типов неопределенности* (более сложных, чем те, которые были взяты за основу). Аналогии можно почерпнуть из теории вероятностей, где давно уже переходные распределения применяются в роли строительного материала, или, говоря точнее, — в качестве *операторов*, позволяющих одни РВ преобразовывать в другие. Действительно, пусть заданы: некоторое РВ p на множестве X и ПР s с множества X на множество Y. Тогда, как известно, из пары (p, s) можно построить *два* новых распределения вероятностей: 1) *двумерное* РВ на произведении множеств $X \times Y$ и 2) *одномерное* РВ на множестве Y. Оба эти способа построения новых РВ заслуживают того, чтобы перенести их на общий аппарат неопределенности.

Идея такого перенесения вытекает из следующих двух аналогий: 1) множество X, на котором задано РВ p, аналогично шенноновскому ПН (X, Σ_p); 2) а ПР s с множества X на множество Y аналогично шенноновскому каналу $\underline{\underline{\Sigma}}_s$. Так что, продолжая аналогию, по-видимому, можно построить такой математический аппарат, в котором информационные каналы будут играть роль *операторов* преобразования одних пространств неопределенности в другие. Однако это уже тема для следующей статьи.

ВЫВОДЫ

Введенное здесь общее понятие *информационного канала* представляется важным шагом в развитии теории неопределенности по следующим причинам:

1. Впервые появилась возможность рассмотреть все проблемы связи более полно, чем это было сделано в теории информации, т.е. сняв требование о том, что как в источниках сообщений, так и в каналах связи может существовать неопределенность только вероятностного типа (для этого в качестве источника сообщений достаточно взять произвольное ПН, а в качестве канала связи — информационный канал)

2. Применение информационных каналов в задачах принятия решений в роли средства для описания условий наблюдения позволяет расширить спектр условий, поддающихся описанию, а также *унифицировать* такие описания, во всех случаях сводя их *только* к выбору соответствующего канала (формальная структура канала может отражать не только его способность передавать информацию, но и убытки, связанные с проведением наблюдений, а также еще ряд других возможных привходящих обстоятельств).

3. Применение информационных каналов в качестве строительного материала для конструирования способов описания новых типов неопределенности дает возможность существенно расширить ассортимент поддающихся

описанию типов. Это касается в первую очередь *комбинированных* типов неопределенности со сложной (*иерархической*) внутренней структурой. Наиболее важным примером ситуаций такого рода является *поливероятностная* ситуация, когда известно, что ситуация характеризуется некоторым распределением вероятностей, но сведения об этом распределении неполны (или вообще отсутствуют).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности и изоморфизм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 4. — С. 128–143.
2. *Дидук Н.Н.* Информационные пространства. Понятия собственной информации и неопределенности // Кибернетика. — 1986. — № 4. — С. 74–80.
3. *Дидук Н.Н.* Система морфизмов для пространств неопределенности и ее применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 1. — С. 34–47.
4. *Кон П.* Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968. — 352 с.
5. *Дидук Н.Н.* Понятие шкалы пространства неопределенности и его применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 3. — С. 115–127.
6. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
7. *Эшби У.Р.* Введение в кибернетику. — М.: Изд. иностр. лит., 1959. — 432 с.

Поступила 07.06.2005