УДК 518.9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СО СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХОЙ

В.В. ОСТАПЕНКО, Е.В. ОСТАПЕНКО, С.Н. АМИРГАЛИЕВА

Рассматриваются дифференциальные игры, в которых роль одного из игроков играет случайная помеха. Предлагается приближенный метод решения таких игр. Для его описания вводится и исследуется новое понятие почти выпуклой функции.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории дифференциальных игр игроки не знают действия противника в будущем и выбирают управления, основываясь на текущем или прошедшем состоянии динамической системы. В некоторых подходах допускается определенная информационная дискриминация одного из игроков. Так, например, если догоняющий игрок P играет в ε-стратегиях [1, 2], то он выбирает свое управление, зная управление убегающего игрока E на время ε вперед. Величину ε выбирает игрок E.

В ряде прикладных задач в качестве игрока E выступает некоторая помеха. Если помеха является случайной величиной и игроку P известны ее вероятностные характеристики, то он может использовать эту информацию о возможном будущем управлении противника для построения своей стратегии.

В работе [3] описана структура дифференциальной игры со случайной помехой и детально изучен некоторый класс линейных игр. В данной статье рассматриваются игры в общем линейном и нелинейном случаях и приводится приближенный метод их решения, для обоснования которого используются элементы выпуклого и обобщенного выпуклого анализа. Вводится новое понятие выпуклой функции, обобщающее классическое, и исследуются ее свойства.

Приближенные методы для решения классических дифференциальных игр изложены в работах [2, 4–6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим управляемый объект, динамика которого описывается уравнением

$$\dot{z} = f(z,u,v), \tag{1}$$

где $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$, E^n — n-мерное евклидово пространство; U — компакт из евклидова пространства; V — измеримое подмножество евклидова пространства.

На функцию f и множество U налагаем ограничения:

1) $f(z,u,v)$ — непрерывна по совокупности переменных;

2) $\|f(z,u,v)\| \le C(v)(1+\|z\|)$, где $C(v)$ — непрерывная функция;

3) $f(z,U,v)$ — выпуклое множество.

Параметром u распоряжается игрок P, параметр v является случайной помехой с функцией распределения $\mu(\cdot)$.

Пусть θ — фиксированный момент времени; Φ — непрерывный функционал, определенный на E^n.

Рассмотрим задачу минимизации игроком P функции $\Phi(z(\theta))$, где $z(\cdot)$ — решение уравнения (1).

Опишем стратегию игрока P. Пусть $\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < ... < \tau_k = \theta\}$ — конечное разбиение интервала $[0,\theta]$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$. Будем считать, что при фиксированном разбиении ω функция $v(t)$ является кусочно-постоянной с интервалами постоянства $[\tau_{i-1},\tau_i)$, $i = 1,...,k$. Игрок P в начальный момент $\tau_0 = 0$ знает начальную позицию $z(0) = z_0$, величину δ_1, значение помехи v_1 на интервале $[\tau_0,\tau_1)$ и выбирает свое управление $u(t)$ на $[\tau_0,\tau_1)$. Аналогично в момент времени τ_{i-1} игрок P знает $z(\tau_{i-1})$, величину δ_i, значение помехи v_i на интервале $[\tau_{i-1},\tau_i)$ и выбирает свое управление $u_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1},\tau_i)$. Кроме того, игрок P знает функцию распределения $\mu(\cdot)$.

Описанную стратегию игрока P назовем ε-стратегией и обозначим Γ_P. Она является аналогом ε-стратегии [1,2]. Игрок P при этом не знает заранее разбиения ω, и ему лишь по ходу игры становятся известными значения длин интервалов δ_i. Поэтому естественно ввести второго игрока E и оставить за ним право выбора разбиения ω.

Обозначим R_ε оператор, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $\psi(x)$ функцию

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_V \inf_{U(\cdot)} \psi(z(\varepsilon \mid u(\cdot),v,x))\mu(dv), \tag{2}$$

где $z(t \mid u(\cdot),v,x)$ — решение (1), соответствующее управлениям $u(\cdot)$, v и начальной позиции x. Инфинум в (2) берется по всем допустимым управлениям игрока P на интервале $[0,\varepsilon]$, т.е. по всем измеримым функциям на $[0,\varepsilon]$ со значениями в U. Отметим, что в силу ограничений на функцию f и непрерывности ψ инфинум в (2) достигается.

Положим

$$R^\omega\Phi = R_{\delta_1}...R_{\delta_k}\Phi\,,\ \tilde{R}_\theta\Phi = \sup_\omega R^\omega\Phi\,,$$

где супремум берется по всем разбиениям ω интервала $[0,\theta]$.

Будем считать, что при фиксированном ω значения помехи v_i на интервалах $[\tau_{i-1};\tau_i)$ являются независимыми случайными величинами. Предположим, что игрок P выбрал некоторую стратегию Γ_P, описанную выше. Это означает, что его управления $u_i(\cdot)$ на интервалах $[\tau_{i-1};\tau_i)$ зависят от реализации случайных помех v_i и текущих значений $z(\tau_{i-1})$. Обозначим $z(\theta|\Gamma_P, v_1,...,v_k, x)$ решение (1), соответствующее стратегии Γ_P и реализациям $v_1,...,v_k$ при начальном условии $z_0 = x$. Тогда

$$M_\omega(\Phi(z(\theta|\Gamma_P, x)) = \int_V ... \int_V \Phi(z(\theta|\Gamma_P, v_1,...,v_k, x)\mu(dv_k)...\mu(dv_1) \qquad (3)$$

является математическим ожиданием значения функционала Φ на конце траектории $z(\theta)$, соответствующее ε-стратегии Γ_P и разбиению ω.

Цель игрока P — минимизировать функционал (3).

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует стратегия Γ_P^* игрока P такая, что для любого разбиения ω

$$M_\omega\Phi(z(\theta|\Gamma_P^*, x)) \le \tilde{R}_\theta\Phi(x) + \varepsilon .$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение ω_ε такое, что для любой стратегии Γ_P

$$M_{\omega_\varepsilon}\Phi(z(\theta|\Gamma_P, x)) \ge \tilde{R}_\theta\Phi(x) - \varepsilon .$$

Из теоремы 1 следует, что для описания гарантированного математического ожидания минимума функционала $\Phi(z(\theta))$ и построения стратегии Γ_P^* можно использовать оператор $\tilde{R}_\theta$.

ПОЧТИ ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть K — выпуклое подмножество пространства E^n.

Определение 1. Функция $\varphi(x)$ называется слабо почти выпуклой с константой $\kappa \ge 0$, если для любых векторов $x_i \in K$ и чисел $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, I — произвольное конечное множество индексов, выполняется

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \kappa r^2 ,$$

где $r = \max_{i,j \in I} \left\| x_i - x_j \right\|$.

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется сильно почти выпуклой с константой $\kappa \ge 0$, если для любых $x_i \in K$, $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ существует такое $y \in K$, что

$$\left\| y - \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \right\| \le \kappa r^2, \quad \varphi(y) \le \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(x_i),$$

где $r = \max_{i,j\in I} \left\| x_i - x_j \right\|$.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L и является сильно почти выпуклой с константой κ. Тогда $\varphi(x)$ — слабо почти выпуклая функция с константой $L\kappa$.

Доказательство. Обозначим $\bar{x} = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$. В силу условий леммы

$$\varphi(\bar{x}) \le \varphi(y) + L\left\| y - \bar{x} \right\| \le \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(x_i) + L\kappa r^2,$$

что и доказывает слабую почти выпуклость функции φ. Величины x_i, λ_i, y и r взяты из определения 2.

Обозначим $\operatorname{epi}\varphi = \{(x,\gamma) \in E^{n+1} : x \in K,\ \varphi(x) \le \gamma\}$ надграфик функции φ.

Определение 3. Множество $M \subset E^n$ называется почти выпуклым с константой $\kappa \ge 0$, если для любых $x_i \in M$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ выполняется

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in M + \kappa r^2 S,$$

где $r = \max_{i,j\in I} \left\| x_i - x_j \right\|$, $S = \{x \in E^n : \left\| x \right\| \le 1\}$ — единичный шар.

Обычная выпуклость функции φ связана с выпуклостью множества $\operatorname{epi}\varphi$. Посмотрим, что происходит в случае почти выпуклости.

Лемма 2. Пусть φ — слабо почти выпуклая с константой κ функция. Тогда $\operatorname{epi}\varphi$ — почти выпуклое с константой κ множество.

Доказательство. Пусть $(x_i, \gamma_i) \in \operatorname{epi}\varphi$, $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. Тогда $\varphi(x_i) \le \gamma_i$, $i \in I$. Положим $\bar{x} = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, $\bar{\gamma} = \sum_{i\in I} x_i \gamma_i$. Из слабой почти выпуклости следует $\varphi(\bar{x}) \le \sum_{i\in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \kappa r^2 \le \sum_{i\in I} \lambda_i \gamma_i + \kappa r^2 = \bar{\gamma} + \kappa r^2 = \mu$.

Отсюда $(\bar{x}, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi$. С другой стороны, $\left\| (\bar{x}, \bar{\gamma}) - (\bar{x}, \mu) \right\| \le \kappa r^2$. Это и означает почти выпуклость с константой κ множества $\operatorname{epi}\varphi$.

Лемма 3. Пусть функция φ удовлетворяет условию Липшица с константой L, $\operatorname{epi}\varphi$ — почти выпуклое множество с константой κ. Тогда функция φ — слабо почти выпукла с константой $(\kappa + L\kappa)$.

Доказательство. Пусть $x_i \in K$, $\lambda_i \ge 0$, $i \in I$, $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, $\gamma_i = \varphi(x_i)$, $\bar{x} = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, $\bar{\gamma} = \sum_{i\in I} \lambda_i \gamma_i$.

Так как $(x_i, \gamma_i) \in \operatorname{epi}\varphi$, то существует пара $(y, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi$ такая, что $\|(\bar{x}, \bar{\gamma}) - (y, \mu)\| \le \kappa r^2$.

Отсюда $\|\bar{x} - y\| \le \kappa r^2$, $\|\bar{\gamma} - \mu\| \le \kappa r^2$. В результате получаем

$$\varphi(y) \le \mu \le \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \kappa r^2 .$$

В силу условия Липшица $\varphi(\bar{x}) \le \varphi(y) + L\kappa r^2 \le \bar{\gamma} + \kappa r^2 + L\kappa r^2$.

Лемма 4. Пусть функция φ — дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности множества K и $\kappa = \sup\limits_{x \in K} \left\| \dfrac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \right\| < \infty$. Тогда φ — слабо почти выпукла с константой κ.

Доказательство. Пусть $x_i \in K$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, $\bar{x} = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$, $r = \max\limits_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$. По формуле Тейлора $\varphi(x_i) = \varphi(\bar{x}) + \varphi'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + o(\|x_i - \bar{x}\|)$, где $|o(\|x_i - \bar{x}\|)| \le \kappa r^2$. Отсюда, так как

$$\left| \sum_{i \in I} \lambda_i o(\|x_i - \bar{x}\|) \right| \le \sum_{i \in I} \lambda_i |o(\|x_i - \bar{x}\|)| \le \sum_{i \in I} \lambda_i \kappa r^2 = \kappa r^2 ,$$

то

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) = \varphi(\bar{x}) + \varphi'(\bar{x}) \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i - \bar{x} \right) + \sum_{i \in I} \lambda_i o(\|x_i - \bar{x}\|) \ge \varphi(\bar{x}) - \kappa r^2 .$$

Пусть $f : E^n \to E^n$ — непрерывно дифференцируемая функция; U — выпуклый компакт в пространстве E^n; $h > 0$ — число.

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \min_{u \in U} \varphi(x + f(x)h + uh) . \tag{4}$$

Лемма 5. Пусть φ удовлетворяет условию Липшица с константой L и является слабо почти выпуклой с константой κ; $D = \sup\limits_{x \in K} \left\| \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) \right\|$. Тогда функция ψ — слабо почти выпукла с константой $\kappa + LDh$.

Доказательство. Пусть $x_i \in K$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, $\bar{x} = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$, $r = \max\limits_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$. По формуле Тейлора $f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + o(\|x_i - \bar{x}\|)$, где $o(\|x_i - \bar{x}\|) \le Dr^2$. Из (4) следует существование таких $u_i \in U$, что $\psi(x_i) = \varphi(x_i + f(x_i)h + u_i h)$. Поскольку U выпукло, то существует $\bar{u} \in U$ такое, что $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i u_i = \bar{u}$.

Отсюда

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\psi(x_i)=\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi\big(x_i+f(\bar x)h+f'_x(\bar x)(x_i-\bar x)h+o(\|x_i-\bar x\|)h+u_ih\big)\geq$$

$$\geq\varphi\big(\bar x+f(\bar x)h+o(\|x_i-\bar x\|)h+\bar u\,h\big)-\kappa r^2\geq$$

$$\geq\varphi\big(\bar x+f(\bar x)h+\bar u\,h\big)-\kappa r^2-DLhr^2.$$

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД

Будем предполагать, что множество V — компакт, а функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_K на каждом компакте K. В этом случае функцию $\tilde R_\theta\Phi$ можно представить следующим образом.

Обозначим $R_h^m=\underbrace{R_h...R_h}_{m}$. Так же, как и в работе [2], доказывается

Теорема 2. $\tilde R_\theta\Phi=\sup\limits_{mh=\theta}R_h^m\Phi$ и последовательность $\{R_h^m\Phi\}$, $m=1,2,...$ равномерно на каждом компакте сходится в функции $\tilde R_\theta\Phi$.

Обозначим χ_h оператор, который ставит в соответствие каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ функцию $\psi(x)=\int\limits_V\min\limits_{u\in U}\varphi\big(x+f(x,u,v)h\big)\mu(dv)$.

В данном пункте рассмотрены вопросы приближения оператора $\tilde R_t$ оператором $\chi_h^m, mh=t$, где $\chi_h^m=\underbrace{\chi_h\cdots\chi_h}_{m}$. Пусть K — компакт из E^n. Положим

$$K(t_0)=\overline{\text{co}}\bigcup_{\substack{x\in K\\ t\in[0,\,t_0]}}\;\bigcup_{\substack{u(\cdot)\\ v(\cdot)}}z(t|u(\cdot),v(\cdot),x),$$

где объединение берется по всем измеримым функциям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ со значениями соответственно U и V. Так же, как и в работе [2], доказывается

Лемма 6. Существует константа $C_1\geq 0$, зависящая только от $K(t_0)$, такая, что для всех $x\in K$, m и h таких, что $mh\leq t_0$, выполняется

$$\left|\chi_h^m\Phi(x)-R_h^m\Phi(x)\right|\leq C_1h.$$

Из теоремы 2 и леммы 6 следует

Теорема 3. Последовательности функций $\{\chi_h^m\Phi,\ mh=t\}$ равномерно на каждом компакте сходятся к функции $\tilde R_t\Phi$, $t\in[0,t_0]$.

Теорема 4. Пусть $\Phi(x)$ слабо почти выпукла с константой κ на множестве $K(t_0)$, $t_0\geq 0$. Тогда существует константа $C_2\geq 0$, зависящая только от $K(t_0)$, такая, что для всех $t\leq t_0$ и $x\in K$ выполняется $\big|\tilde R_t\Phi(x)-$ $-\chi_t\Phi(x)\big|\leq C_2t^2$.

Доказательство. Обозначим

$$F_1 = \max\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial z} f(z,u,v)\right\| : z \in K(t_0),\ u \in U,\ v \in V\right\},$$

F_2 — константа такая, что для всех $t \le t_0$

$$\left\| z(t \mid u(\cdot), v(\cdot), x) - \left(x + \int_0^t f(x, u(\tau), v(\tau)) d\tau \right) \right\| \le F_2 t^2,$$

$$F = F_1 F_2,\ F_3 = 2\max\left\{\| f(z,u,v)\| : z \in K(t_0),\ u \in U,\ v \in V\right\}.$$

Поскольку функция $\Phi(x)$ ограничена снизу на компакте $K(t_0)$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(x)$ неотрицательна на $K(t_0)$.

Пусть m и h такие, что $mh = t$. Тогда справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\chi_h^m \Phi(x) \ge \int_V \min_{u_1 \in U} \int_V \min_{u_2 \in U} \ldots \int_V \min_{u_m \in U} \Phi\left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \times$$

$$\times \mu(dv_m) \ldots \mu(dv_2) \mu(dv_1) - F t^2 \ge$$

$$\ge \int_V \ldots \int_V \min_{\substack{u_i \in U \\ i=1,\ldots,m}} \Phi\left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \mu(dv_m) \ldots \mu(dv_1) - F t^2 \ge$$

$$\ge \int_V \min_{\substack{u_i \in U \\ i=1,\ldots,m}} \Phi\left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \mu(dv) - F t^2 =$$

$$= \int_V \min_{u \in U} \Phi\big(x + f(x,u,v) t\big) \mu(dv) - F t^2 = \chi_t \Phi(x) - F t^2,$$

$$\chi_h^m \Phi(x) \le \int_V \min_{u_1 \in U} \int_V \min_{u_2 \in U} \ldots \int_V \min_{u_m \in U} \Phi\left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \times$$

$$\times \mu(dv_m) \ldots \mu(dv_2) \mu(dv_1) + F t^2 =$$

$$= \min_{\substack{u_i(v_1,\ldots,v_i) \\ i=1,\ldots,m}} \int_V \ldots \int_V \Phi\left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i(v_1,\ldots,v_i), v_i) h \right) \mu(dv_m) \ldots \mu(dv_1) + F t^2 \le$$

$$\le \min_{\substack{u_i(v_i) \\ i=1,\ldots,m}} \int_V \ldots \int_V \Phi\left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i(v_i), v_i) h \right) \mu(dv_m) \ldots \mu(dv_1) + F t^2 \le$$

$$\le \min_{\substack{u(v_i) \\ i=1,\ldots,m}} \int_V \ldots \int_V \frac{h}{t} \big[\Phi(x + f(x, u(v_1), v_1) t) + \ldots + \Phi(x + f(x, u(v_m), v_m) t) \big] \times$$

$$\times \mu(dv_m)...\mu(dv_1) + \kappa F_3^2 t^2 + Ft^2 =$$

$$= \min_{u(v)} \int_V \Phi(x + f(x, u(v), v)t)\mu(dv) + \left(\kappa F_3^2 + F\right)t^2 =$$

$$= \chi_t \Phi(x) + (\chi F_3^2 + F)t^2 .$$

Здесь минимумы по $u_i(v_1,...,v_i)$ и $u(v)$ берутся по всем измеримым отображениям со значениями в U .

Из полученных неравенств, произвольности m и h, а также теоремы 3 следует справедливость теоремы 4.

Предположение 1. Существуют константы $t_0 > 0$ и $\kappa \geq 0$ такие, что функции $\chi_h^k \Phi$ слабо почти выпуклые на K для всех k и h таких, что $kh \leq t_0$.

Теорема 5. Пусть выполняется предположение 1, тогда существует константа $C_3 \geq 0$ такая, что для всех $t \leq t_0$, m и h, $mh = t$, $x \in K$ выполняется

$$\left| \tilde{R}_t \Phi(x) - \chi_h^m \Phi(x) \right| \leq C_3 h .$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $\tilde{R}_h \Phi(x) \leq \chi_h \Phi(x) + C_2 h^2$. Отсюда

$$\tilde{R}_{2h} \Phi(x) \leq \tilde{R}_h (\chi_h \Phi(x) + C_2 h^2) = \tilde{R}_h \chi_h \Phi(x) + C_2 h^2 \leq \chi_h^2 \Phi(x) + 2C_2 h^2 .$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\tilde{R}_t \Phi(x) \leq \chi_h^m \Phi(x) + C_2 th \leq \chi_h^m \Phi(x) + C_2 t_0 h .$$

Аналогично доказывается неравенство в другую сторону.

Приведем случай дифференциальной игры, для которой выполняется предположение 1.

Предположение 2. Функция f имеет вид $f(z, u, v) = f_1(z, v) + f_2(u, v)$. Функция $\Phi(x)$ слабо почти выпуклая с константой κ на множестве $K(t_0)$ и

$$\max_{\substack{z \in K(t_0) \\ v \in V}} \left\| \frac{\partial^2}{\partial z^2} f_1(z, v) \right\| \leq D .$$

Теорема 6. Из предположения 2 следует предположение 1.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что функция $\chi_h \Phi(x)$ слабо почти выпукла на множестве K с константой $(\kappa + DL_{K(t_0)} h)$. Продолжая процесс, нетрудно увидеть, что функция $\chi_h^k \Phi(x)$ слабо почти выпукла на K с константой

$$\kappa + DL_{K(t_0)} kh \leq \kappa + DL_{K(t_0)} t_0 .$$

Почти выпуклость служит обобщением понятия выпуклости функции. Для линейного случая можно ограничиться обычной выпуклостью для функций.

Предположение 3. Функция f имеет вид $f(z,u,v)=A(v)z+B(u,v)$, где $A(v)$ — матрица, непрерывная по v; $B(u,v)$ — непрерывная функция; $\varphi(x)$ — выпуклая функция.

Лемма 7. Пусть функция $\varphi(x,u)$ выпукла по совокупности переменных; $u\in U$, U — выпуклый компакт. Тогда функция $\psi(x)=\min\limits_{u\in U}\varphi(x,u)$ является выпуклой по x.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2\in E^n$, $\lambda_1,\lambda_2\ge 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$. Существует u_i, $i=1,2$, такие, что $\psi(x_i)=\varphi(x_i,u_i)$. Отсюда

$$\lambda_1\psi(x_1)+\lambda_2\psi(x_2)=\lambda_1\varphi(x_1,u_1)+\lambda_2\varphi(x_2,u_2)\ge$$

$$\ge\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,\lambda_1u_1+\lambda_2u_2)\ge\min_{u\in U}\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,u)=\psi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2),$$

что и означает выпуклость функции $\psi(x)$.

Из леммы 7 и того, что $B(U,v)$ — выпуклый компакт, следует

Теорема 7. При выполнении предположения 3 функция $\chi_h\Phi(x)$ выпукла.

Рассмотрим построение стратегии игрока P, решающую приближенно дифференциальную игру. Предположим, что выполняется предположение 1 и $\theta\le t_0$, $mh=\theta$.

На первом шаге игрок P знает начальную позицию z_0 и строит функцию $u_{z_0}(v)$ как решение задачи минимизации

$$\min_{u\in U}\chi_h^{m-1}\Phi(z_0+f(z_0,u,v)h)=\chi_h^{m-1}\Phi(z_0+f(z_0,u_{z_0}(v),v)h).$$

Поскольку таких решений может быть много, то выбираем в качестве $u_{z_0}(v)$ минимальное в лексикографическом смысле. Если помеха имеет конкретную реализацию v^* на некотором подынтервале $[\tau_1,\tau_2)\subset[0,h]$, то игрок P выбирает на $[\tau_1,\tau_2)$ управление $u_{z_0}(v^*)$. Пусть $v(t)$, $t\in[0,h)$ — функция, составленная из реализаций помехи на интервале $[0,h)$; $u(t)$ — соответствующее управление игрока P. Обозначим $z_1=z(h|u(\cdot),v(\cdot),z_0)$. На k-м шаге игрок P знает позицию z_{k-1} и строит функцию $u_{z_{k-1}}$ как решение задачи минимизации

$$\min_{u\in U}\chi_h^{m-k}\Phi(z_{k-1}+f(z_{k-1},u,v)h)=\chi_h^{m-k}\Phi(z_{k-1}+f(z_{k-1},u_{z_{k-1}}(v),v)h).$$

Как и ранее, $u_{z_{k-1}}(v)$ — решение минимальное в лексикографическом смысле. Пусть $v(t)$, $t\in[(k-1)h,\ kh)$ — функция, составленная из реализаций помехи на интервале $[(k-1)h,\ kh)$; $u(t)$ — соответствующее управление игрока P. Положим $u_k(t)=u(t-(k-1)h)$, $v_k(t)=v(t-(k-1)h)$, $t\in[(k-1)h,kh)$, $z_k=z(h\,|\,u_k(\cdot),v_k(\cdot),z_{k-1})$ и продолжим процесс. Обозначим построенную таким образом стратегию игрока P через Γ_P^h.

Пользуясь теоремой 5 и аппаратом, разработанным в работах [2, 4], получаем следующий результат.

Теорема 8. Существуют константа $C_4 \geq 0$ и для каждого h стратегия Γ_P^h такие, что для любого ω

$$M_{\omega}\Phi(z(\theta|\Gamma_P^h, z_0)) \leq \widetilde{R}_{\theta}\Phi(z_0) + C_4 h .$$

Игрок E в качестве разбиения может выбрать равномерное разбиение $\omega_h = \{0 < h < 2h < ... < mh = \theta\}$. Из теоремы 5 следует

Теорема 9. Существует константа $C_5 \geq 0$ такая, что для любой стратегии Γ_P игрока P

$$M_{\omega_h}\Phi(z(\theta|\Gamma_P, z_0)) \geq \widetilde{R}_{\theta}\Phi(z_0) - C_5 h .$$

ВЫВОДЫ

Построены приближенные методы решения дифференциальной игры со случайной помехой, которые позволяют аппроксимировать гарантированные выигрыши убегающего и догоняющего игроков, а также строить соответствующие стратегии.

При определенных предположениях получены оценки близости точного и приближенного решений. Эти результаты можно развить на ситуации, когда помеха описывается некоторым случайным процессом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б.Н.* Структура дифференциальных игр // ДАН СССР. — 1969. — **184**, № 2. — С. 285–287.
2. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.
3. *Остапенко В.В., Тимошенко О.М.* Методы решения дифференциальных игр при различных стратегиях игроков // Докл. НАН Украины. — 1995. — № 6. — С. 5–7.
4. *Остапенко В.В.* Приближение основного оператора в дифференциальных играх с фиксированным временем окончания // Кибернетика. — 1984. — № 1. — С. 85–89.
5. *Ушаков В.Е.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальных играх сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — 1980. — № 4. — С. 29–36.
6. *Алгоритмы* и программы решения линейных дифференциальных игр / Под. ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. — 295 с.

Поступила 19.03.2004