НОВІ МЕТОДИ
В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА
ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 519.176

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГРАФОВ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ

А.А. ВОЛКОВ

Сильно связный граф сети представляется в виде конечномерного векторного пространства, порожденного его звеньями с определенными на нем базисами взаимно ортогональных подпространств независимых обобщенных узлов и независимых циклов. Используется аппарат линейной алгебры для обоснования методов получения матричных операторов линейных преобразований независимых обобщенных узлов, а также независимых циклов и определения их взаимозависимости

ВВЕДЕНИЕ

Топологический анализ сетевых систем относится к проблематике теории графов. В терминах графов формулируются и решаются задачи по самым различным дисциплинам: электротехнике и электронике, социологии и экономике, топологии и алгебре, автоматике и кибернетике, теории информации и исследованию операций. Все эти задачи содержат общее математическое ядро, относящееся к специфической проблематике теории графов. К какой бы области знаний не относилась задача, она почти всегда может быть представлена как чисто в содержательном, так и в формализованном виде. Формализация обычно приводит к лучшему пониманию задач, так как при этом вскрываются их наиболее существенные особенности — структурные свойства, которые, как правило, отображаются графами. Во многих случаях решение рассматриваемых задач связано с анализом тех или иных топологических характеристик графов. Поэтому роль теории графов постоянно возрастает, чему способствуют запросы практики и развитие прикладных наук [1].

В основу определения графа естественно положить теоретико-множественное его представление [2, 3]. Граф G всегда можно представить двумя взаимосвязанными множествами абстрактных объектов. Одно из них — множество X изолированных вершин, другое — множество V ребер (если ребро графа неориентировано — оно называется звеном, если ориентировано — дугой). Множества X и V будем называть графообразующими.

Графом G назовем отношение на декартовом произведении непустого множества X вершин и непустого множества V ребер

$$G \subset X \times V . \tag{1}$$

Декартово произведение (1) представляет собой множество всех упорядоченных пар (x, v) при условии, что $x \in X$; $v \in V$,

$$X \times V = \{(x, v)\}, \quad x \in X \ , \ v \in V \ .$$

Вершины графа могут быть поставлены в соответствие любым объектам, а ребра — связи между ними. Геометрическая конфигурация графа не имеет значения. Интерес представляет только то, какие вершины являются граничными точками ребер.

Ребро $v_i \in V$ инцидентно вершине $x_j \in X$, если x_j — граничная точка v_i. Два различных ребра v_s и v_q ($v_s \neq v_q$) называются смежными, если они имеют какую-нибудь общую граничную точку x_k (инцидентны одной и той же вершине). Две различные вершины x_k и x_l $(x_k \neq x_l)$ смежны, если они являются граничными точками какого-нибудь одного и того же ребра v_s. Число ребер, инцидентных вершине x_k, называется степенью вершины x_k. Цепью на графе называется такая последовательность (v_i, v_s, v_q, v_m) смежных ребер, в которой одна из граничных вершин предыдущего ребра является граничной вершиной последующего. Циклом называется замкнутая цепь на графе. Граф связен, если любые две его различные вершины x_j и x_n $(x_j \neq x_n)$ можно соединить цепью. Граф сильно связен (сильно связанный), если любые две его различные вершины x_j и x_n $(x_j \neq x_n)$ можно включить в некоторый цикл на графе. Ребро, обе граничные точки которого совпадают, называется петлей. Ребро v_i, соединяющее две различные вершины x_k и x_i, может быть ориентированным (с заданным направлением) или неориентированным. Граф, содержащий только ориентированные ребра (дуги), называется ориентированным (орграфом). Граф, содержащий только неориентированные ребра (звенья), называется неориентированным (неографом).

При исследовании топологической структуры графов существенное значение имеет понятие дерева графа. Связный подграф H графа $G \subset H$, содержащий все вершины графа, но не имеющий ни одного цикла, называется остовным деревом графа G. Антидеревом (кодеревом) называется подграф S, содержащий все вершины и дополняющий остовное дерево H до графа G. Очевидно, что объединение подграфов H и S образует граф G, т.е. $H \cup S = G$. Дуги дерева H называют ветвями, а дуги кодерева — хордами или связями. Подграф S может быть несвязным. Один и тот же граф может иметь некоторое конечное множество остовных деревьев.

Любая сеть C однозначно отображается изоморфным ей сильно связным графом G. Каждой вершине $x_j \in X$ графа G может быть поставлено в соответствие некоторое подмножество дуг $Y_j \in V$, инцидентных вершине x_j, причем каждая дуга определяется ее порядковым номером v_i и знаком $\operatorname{sign} v_i$, где

$$\operatorname{sign} v_i = \begin{cases} +, & \text{если } v_i \text{ направлено от вершины } x_j, \\ -, & \text{если } v_i \text{ направлено к вершине } x_j. \end{cases}$$

Таким образом, по определению множество Y_j инцидентности дуг выражается соотношением

$$Y_j = \{\operatorname{sign} v_i \cdot v_i\},\ i \in J_j ,$$

где J_j — множество индексов, которыми помечены дуги, инцидентные вершине x_j.

Каждой вершине x_j графа ставится в соответствие множество Y_j инцидентности дуг, а всему множеству X вершин графа — семейство $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_{n+1}\}$ множеств инцидентности дуг.

Следовательно, граф может быть определен парой

$$G = (V, Y),$$

где V — непустое множество дуг; Y — семейство множеств инцидентностей дуг.

Каждая дуга v_i графа G без петель должна входить в два какие-нибудь множества семейства Y, причем для ориентированного графа с различными знаками, а для неориентированного — с одинаковыми. Назовем два подмножества Y_k и Y_l, в которые входит одна и та же дуга v_i, смежными. Основываясь на изложенном выше, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Если задано n множеств Y_j инцидентностей дуг сильно связного графа G без петель, имеющего $(n+1)$ вершин, то граф полностью определен.

Следствие. Суммарное количество J элементов множеств Y_j, $j = \overline{1, n}$ инцидентностей дуг связного графа G, необходимое для задания графа, равняется удвоенному числу m элементов множества V дуг графа за вычетом числа $|I_j|$ элементов произвольного множества Y_{n+1} инцидентности дуг графа.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В m-МЕРНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЗВЕНЬЕВ ГРАФА

Матрицы составляют основной аналитический аппарат для изучения линейных операторов в m-мерном пространстве звеньев графа.

Рассмотрим способы задания графов, которые основываются на отношении (1). Пусть в конечном графе G без петель и параллельных ребер определены его графообразующие множества: множество вершин $X = \{x_j\}$, $j = \overline{1, n+1}$ и множество ребер $V = \{v_i\}$, $i = \overline{1, m}$. Отношения соответствия элементов этих множеств определяются матрицей инцидентности $\|a_{ji}\|$, $j = \overline{1, n+1}$; $i = \overline{1, m}$. Строки соответствуют вершинам графа, а столбцы — ребрам (звеньям, дугам).

Матрица инцидентности может служить базой для изучения основных структурных характеристик сильно связного графа сети. Для этого граф G

будем рассматривать как конечномерное векторное пространство, порожденное его дугами, в котором выделяется подпространство множеств инцидентности дуг.

Графу G можно сопоставить некоторое линейное преобразование, где каждому множеству Y_j, $j \in N$ поставлен в соответствие вектор $\overline{y}_j$, а семейству Y множеств инцидентности дуг — вектор $\overline{y}$.
Это линейное преобразование определяется системой

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \overline{y}_1 & = & a_{11}v_1 & + & a_{12}v_2 & + & \ldots & + & a_{1m}v_m \\ \overline{y}_2 & = & a_{21}v_1 & + & a_{22}v_2 & + & \ldots & + & a_{2m}v_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \overline{y}_{n+1} & = & a_{n+1,1}v_1 & + & a_{n+2,2}v_2 & + & \ldots & + & a_{n+1,m}v_m \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Коэффициенты a_{ji} преобразования (2) принадлежат подмножеству Φ, состоящему из чисел $0, +1, -1$ некоторого числового поля $F \supset \Phi$.

Рассмотрим два векторных пространства над подмножеством Φ числового поля F: m-мерное V^* и $(n+1)$-мерное Y^*. Выберем в пространстве V^* некоторый базис $\overline{e_1}, \overline{e_m}$ и в пространстве Y^* некоторый базис $\overline{g_1},\ldots,\overline{g_{n+1}}$, в качестве которых можно взять столбцы единичной матрицы m-го и $(n+1)$-го порядков соответственно.

Преобразование (2) относит каждому вектору $\overline{v} = \sum_{i=1}^{m} \overline{v_i e_i}$ из V^* некоторый вектор $\overline{y} = \sum_{j=1}^{n+1} \overline{y_j g_j}$ из Y^*, т.е. преобразование (2) определяет некоторый линейный оператор Ψ_x, относящий вектору $\overline{v}$ из V^* вектор $\overline{y}$ из Y^*.

$$\overline{y} = \Psi_x \overline{v}. \qquad (3)$$

Линейный оператор Ψ_x, отображающий пространство V^*дуг графа в подпространство Y^* семейства множеств инцидентностей дуг (или в пространство вершин X^*) графа, назовем оператором инциденций графа.

Этому оператору при некотором базисе соответствует прямоугольная матрица A_x^0 с размерами $(n+1)\times m$

$$A_x^0 = \left\| a_{ji} \right\|, \ i = \overline{1,m}; \ \ j = \overline{1,n+1}, \qquad (4)$$

представляющая собой матрицу инциденций графа. Эта матрица является вполне унимодулярной. Каждый столбец ее имеет два ненулевых элемента: $+1$ и -1. Справедливо следующее

Утверждение 2. Если граф G, содержащий $(n+1)$ вершину, связен, то ранг матрицы A_x^0 равен n.

Следствие 1. Ранг каждой матрицы $A_x^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots,n+1$, полученной из матрицы инциденций A_x^0 вычеркиванием j-й строки, равен n.

В самом деле, строки этой матрицы порядка $n \times m$ являются линейно независимыми, количество строк равно рангу матрицы $A_x^{(j)}$. Каждая из этих матриц содержит $J = 2m - \left|I_j\right|$ ненулевых элементов и полностью определяет топологию графа сети. Положим $j = n+1$, соответствующую матрицу $A_x^{(n+1)}$ обозначим A_x, тогда

$$A_x = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}. \quad (5)$$

Строки матрицы A_x являются линейно независимыми, количество строк n равно рангу матрицы A_x.

Следствие 2. Число линейно независимых столбцов матрицы A_x сильно связного графа G, имеющего $(n+1)$ вершин, равняется n.

Это непосредственно следует из того, что максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов. Столбцам матрицы A_x соответствуют координаты дуг v_i графа G в пространстве X^* его вершин или в пространстве Y^* узловых подмножеств его дуг.

Утверждение 3. Ранг r линейного оператора ψ_x, отображающего пространство V^* дуг связного графа G, имеющего $(n+1)$ вершин, в подпространство Y^* его узлов, равен n.

Для выделения базиса оператора ψ_x и удобства оперирования с матрицей A_x целесообразно вершины (или элементарные узлы) и дуги графа пронумеровать таким образом, чтобы линейно независимые столбцы матрицы инциденций A_x^0 (или матрицы A_x), соответствующие дугам дерева H графа G, составляли бы подматрицу A_{x1} матрицы A_x.

Согласно теореме, доказанной в работе [1], подграф H представляет собой дерево тогда и только тогда, когда определитель квадратной матрицы $\left\|a_{ji}\right\|_1^n$, полученной из матрицы инциденций A_x^0 порядка $(n+1)\times n$ вычеркиванием одной строки, равен 1 или -1. Во всех остальных случаях этот определитель равен нулю.

Используем это утверждение и метод его доказательства для обоснования более общего утверждения об упорядочивающей нумерации сильно связного графа, позволяющей выделить базис независимых столбцов матрицы A_x порядка $n \times m$, соответствующей ветвям дерева H графа.

Определение. Матрицу A_x назовем упорядоченной матрицей, если она содержит неособенную подматрицу A_{x1} треугольного вида, ранг r которой соответствует рангу матрицы A_x.

Нумерацию вершин и дуг графа G, приводящую к образованию упорядоченной матрицы A_x из матрицы инциденций A_x^0 вычеркиванием $(n+1)$-й строки, назовем упорядочивающей нумерацией графа.

Утверждение 4. Вершины x_j, $j \in N$, $|N| = n+1$ и дуги v_i, $i \in M$, $|M| = m$ сильно связного графа G всегда можно пронумеровать таким образом, чтобы матрица A_x порядка $n \times m$ содержала бы квадратную подматрицу A_{x1} порядка n треугольного вида, столбцы которой соответствовали бы ветвям одного из деревьев графа.

В результате такой нумерации вершин и дуг графа G матрица A_x может быть представлена в виде двух подматриц $A_x = (A_{x1}, A_{x2})$, первая из которых $A_{x1} = \|a_{ji}\|$, $j = \overline{1,n}$; $i = \overline{1,n}$ представляет собой квадратную неособенную подматрицу n-го порядка треугольного вида (нижняя или верхняя).

$$A_{x1} = \begin{Vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \pm 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & \pm 1 \end{Vmatrix}. \qquad (6)$$

Определитель любой треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали. Поскольку на главной диагонали подматрицы A_{x1} находятся единичные элементы, то $\mathrm{Det}(A_{x1}) = \pm 1$. Следовательно, столбцы этой подматрицы соответствуют ветвям одного из деревьев графа G, что и требовалось доказать.

Подматрица $A_{x2} = \|a_{ji}\|$, $j = \overline{1,n}$; $i = \overline{n+1,m}$ образуется столбцами матрицы A_x, являющимися линейными комбинациями столбцов подматрицы A_{x1} и соответствуют дугам антидерева (кодерева) графа G.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОДПРОСТРАНСТВА НЕЗАВИСИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ УЗЛОВ СИЛЬНО СВЯЗНОГО ГРАФА

Обобщенным узловым подмножеством дуг (или обобщенным узлом) называется замкнутое очертание, которое может содержать несколько элементарных узлов (узловых подмножеств дуг) графа [4]. Одно узловое подмножество или один узел графа можно рассматривать как частный случай обобщенного узлового подмножества дуг.

Каждому узловому подмножеству Y_j графа G соответствует вектор $\overline{y}_j$ пространства Y^*. Каждому обобщенному узловому подмножеству Y_{0k} можно также сопоставить вектор $\overline{y}_{0k}$ пространства R^*, если $Y_{0k} = \bigcup Y_j$.

Существует множество различных обобщенных узлов графа, однако интерес представляют лишь независимые обобщенные узлы.

Независимым обобщенным узлом графа при произвольно выбранном базисе (дереве) назовем такое обобщенное подмножество дуг, которое содержит только одну ветвь (дугу) дерева графа.

Векторы $\overline{y}_{0k}$ образуют базис пространства R^*. Обозначим $T = \left\|t_{kj}\right\|_1^n$ квадратную матрицу перехода от базиса $\left\{\overline{y}_k\right\}$ к базису $\left\{\overline{y}_{0k}\right\}$; ξ — линейный оператор, отображающий пространство Y^* на себя так, что базис $\left\{\overline{y}_k\right\}$ переходит в $\left\{\overline{y}_{0k}\right\}$:

$$\xi \overline{y}_k = \overline{y}_{0k}\,. \tag{7}$$

Вводя координатные столбцы $y_0 = \left(y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}\right)'$ и $y = (y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n)'$, (7) записываем в матричной форме

$$y_0 = T\,y\,. \tag{8}$$

Матрицу $T = \left\|t_{kj}\right\|_1^n$ можно получить из матрицы инциденций узловых подмножеств дуг графа и независимых обобщенных узлов.

$$t_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } \overline{y}_j \in \overline{y}_{0k}, \\ 0, & \text{если } \overline{y}_j \notin \overline{y}_{0k}. \end{cases} \tag{9}$$

На рис. 1 показан граф с выделенным деревом (базисом независимых обобщенных узлов). Независимые обобщенные узлы графа (отсечения) обозначены пунктирными линиями, а матрица T имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

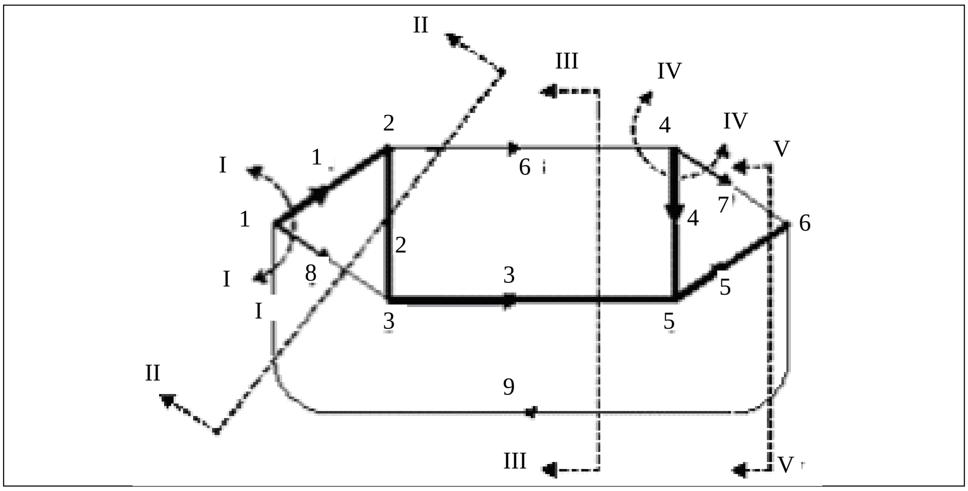

Рис. 1. Граф с выделенным деревом

Упорядоченная матрица A_x для этого графа при выбранном базисе, соответствующая оператору ψ_x

$$A_x = \begin{Vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}}^{A_{x1}} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A_{x2}} \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Рассмотрим, каким образом, располагая операторами ψ_x, ξ и соответствующими им матрицами A_x, T, можно определить оператор ψ-преобразования m-мерного пространства V^* дуг графа в n-мерное подпространство R^* и соответствующую ему матрицу A. Справедливо следующее

Утверждение 5. Оператор ψ, преобразующий пространство V^* дуг графа в подпространство R^* его независимых обобщенных узлов, определяется операторным равенством $\psi = \xi\psi_x$, где ψ_x — оператор, преобразующий пространство V^* в Y^*; ξ — оператор, преобразующий подпространство Y^* в себя так, что базис $\left\{\bar{y}_k\right\}$ переводится в базис $\left\{\bar{y}_{0k}\right\}$ независимых обобщенных узлов графа R^*. Справедливость утверждения непосредственно следует из [5].

Следствие. Матрица A независимых обобщенных узлов графа, соответствующая оператору ψ, определяется матричным равенством

$$A = T A_x . \tag{12}$$

Заметим, что операция умножения матриц T и A_x всегда выполнима, так как число столбцов матрицы T равно числу строк матрицы A_x и рангу этих матриц $r = n$.

Коэффициенты a_{ji} матрицы A независимых обобщенных узлов графа принадлежат подмножеству Φ числового поля F и определяются следующим соотношением:

$$a_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad v_i \notin Y_{0j}, \\ 1, & \text{если} \quad v_i^н \in Y_{0j}, v_i^н \text{ — начало дуги } v_i, \\ -1, & \text{если} \quad v_i^k \in Y_{0j}, v_i^k \text{ — конец дуги } v_i. \end{cases} \tag{13}$$

Эту матрицу можно назвать матрицей инциденций дуг и независимых обобщенных узлов.

В качестве примера воспользуемся равенством (12) и определим матрицу A для графа, показанного на рис. 1. Подставив в (12) матрицы (10) и (11), получаем

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{A_1} & \overbrace{}^{A_2} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}. \tag{14}$$

Эта матрица состоит из единичной подматрицы $A_1 = E_1^n$ и подматрицы A_2, т.е. $A = (A_1, A_2)$.

Матрицу A можно назвать упорядоченной матрицей независимых обобщенных узлов.

Утверждение 6. Матрицу A, соответствующую оператору ψ линейного преобразования пространства V^* дуг графа в подпространство R^* его независимых обобщенных узлов, всегда можно получить элементарным преобразованием матрицы инциденций A_x^0 или эквивалентных ей матриц $A_x^{(j)}$, соответствующих оператору ψ_x.

Для примера рассмотрим способ получения матрицы A элементарным преобразованием матрицы A_x, определяемой выражением (11). Нетрудно видеть, что строки искомой матрицы (14) получаются из матрицы (11) простым сложением строк.

Произвольный вектор $\overline{V}$ из пространства V^* связан с вектором $\overline{y}_0$ пространства R^* соотношением

$$\overline{y}_0 = \psi V\,. \tag{15}$$

Матричное выражение этого соотношения имеет вид

$$y_0 = Av\,. \tag{16}$$

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОДПРОСТРАНСТВА НЕЗАВИСИМЫХ ЦИКЛОВ СИЛЬНО СВЯЗНОГО ГРАФА

Топология сильно связного графа определяется также в пространстве $\left(V^*, \theta^*\right)$, образованном множеством V дуг и множеством θ циклов графа.

Каждому циклу θ_k при заданной его ориентации взаимно-однозначно соответствует вектор $\overline{\theta}_k$ из пространства V^*, а всей совокупности векторов — линейное преобразование

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} \overline{\theta}_1 & = & b_{11}v_1 & + & b_{12}v_2 & + & \ldots & + & b_{1m}v_m \\ \overline{\theta}_2 & = & b_{21}v_1 & + & b_{22}v_2 & + & \ldots & + & b_{2m}v_m \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \overline{\theta}_s & = & b_{s1}v_1 & + & b_{s2}v_2 & + & \ldots & + & b_{sm}v_m \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Коэффициенты b_{ki} преобразования (17) принадлежат числовому полю Φ, состоящему из чисел $0, +1, -1$ некоторого числового поля $F \supset \Phi$ в следующей зависимости:

$$b_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad v_i \notin \overline{\theta}_k, \\ 1, & \text{если} \quad v_i \in \overline{\theta}_k \quad \text{и ориентации} \quad v_i \quad \text{и} \quad \overline{\theta}_k \quad \text{совпадают}, \\ -1, & \text{если} \quad v_i \in \overline{\theta}_k \quad \text{и ориентации} \quad v_i \quad \text{и} \quad \overline{\theta}_k \quad \text{не совпадают}.. \end{cases} \quad (18)$$

Подпространство θ^* векторного пространства V^*, являющееся линейной оболочкой системы векторов $\overline{\theta}_k$, $k = \overline{1, s}$, назовем подпространством циклов графа G. В сильно связном графе существуют как независимые, так и зависимые циклы. Нас интересует система независимых циклов (базис подпространства θ^* независимых циклов графа).

В графе G существует, вообще говоря, $\Lambda(H)$ вариантов выбора базисов независимых циклов графа, где $\Lambda(H)$ — число деревьев графа. Число независимых циклов графа при выбранном базисе определяется цикломатическим числом, равным количеству дуг антидерева сильно связного графа, т.е.

$$s = m - n. \quad (19)$$

Преобразование (17) определяет некоторый линейный оператор φ', относящий вектору $\overline{v}$ из V^* вектор $\overline{\theta}'$ из θ^*, т.е.

$$\overline{\theta}' = \varphi' \overline{v}. \quad (20)$$

Оператору φ' соответствует матрица B_θ (матрица циклов), составленная из координат векторов $\overline{\theta}_k$ в (17).

Элементарными преобразованиями матрицы B_θ, как это было показано выше применительно к матрице A_x, можно матрицу B_θ произвольных циклов привести к виду

$$B = (B_1, B_2), \quad (21)$$

где $B_2 = E_1^s$ — единичная матрица порядка s. Матрицу B назовем упорядоченной матрицей инциденций независимых циклов графа. Матрица B при базисе $\overline{\theta}_1, ..., \overline{\theta}_s$, состоящем из независимых циклов, соответствует линейному оператору φ, отображающему пространство V^* дуг графа в подпространство θ^*.

$$\overline{\theta} = \varphi \overline{v}. \quad (22)$$

По аналогии с выражением (12) связь между матрицей B независимых циклов графа и матрицей B_θ произвольных циклов определяетя выражением

$$B = N B_\theta, \quad (23)$$

где N — матрица преобразования произвольных циклов $\overline{\theta}'_k$ в независимые циклы $\overline{\theta}_k$.

Для определения матрицы $B=\left(B_1, B_2\right)$ существует простой геометрический метод, основанный на выборе базиса независимых циклов (антидерева) графа. Из методологических соображений сформулируем следующее важное утверждение, которое фактически широко используется на практике.

Утверждение 7. Циклы θ_k и дуги v_i сильно связного графа G всегда можно пронумеровать таким образом, чтобы матрица B^* инциденций дуг v_i и циклов θ_k графа представляла собой упорядоченную матрицу $B=\left(B_1, B_2\right)$ независимых циклов графа, т.е. содержала бы единичную подматрицу $B_2 = E_1^{(s)}$ порядка $s=m-n$.

Доказательство. Пусть дан сильно связный граф G, имеющий m дуг v_i и $(n+1)$ вершин x_j.

Пронумеруем все вершины x_j и первые n дуг графа методом, используемым в утверждении 4. При этом образуется дерево графа, содержащее все n его пронумерованных дуг. Оставшиеся $s=m-n$ непронумерованных дуг будут соответствовать ветвям антидерева графа, т.е. базису его независимых циклов. Зададимся направлениями независимых циклов графа, т.е. циклов, содержащих только одну дугу антидерева графа, соответствующих направлениям входящих в них дуг антидерева графа. Нумерацию циклов θ_k $\left(k=\overline{1,s}\right)$ и дуг v_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ антидерева графа будем производить таким образом, чтобы их индексы определялись зависимостью $k=i-n$ для $i \geq n+1 \leq m$. Составим далее матрицу, столбцы которой соответствуют дугам графа, а строки — циклам с элементами b_{ki}, определяемыми зависимостью (18). Получим таким образом искомую упорядоченную матрицу B независимых циклов графа, что и доказывает утверждение.

На рис. 2 показан граф, нумерация и ориентация дуг которого такие же, как и у графа на рис.1.

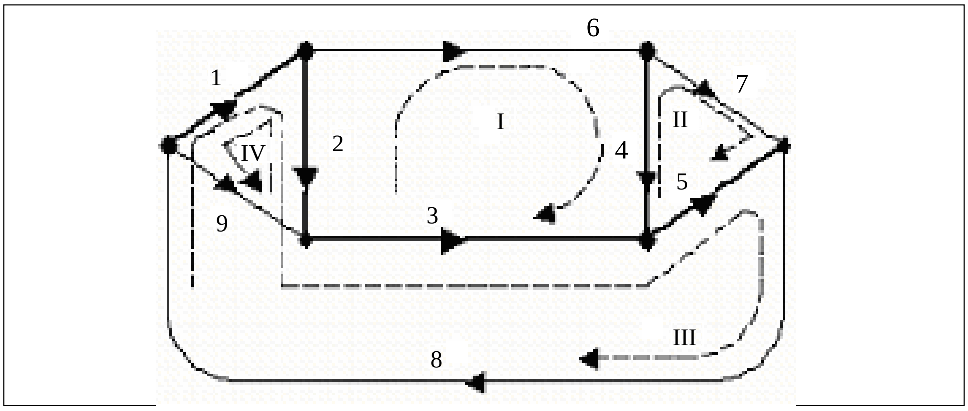

Рис. 2. Граф с выделенными независимыми обобщенными узлами

Нумерация циклов графа произведена в соответствии с условиями, рассмотренными в утверждении 7. Матрица B инциденций дуг и независимых циклов этого графа имеет вид

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overbrace{\hphantom{0 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 0}}^{B_1} & \overbrace{\hphantom{1 \; 0 \; 0 \; 0}}^{B_2} \end{matrix} \\ \left\| \begin{array}{ccccc|cccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Выражение (22) в матричном виде определяется уравнением

$$\theta = Bv\,. \qquad (24)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НЕЗАВИСИМЫХ ОБОБЩЕННЫХ УЗЛОВ И НЕЗАВИСИМЫХ ЦИКЛОВ СИЛЬНО СВЯЗНОГО ГРАФА

При топологическом анализе графов сетевых систем возникает необходимость определения операторов независимых циклов графа по операторам независимых обобщенных узлов или наоборот. Конкретно это выражается в необходимости определения матрицы B независимых циклов графа по матрице A независимых обобщенных узлов. Существует аналитический метод определения матрицы циклов графа по матрице его инциденций. Этот метод базируется на одной из основных теорем топологии сетей, впервые сформулированной еще Анри Пуанкаре в 1899 г., а затем в различных ее интерпретациях и другими авторами. Доказательство этой теоремы приводится во многих источниках и, в частности, в работе [1].

Пользуясь нашими обозначениями, суть этой теоремы можно выразить зависимостью $A_x^0 \overline{\theta} = 0$, т.е. произведение матрицы инциденций A_x^0 на вектор-цикл $\overline{\theta}$ равняется нулю.

Область применения данной теоремы, следовательно, ограничена только матрицей инциденций дуг и элементарных узлов графа и не распространяется в данной ее трактовке на матрицу независимых обобщенных узлов.

В более общей постановке множество V дуг графа порождает m-мерное пространство V^*, в котором определены два подпространства: n-мерное подпространство Y^* узловых подмножеств дуг (узлов) и s-мерное подпространство θ^* циклов графа. Докажем, что эти подпространства взаимно ортогональны.

Утверждение 8. Подпространство Y^* узлов сильно связного графа G и подпространство θ^* его циклов являются взаимно ортогональными.

Доказательство. По определению два подпространства называются взаимно ортогональными, если каждый вектор одного ортогонален к любому вектору другого.

Произвольный вектор обобщенного узла $\overline{y}_{0j}$ графа определяется выражением

$$\overline{y}_{0j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} \overline{v}_i , \quad j = \overline{1, n} , \tag{25}$$

где a_{ji} — коэффициенты матрицы A независимых обобщенных узлов, определяемые соотношением (13).

Произвольный вектор-цикл $\overline{\theta}_k$ графа G определяется зависимостью

$$\overline{\theta}_k = \sum_{l=1}^{m} b_{kl} \overline{v}_l , \quad k = \overline{1, s} , \tag{26}$$

где b_{kl} — коэффициенты матрицы B для циклов графа, определяемые соотношением (18).

Здесь v_i $i = 1,..., m$ будем рассматривать как ортонормированный базис евклидова пространства, для которого справедливо соотношение

$$(v_i v_l) = \delta_{il} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq l, \\ 1 & \text{при} \quad i = l, \quad i, l = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{27}$$

Такое допущение основано на известном положении: в любом конечномерном подпространстве или пространстве существует ортонормированный базис, который может быть получен из любой системы линейно независимых векторов этого подпространства путем ортогонализации и нормализации.

Для доказательства утверждения необходимо и достаточно показать, что произвольный вектор $\overline{y}_{0j}$, $j \in N$ графа G ортогонален произвольному вектору $\overline{\theta}_k$, $k \in S$ этого же графа $\left(\overline{y}_{0j} \perp \overline{\theta}_k,\ j \in N,\ k \in S\right)$, т.е. скалярное произведение этих векторов равно нулю.

Скалярное произведение векторов $\overline{y}_{0j}$ и $\overline{\theta}_k$ при ортонормированном базисе m-мерного евклидова пространства определяется выражением

$$\left(\overline{y}_{0j} \overline{\theta}_k\right) = \sum_{l,i=1}^{m} a_{ji} b_{kl} \left(\overline{v}_i \overline{v}_l\right) = \sum_{l,i=1}^{m} a_{ji} b_{kl} , \quad j = \overline{1, n}; \ \ k = \overline{1, s} , \tag{28}$$

что непосредственно следует из выражений (25) и (26) с учетом (27). Выясним, какие значения приобретают коэффициенты a_{ji} и b_{kl}, входящие в выражение (28).

Можно убедиться, что для всех возможных случаев скалярное произведение векторов $\overline{y}_{0j}$ и $\overline{\theta}_k$ равняется нулю, т.е.

$$\left(\overline{y}_{0j} \overline{\theta}_k\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} b_{ki} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \ \ k = \overline{1, s} , \tag{29}$$

что и доказывает утверждение.

Учитывая, что элементарный узел графа — частный случай его обобщенного узла, это полностью справедливо и для векторов-узлов, т.е. удовлетворяется также и соотношение

$$\left(\overline{y}_j \overline{\theta}_n\right) = 0 . \qquad (30)$$

Заметим также, что подпространство θ^* является ортогональным дополнением к Y^* (или наоборот). Суммарная размерность этих подпространств равна размерности всего пространства V^*.

Если n — размерность R^*, а s — размерность θ^*, то размерность всего пространства V^* равна $m = n + s$. Ортонормированными базисами подпространств R^* и θ^* являются соответственно дуги дерева и антидерева (кодерева) графа.

Следствие. Если $A = \left\| a_{ji} \right\|$, $j = \overline{1, n}$; $i = \overline{1, m}$ — упорядоченная матрица независимых обобщенных узлов, а $B = \left\| b_{ki} \right\|_s$, $k = \overline{1, s}$; $i = \overline{1, m}$ — независимых циклов, то справедливо соотношение

$$AB' = BA' = 0 , \qquad (31)$$

где B' и A' — транспонированные матрицы соответственно B и A.

Соотношение (31) непосредственно следует из выражения (29).

Имея в виду, что $A = \left\| A_1, A_2 \right\|$, $B = \left\| B_1, B_2 \right\|$,

$$\left\| A_1, A_2 \right\| \left\| \begin{matrix} B_1' \\ B_2' \end{matrix} \right\| = 0 , \quad \left\| B_1, B_2 \right\| \left\| \begin{matrix} A_1' \\ A_2' \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

откуда

$$B_1 = -B_2 A_2' \left(A_1' \right)^{-1}, \quad A_2 = -A_1 B_1' \left(B_2' \right)^{-1}.$$

Поскольку $A_1 = E_1^n$, $B_2 = E_1^s$ и $(E')^{-1} = E$, то

$$B_1 = -E_1^s A_2' E^n , \quad A_2 = -E_1^n B_1' E^s .$$

Зная, что $A_2' = \left\| a_{ij} \right\|$, $i = \overline{n+1, m}$; $j = \overline{1, n}$; $B_1' = \left\| b_{ik} \right\|$, $i = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, s}$, имеем

$$B_1 = -A_2' , \quad A_2 = -B_1' . \qquad (32)$$

Эти выражения позволяют получить подматрицу B_1 независимых циклов графа по подматрице A_2 независимых обобщенных его узлов и наоборот.

Выражения (32) показывают, что достаточно знать только один из операторов Ψ или φ, представленных в виде соответствующих им матриц A или B, чтобы определить как вектор $\overline{y}_0$ независимых узловых подмножеств дуг графа, так и вектор $\overline{\theta}$ независимых циклов графа.

Матричные уравнения $y = Av$, $\theta = Bv$ можно записать в виде

$$y = A_1 v_I + A_2 v_{II} , \; \theta = B_1 v_I + B_2 v_{II} , \qquad (33)$$

где v_I — матрица-столбец, соответствующая дугам дерева графа; v_{II} — матрица-столбец, соответствующая дугам антидерева графа. С учетом (32) и имея в виду, что $A_1 = E_1^n$; $B_2 = E_1^s$, уравнения (33) можно записать так:

$$y = v_I + A_2 v_{II}, \quad \theta = A_2' v_I + v_{II} \tag{34}$$

или

$$y = v_I - B_1' v_{II}, \quad \theta = B_1 v_I + v_{II}. \tag{35}$$

Эти системы уравнений позволяют выразить столбцевые матрицы y и θ только через одну из подматриц: A_2 или B_1.

ВЫВОДЫ

1. Путем обобщения работ в области исследования сетевых систем обоснованы алгебраические методы топологического анализа графов сетей. Сильно связный граф сети представляется в виде конечномерного векторного пространства V^*, порожденного его звеньями (дугами) с определенными на нем подпространствами Y^* узлов (вершин), R^* независимых обобщенных узлов и θ^* независимых циклов, базисами которых являются соответственно деревья и кодеревья графа.

2. Рассматриваются линейные операторы, отображающие пространство V^* в подпространствах Y^*, R^* и θ^*. Исследуются взаимосвязи между этими операторами. Матричные представления операторов позволяют использовать аппарат линейной алгебры для обоснования алгоритмов получения матрицы A независимых обобщенных узлов и матрицы B независимых циклов графа сети.

3. Векторные пространства R^* и θ^* являются взаимно ортогональными, что позволяет установить взаимосвязь между матрицами A и B.

4. Результаты топологического анализа графа алгебраическими методами дают возможность автоматизировать процесс определения матриц A и B, используемых при моделировании, исследовании и расчете сетевых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берж К.* Теория графов и ее применение. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 320 с.
2. *Волков А.А.* Моделирование систем графами // Вісн. КМУЦА. — 1998. — № 1. — С. 268–279.
3. *Волков А.А.* Построение и структура моделирующих графов сложных систем // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2000. — № 2. — С. 118–132.
4. *Максимович Н.Т.* Линейные электрические цепи и их преобразования. — М.: Госэнергоиздат, 1961. — 264 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.

Поступила 24.06.2004