

УДК 539.3

**ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ПІВПЛОЩИН
ЗА НАЯВНОСТІ ПОВЕРХНЕВОЇ ВИЙМКИ***Н. І. МАЛАНЧУК¹, А. КАЧИНЬСЬКІ²*¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*² *Факультет математики і інформатики, Варшавський технологічний університет*

Досліджено контактну взаємодію двох пружних ізотропних півплощин з ідентичних матеріалів, одна з яких має плитку полого виймку, з урахуванням локального фрикційного проковзування. Спершу тіла притискаються нормальними зусиллями до їх повного контакту, далі до них прикладають монотонно наростальні зсувні зусилля, що спричиняють часткове проковзування. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші на відносний тангенціальний зсув меж півплощин на ділянці проковзування. Розміри останньої знайдено з умови обмеженості дотичних напружень на її краях. Для певних профілів виймки отримано аналітичний розв'язок задачі. Проаналізовано залежності довжини ділянки проковзування і контактних напружень від прикладених навантажень.

Ключові слова: *контакт зі зчепленням та проковзуванням, виймка, сингулярне інтегральне рівняння, відносний тангенціальний зсув.*

Фрикційному контакту приділяють значну увагу в різних галузях науки, зокрема, у трибології, геофізиці, машинобудуванні та біомеханіці. Через врахування тертя у формулюванні контактних задач значно ускладнюється їх розв'язання. Під час теоретичних досліджень фрикційного контакту найчастіше використовують закон Кулона–Амонтона [1], що лінійно зв'язує дотичні зусилля s , зумовлені силами тертя, та нормальний тиск p : $s = \pm fp$, де f – коефіцієнт тертя. Знак “+” чи “–” біля параметра f вибирають з фізичних міркувань, враховуючи те, що сили тертя перешкоджають взаємному проковзуванню меж тіл. Згідно з цим законом, кожна точка поверхні контакту перебуває або у стані зчеплення, коли задовольняється нерівність $|s| < fp$, або проковзує, коли справджується рівність $s = \pm fp$. Якщо ж остання рівність виконується вздовж всієї поверхні контакту, то відбувається ковзний контакт тіл. Особливістю таких задач є те, що ділянки контакту, зчеплення та проковзування наперед невідомі. Крім того, кінцевий напружено-деформований стан залежить від історії навантаження.

Фрикційні контактні явища ретельно вивчали у минулому. З результатами фундаментальних досліджень та їх застосуванням можна ознайомитись у монографіях і статтях [2–10].

Зосередимо увагу на ще недостатньо вивченій контактній взаємодії тіл з узгодженими поверхнями (за термінологією К. Джонсона [2]), яка часто зустрічається в природі та техніці. Основні результати тут отримано для безфрикційного контакту таких тіл (див., наприклад, праці [11–15] та вказану там літературу). Також розглянуто плоскі контактні задачі з урахуванням фрикційного ковзного контакту тіл узгодженої форми [16, 17]. Проаналізовано контактну взаємодію пружних тіл з виймкою за одночасного навантаження стискальними і зсувними зусиллями [18]. Досліджено еволюцію ділянок проковзування за повного контакту тіл узгодженої форми під механічним навантаженням [19].

Контактна особа: Н. МАЛАНЧУК, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Нижче проаналізовано контакт двох пружних півплощин, одна з яких має виїмку, за послідовного навантаження нормальними та зсувними зусиллями. Досліджували виїмку загальної форми в два етапи: спершу розв'язали задачу про повне зчеплення тіл, а далі, на основі її результатів, сформулювали та розв'язали задачу про контакт тіл зі зчепленням та проковзуванням.

Опис та формулювання задачі. Розглянемо дві пружні ізотропні півплощини D_1 і D_2 , віднесені до декартової системи координат Oxy (рис. 1а). Матеріали тіл ідентичні, тобто мають однакові модулі зсуву ($G_1 = G_2 = G$) і коефіцієнти Пуассона ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$). Межа тіла D_2 прямолінійна, а тіла D_1 на відрізку $x \in [-b, b]$ має плитку положу виїмку та описується гладкою функцією

$$r(x) = \begin{cases} -r_0(1 - x^2/b^2)^{n+1/2}, & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b, \end{cases} \quad (1)$$

де r_0 – максимальна глибина виїмки; $2b$ – її довжина; $n = 1, 2, \dots$ – натуральний параметр; $0 < r_0/b \ll 1$.

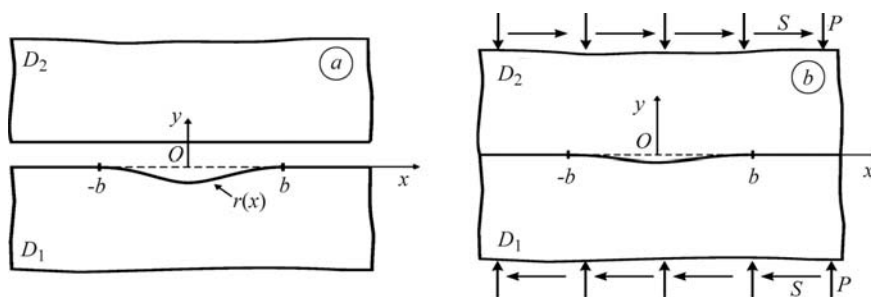


Рис. 1. Схема взаємодії: а – півплощини до контакту; б – повний контакт тіл.

Fig. 1. Sketch of interaction: a – half-planes before contact; b – in full contact.

Спершу тіла притискаються одне до одного рівномірно розподіленими на нескінченності нормальними зусиллями інтенсивності P , такими, що всі точки поверхонь обох тіл ввійдуть у контакт. За дії на тіла лише нормального навантаження дотичні переміщення їх меж однакові через ідентичність матеріалів тіл [2]. Тоді їх поверхні не проковзують одна відносно іншої і на них не виникають дотичні напруження. Далі до тіл прикладають монотонно зростальні зсувні зусилля інтенсивності S (рис. 1б). Поверхні перебуватимуть у зчепленні, доки дотичні контактні напруження будуть менші за контактний тиск, помножений на коефіцієнт тертя. Коли ж зсувні зусилля досягнуть певного критичного значення, між поверхнями тіл розпочнеться локальне фрикційне проковзування. Тому спершу розв'язали та проаналізували задачу про зчеплення тіл.

Контакт тіл зі зчепленням. Контактно-крайові умови задачі мають вигляд

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad (2)$$

$$u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = -r(x) \quad (4)$$

на поверхні спряження $y = 0, |x| < \infty$;

$$\sigma_y(x, \pm\infty) = -P, \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = S, \quad \sigma_x(\pm\infty, y) = 0, \quad \tau_{xy}(\pm\infty, y) = S \quad (5)$$

на нескінченності. Тут і надалі $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$ – компоненти тензора напружень; u, v – компоненти вектора переміщень; знаками “-” і “+” позначено граничні значення функцій на лінії спряження у півплощинах D_1 і D_2 .

Використовуючи комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі [20] та описану раніше [19] методику, напруження та переміщення в тілах виразимо че-

рез похідну функції $r(x)$:

$$\sigma_y(x, y) - i\tau_{xy}(x, y) = \Phi_l(z) - \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} - P - iS,$$

$$2G \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y) + iv(x, y)] = \kappa \Phi_l(z) + \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} + \frac{3 - \kappa}{4} P, \quad (6)$$

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = \frac{(-1)^{l+1} G}{\pi(1 + \kappa)} \int_{-b}^b \frac{r'(t) dt}{t - z}, \quad z \in D_l, \quad l = 1, 2, \quad (7)$$

де $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона, $\kappa = 3 - 4\nu$.

З подань (6) та (7) знайдемо нормальні та дотичні контактні напруження:

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = \frac{2G}{\pi(1 + \kappa)} \int_{-b}^b \frac{r'(t) dt}{t - x} - P, \quad |x| < \infty, \quad (8)$$

$$\tau_{xy}^\pm(x, 0) = S, \quad |x| < \infty. \quad (9)$$

Використовуючи подання (1), обчислимо:

$$r'(x) = \begin{cases} (2n+1)r_0 x(1 - x^2/b^2)^{n-1/2}/b^2, & |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b. \end{cases} \quad (10)$$

Підставивши вираз (10) у співвідношення (8), знайдемо нормальні контактні напруження:

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = \frac{2Gr_0(2n+1)}{(1 + \kappa)b} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + \mathcal{P}^{(a)}(x) \right) - P, \quad |x| \leq b, \quad (11)$$

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = \frac{2Gr_0(2n+1)}{(1 + \kappa)b} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + (-1)^{n+1} \left| \frac{x}{b} \right| \left(\frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{P}^{(a)}(x) \right) - P, \quad |x| > b. \quad (12)$$

Тут $\mathcal{P}^{(a)}(x) = a_2(x/b)^2 + a_4(x/b)^4 + \dots + a_{2n}(x/b)^{2n}$,

$$a_{2(j+1)} = \sum_{k=j+1}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(2k-2j-3)!!}{(2k-2j-2)!!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (-1)!! = 1, \quad 0!! = 1. \quad (13)$$

З умови невід'ємності контактного тиску $p(x) = -\sigma_y^-(x, 0) \geq 0$, $|x| \leq b$ визначимо нормальні зусилля, що забезпечують повний контакт тіл. Зважаючи на те, що максимум правої частини рівності (11) досягається в точці $x = 0$, отримаємо:

$$P \geq \frac{Gr_0(2n+1)(2n-1)!!}{2^{n-1} n! (1 + \kappa) b}. \quad (14)$$

Згідно з законом Кулона–Амонтона, проковзування відбувається в тих точках поверхні контакту, де дотичні зусилля досягли рівня нормальних, помножених на коефіцієнт тертя $|\tau_{xy}^\pm| = f |\sigma_y^\pm|$. З огляду на це, якщо виконується умова

$$0 < S < f \left(P - \frac{Gr_0(2n+1)(2n-1)!!}{2^{n-1} n! (1 + \kappa) b} \right), \quad (15)$$

то тіла зчеплені вздовж всієї поверхні контакту. Відповідно, проковзування розпочинається в околі точки $x = 0$, якщо

$$f \left(P - \frac{Gr_0(2n+1)(2n-1)!!}{2^{n-1} n! (1 + \kappa) b} \right) \leq S < fP. \quad (16)$$

Контакт тіл зі зчепленням та проковзуванням. Розглянемо контактну взаємодію тіл D_1 і D_2 для навантаження S з діапазону (16), коли тіла проковзують

на невідомій ділянці $|x| \leq c$ (рис. 2). Контактно-крайові умови задачі на поверхні спряження матимуть вигляд

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad |x| < \infty, \quad (17)$$

$$\left| \tau_{xy}^-(x, 0) \right| = f \left| \sigma_y^-(x, 0) \right|, \quad |x| < c, \quad (18)$$

$$u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = 0, \quad |x| \geq c, \quad (19)$$

$$v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = -r(x), \quad |x| < \infty. \quad (20)$$

На нескінченності виконуються умови (5).

Півдовжину ділянки проковзування c знайдемо з умови обмеженості дотичних напружень на її краях:

$$\lim_{x \rightarrow \pm c} \left| \tau_{xy}(x, 0) \right| < +\infty. \quad (21)$$

Введемо функцію відносного тангенціального зсуву меж тіл на ділянці проковзування

$$U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0), \quad |x| \leq c, \quad (22)$$

та розглянемо допоміжну задачу з умовами на нескінченності (5) і умовами на поверхні контакту (17), (19), (20) та (22). Задовольняючи ці умови з допомогою подань (6), знайдемо комплексні потенціали [20]:

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = \frac{(-1)^l G}{\pi i(1+\kappa)} \left[\int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-z} - i \int_{-b}^b \frac{r'(t) dt}{t-z} \right], \quad z \in D_l, \quad l=1,2. \quad (23)$$

Використовуючи подання (6) і (23), запишемо:

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = \frac{2G}{\pi(1+\kappa)} \int_{-b}^b \frac{r'(t) dt}{t-x} - P, \quad (24)$$

$$\tau_{xy}^\pm(x, 0) = -\frac{2G}{\pi(1+\kappa)} \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-x} + S. \quad (25)$$

Порівнявши вирази (24) і (8), бачимо, що фрикційне проковзування не впливає на нормальні контактні напруження $\sigma_y^\pm(x, 0)$.

Зауважимо, що отриманий розв'язок записано через відому функцію $r(x)$ та невідому функцію відносного тангенціального зсуву меж тіл $U(x)$. Таким чином, початкову задачу з умовами (17)–(20) та (5) звели до знаходження цієї невідомої функції. Задовольняючи за допомогою виразів (24) та (25) умову (18), прийдемо до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) відносно $U'(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-x} = \frac{1+\kappa}{2G} (S - fP) + \frac{(2n+1)r_0 f}{b} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + \mathcal{P}^{(d)}(x) \right), \quad |x| < c. \quad (26)$$

Розв'язок СІР (26) має вигляд

$$U'(x) = \left[\frac{1+\kappa}{2G} (S - fP) + \frac{(2n+1)r_0 f}{b} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - \mathcal{P}^{(d)}(x) \right) \right] \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}, \quad |x| < c, \quad (27)$$

де (див. ф-лу (13))

$$\mathcal{P}^{(d)}(x) = d_0 + d_2(x/c)^2 + d_4(x/c)^4 + \dots + d_{2n}(x/c)^{2n},$$

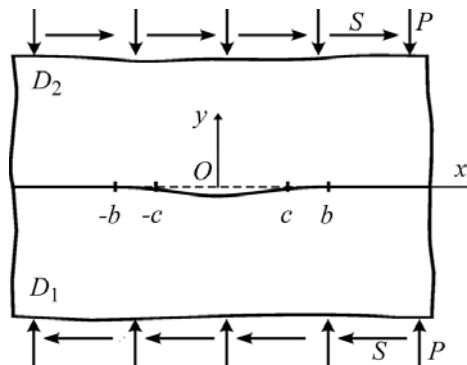


Рис. 2. Локальне проковзування тіл.

Fig. 2. Local slip of the bodies.

$$d_0 = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} a_{2k} (c/b)^{2k}, \quad d_{2n} = -a_{2n} (c/b)^{2n},$$

$$d_{2j} = -a_{2j} (c/b)^{2j} + \sum_{k=j+1}^n \frac{(2k-2j-3)!!}{(2k-2j)!!} a_{2k} (c/b)^{2k}, \quad j=1,2,\dots,n-1. \quad (28)$$

Проінтегрувавши рівність (27) з урахуванням умови $U(-c)=0$, одержимо:

$$U(x) = - \left[\frac{1+\kappa}{2G} (S-fP) + \frac{(2n+1)r_0 f (2n-1)!!}{2^n n! b} \right] \sqrt{c^2 - x^2} -$$

$$- \frac{(2n+1)r_0 f}{b} [H_0(x) + H_2(x) + H_4(x) + \dots + H_{2n}(x)], \quad |x| < c, \quad (29)$$

де функції H_{2m} ($m=0,1,2,\dots,n$) такі:

$$H_{2m}(x) = \frac{d_{2m}}{c^{2m}} \int_{-c}^x \frac{t^{2m+1} dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} = -c d_{2m} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k m! (1 - (x/c)^2)^{k+\frac{1}{2}}}{k! (m-k)! (2k+1)}, \quad m=0,1,2,\dots,n. \quad (30)$$

Підставивши вираз (27) у співвідношення (25), знайдемо дотичні напруження:

$$\tau_{xy}^{\pm}(x,0) = F(x) \equiv fP - \frac{2G(2n+1)r_0 f}{(1+\kappa)b} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - \mathcal{P}^{(w)}(x) \right), \quad |x| \leq c, \quad (31)$$

$$\tau_{xy}^{\pm}(x,0) = F(x) + \left[S - fP + \frac{2G(2n+1)r_0 f}{(1+\kappa)b} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - \mathcal{P}^{(d)}(x) \right) \right] \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}}, \quad |x| > c. \quad (32)$$

Тут (див. ф-ли (28))

$$\mathcal{P}^{(w)}(x) = w_0 + w_2 (x/c)^2 + w_4 (x/c)^4 + \dots + w_{2n} (x/c)^{2n},$$

$$w_{2j} = \sum_{k=j}^n \frac{d_{2k} (2k-2j-1)!!}{(2k-2j)!!}, \quad j=0,1,2,\dots,n. \quad (33)$$

Задовольняючи умову (21) з допомогою виразу (32), визначимо півдовжину ділянки проковзування c :

$$S - fP + \frac{(2n+1)Gr_0 f (2n-1)!!}{2^{n-1} n! b (1+\kappa)} - \frac{2G(2n+1)r_0 f}{(1+\kappa)b} \mathcal{P}^{(d)}(c) = 0. \quad (34)$$

Числові результати. Базуючись на аналітичному розв'язку, отриманому вище, проаналізуємо поведінку контактної пари тертя для функції, заданої формулою (1), коли $n=3$. Вирази (11), (12), (29)–(34) використано для розрахунку бажаних параметрів задачі про контакт тіл зі зчепленням та проковзуванням: нормальні контактні напруження

$$\sigma_y^{\pm}(x,0) = \frac{14Gr_0}{(1+\kappa)b} \left(\frac{5}{16} - \frac{15x^2}{8b^2} + \frac{5x^4}{2b^4} - \frac{x^6}{b^6} \right) - P, \quad |x| \leq b,$$

$$\sigma_y^{\pm}(x,0) = \frac{14Gr_0}{(1+\kappa)b} \left(\frac{|x|}{b} \left(\frac{x^2}{b^2} - 1 \right)^{\frac{5}{2}} - \frac{15x^2}{8b^2} + \frac{5x^4}{2b^4} - \frac{x^6}{b^6} + \frac{5}{16} \right) - P, \quad |x| > b;$$

відносний тангенціальний зсув меж тіл на ділянці проковзування

$$U(x) = \sqrt{c^2 - x^2} \left[-\frac{1+\kappa}{2G} (S-fP) + \frac{fr_0}{b} \left(\frac{5c^6}{16b^6} - \frac{21c^4}{16b^4} + \frac{35c^2}{16b^2} - \frac{35}{16} + \frac{3c^4x^2}{8b^4b^2} + \frac{1c^2x^4}{2b^2b^4} + \frac{x^6}{b^6} - \frac{7c^2x^2}{4b^2b^2} + \frac{35x^2}{8b^2} - \frac{7x^4}{2b^4} \right) \right], \quad |x| < c;$$

півдовжина ділянки проковзування $c = b\sqrt{1 - \sqrt[3]{8(1+\kappa)b(fP - S)/35Gf\bar{r}_0}}$;
 дотичні контактні напруження

$$\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = F(x) \equiv fP + \frac{14Gr_0f}{(1+\kappa)b} \left(-\frac{5}{16} + \frac{15x^2}{8b^2} - \frac{5x^4}{2b^4} + \frac{x^6}{b^6} \right), \quad |x| \leq c,$$

$$\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = F(x) - \frac{7Gr_0f}{(1+\kappa)b} \left(\frac{15}{4} - \frac{5c^2}{2b^2} - 5\frac{x^2}{b^2} + \frac{3c^4}{4b^4} + \frac{c^2x^2}{b^2b^2} + 2\frac{x^4}{c^4} \right) \frac{x}{b} \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2}}, \quad |x| > c.$$

Для граничного значення зсувних зусиль $S = fP$ одержуємо, що $c = b$ (проковзування поширюється на всю виїмку), а дотичні контактні напруження рівні контактному тиску, помноженому на коефіцієнт тертя (умова $\tau_{xy} = f|\sigma_y|$ виконується в кожній точці поверхні контакту, що вказує на глобальне ковзання тіл).

Аналітичні результати проілюстровані на рис. 3, 4 для безрозмірних параметрів $\bar{x} = x/b$, $\bar{r}_0 = r_0/b$, $\bar{c} = c/b$, $\bar{U} = U/b$, $\bar{\sigma}_y = \sigma_y/G$, $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$, $\bar{P} = P/G$, $\bar{S} = S/G$ при $f = 0,1$, $\bar{r}_0 = 10^{-4}$, $\nu = 0,2$ та $\bar{P} = 2 \cdot 10^{-4}$.

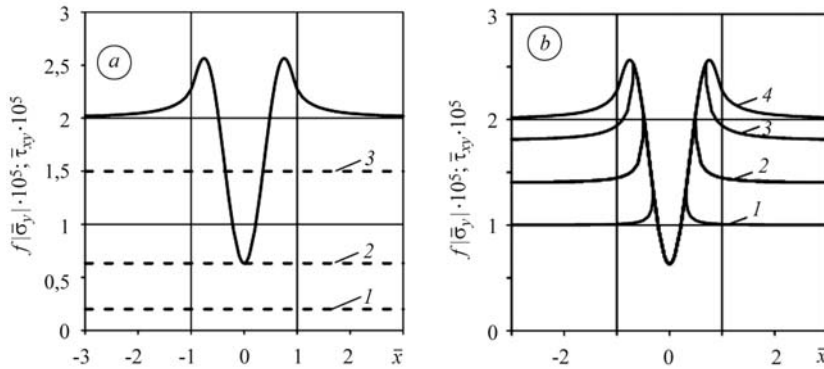


Рис. 3. Розподіл контактних напружень:

a – контакт тіл зі зчепленням; *b* – зі зчепленням та проковзуванням.

Fig. 3. Distributions of contact stresses:

a – stick contact of bodies; *b* – stick-slip contact of bodies.

На рис. 3*a* суцільна крива відповідає помноженим на коефіцієнт тертя нормальним напруженням задачі про контакт тіл зі зчепленням, $f|\bar{\sigma}_y|$, штрихові прямі – дотичним $\bar{\tau}_{xy}$ за дії зсувних зусиль \bar{S} : 1 – $\bar{S} = 2 \cdot 10^{-6}$; 2 – $6,328 \cdot 10^{-6}$; 3 – $15 \cdot 10^{-6}$. Зі зростанням зусиль \bar{S} межі тіла не проковзуватимуть, доки $0 < \bar{S} < f(\bar{P} - 35\bar{r}_0/8(1+\kappa))$ (пряма 1). Для зсувних зусиль $f(\bar{P} - 35\bar{r}_0/8(1+\kappa)) \leq \bar{S} < f\bar{P}$ проковзування розпочинається в околі точки $\bar{x} = 0$ (прямі 2, 3).

Рис. 3*b* описує помножені на коефіцієнт тертя нормальні напруження задачі про контакт тіл зі зчепленням та проковзуванням $f|\bar{\sigma}_y|$ (крива 4) та дотичні $\bar{\tau}_{xy}$ (криві 1–3) за дії зсувних зусиль \bar{S} : 1 – $\bar{S} = 10^{-5}$; 2 – $1,4 \cdot 10^{-5}$; 3 – $1,8 \cdot 10^{-5}$. Нормальні напруження досягають свого максимуму поблизу країв виїмки в точках $\bar{x} = \pm 0,75$, а дотичні – на краях ділянки проковзування. На ділянці проковзування ($-\bar{c}, \bar{c}$) графіки помножених на коефіцієнт тертя нормальних напружень $f|\bar{\sigma}_y|$ та дотичних $\bar{\tau}_{xy}$ збігаються. Поза нею напруження $\bar{\tau}_{xy}$ є менші, ніж $f|\bar{\sigma}_y|$, і монотонно спадають до граничних значень, заданих на нескінченності.

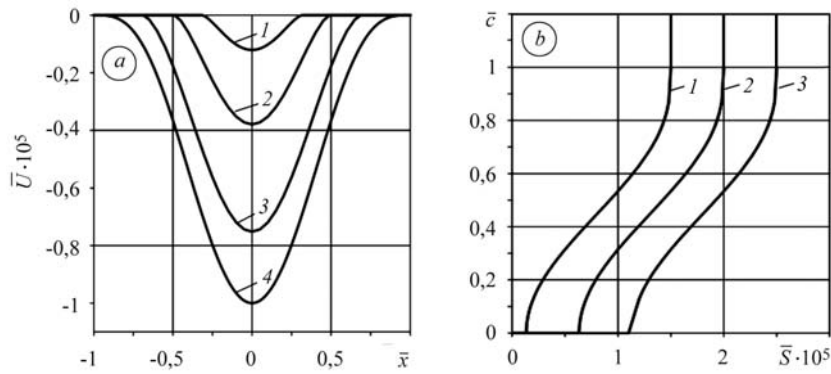


Рис. 4. Контакт тіл зі зчепленням та проковзуванням:

a – відносний зсув; b – півдовжина ділянки проковзування.

Fig. 4. Stick-slip contact of bodies: a – the relative shift; b – half-length of the slip zone.

На рис. 4а подано розподіл відносного тангенціального зсуву меж тіл \bar{U} на ділянці проковзування за дії зсувних зусиль \bar{S} : 1 – $\bar{S} = 10^{-5}$; 2 – $1,4 \cdot 10^{-5}$; 3 – $1,8 \cdot 10^{-5}$; 4 – $2 \cdot 10^{-5}$. Максимальне значення відносного тангенціального зсуву меж тіл зростає зі збільшенням зсувних зусиль та досягається в центрі виїмки.

Побудовано (рис. 4b) нелінійну залежність півдовжини ділянки проковзування \bar{c} від зсувних зусиль \bar{S} для нормального навантаження \bar{P} : 1 – $\bar{P} = 1,5 \cdot 10^{-4}$; 2 – $2 \cdot 10^{-4}$; 3 – $2,5 \cdot 10^{-4}$. Горизонтальні прямі відповідають повному зчепленню тіл для зсувних зусиль $0 < \bar{S} < f(\bar{P} - 35\bar{r}_0 / 8(1 + \kappa))$. Далі зі збільшенням зсувних зусиль з діапазону $f(\bar{P} - 35\bar{r}_0 / 8(1 + \kappa)) \leq \bar{S} < f\bar{P}$ зростають розміри ділянки проковзування. Якщо зсувні зусилля зрівняються з нормальними, помноженими на коефіцієнт тертя ($\bar{S} = f\bar{P}$), край ділянки проковзування досягне краю виїмки $\bar{c} = 1$ і відбудуватиметься глобальне ковзання тіл (вертикальні прямі).

ВИСНОВКИ

Досліджено повний контакт двох півплощин, одна з яких має плитку полого виїмку, з урахуванням локального фрикційного проковзування за послідовного навантаження нормальними та зсувними зусиллями. Для конкретної форми виїмки детально проаналізовано залежність контактних параметрів спряжених тіл від прикладених навантажень. Розраховано зсувні зусилля, коли розпочинається проковзування тіл. Записано рівняння для обчислення розмірів ділянки проковзування. Встановлено, що зі збільшенням зсувних зусиль монотонно зростають її розміри, а також знайдено максимальне значення дотичних напружень та відносний тангенціальний зсув меж тіл. Виявлено, що останній зсув досягає свого максимуму в центрі виїмки, дотичні контактні напруження – завжди на краях ділянки проковзування, а нормальні контактні – поблизу країв виїмки. Показано, що локальне проковзування тіл може розвиватися лише в межах виїмки, а після його поширення на всю ділянку виїмки відбувається перехід до глобального ковзання тіл.

РЕЗЮМЕ. Исследовано контактное взаимодействие двух упругих изотропных полуплоскостей из одинаковых материалов, одна из которых имеет мелкую выемку, с учетом локального фрикционного проскальзывания. Сначала тела прижимаются нормальными усилиями до полного контакта. Далее к ним прикладывают монотонно нарастающие сдвиговые усилия, вызывающие частичное проскальзывание границ. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши на относительный сдвиг границ полуплоскостей на участке проскальзывания, размеры которого найдено из условия ограниченности касательных напряжений на его краях. Решение задачи получено в аналити-

ческом виде для определенных профилей выемки. Проанализированы зависимости длины участка проскальзывания и контактных напряжений от приложенной нагрузки.

SUMMARY. The contact interaction between two half-planes (one of which has a single shallow recess) of the same isotropic materials with local frictional slip is investigated. The following phases of constant loading are considered: first, normal compressive forces leading to full contact are applied, and subsequently, monotonically increasing shear forces giving rise to partial sliding are applied too. The stick-slip contact problem is reduced to a Cauchy-type singular integral equation for the relative tangential shift of boundaries at the slip zone. It is derived from an additional condition that ensures boundedness of shear stresses at the edges of the slip zone. The analytical solution of the problem is obtained for certain profiles of the recess. Dependences of slip zone length and contact stresses on applied loading are analyzed.

Робота виконана за підтримки Фонду сприяння розвитку науки – Фонду ім. Ю. Мяновського (Польща).

1. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. Hills D. A. and Nowell D. Mechanics of Fretting Fatigue. – Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
5. Urriolagoitia Sosa G. and Hills D. A. Origins of partial slip in fretting – a review of known and potential solutions // J. Strain Anal. Eng. Design. – 1999. – **34**. – P. 175–181.
6. Barber J. and Ciavarella M. Contact mechanics // Int. J. Solids Structures. – 2000. – **37**. – P. 29–43.
7. Zhuranska O. I. On the analytical approach to Galin's stick-slip problem. A survey // J. Elasticity. – 2008. – **90**. – P. 315–333.
8. Панасюк В. В., Дацшин О. П., Шур Р. Б. Залишкова довговічність твердих тіл, що контактують в умовах фретинг-втоми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 5–19.
9. Datsyshyn O. P. and Kadyra V. M. A fracture mechanics approach to prediction of pitting under fretting fatigue conditions // Int. J. of Fatigue. – 2006. – **28**, № 4. – P. 375–385.
10. Mijar A. R. and Arora J. S. Review of formulations for elastostatic friction contacts problems // Struct. Multidisc. Optim. – 2000. – **20**. – P. 167–189.
11. Shvets R. M., Martynyak R. M., and Kryshchafovykh A. A. Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and rigid base with disturbed surface // Int. J. Engng. Sci. – 1996. – **34**, № 2. – P. 183–200.
12. Kit G. S. and Monastyrsky B. E. A contact problem for a half-space and a rigid base with an axially symmetric recess // J. Math. Sci. – 2001. – **107**, № 1. – P. 3545–3549.
13. Kaczyński A. and Monastyrsky B. Contact problem for periodically stratified half-space and rigid foundation possessing geometrical surface defect // J. Theor. Appl. Mech. – 2002. – **40**. – P. 985–999.
14. Монастирський Б. Є., Мартиняк Р. М. Контакт двох півпросторів з кільцевою виїмкою на одному. Ч. 1. Сингулярне інтегральне рівняння // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 51–57.
15. Monastyrsky B. and Kaczyński A. Contact between an elastic layer and an elastic semi-space bounded by a plane with axially symmetric smooth dip // Electronic J. Polish Agricultural Universities, Civil Engineering – 2005. – **8**, Issue 4. (online: <http://www.ejpau.media.pl>)
16. Martynyak R. and Kryshchafovykh A. Friction contact of two elastic semiplanes with wavy surfaces // Friction and Wear. – 2000. – **21**, № 5. – P. 1–8.
17. Kryshchafovykh A. A. and Matysiak S. J. Frictional contact of laminated elastic half-spaces allowing interface cavities. Part 1: Analytical treatment. Part 2: Numerical results // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2001. – **25** – P. 1077–1099.
18. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є. Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 101–109.
19. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є. Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 2. – С. 39–44.
20. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Одержано 19.11.2010