УДК 539.3

ПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА ЗІ СТРІЧКОВИМ ТЕПЛОВИДІЛЮВАЛЬНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Г. С. КІТ [1], *О. В. ГАЛАЗЮК* [2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*
[2] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

Запропоновані нове формулювання і метод розв'язання плоских задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тонким стрічковим елементом за умов плоскої деформації. Стрічкові елементи змодельовані пеленою джерел тепла, а створене ними температурне поле визначено з розв'язків інтегральних рівнянь першого роду. Показано, що серед множини їх розв'язків завжди існує класичний, який визначає коренево-сингулярний розподіл потоків тепла на краю області тепловиділення.

Ключові слова: *стаціонарна задача теплопровідності, плоска деформація, тепловиділювальний стрічковий елемент, пелена джерел тепла, інтегральне рівняння першого роду.*

Під час визначення двовимірного стаціонарного температурного поля і зумовленої ним плоскої деформації тіла за тепловиділення у стрічковій області шириною $2L$ використовують інтегральні подання комплексних потенціалів температури, що дає можливість зводити задачі термопружності до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші [1, 2]. Показано [3], що дійсна і уявна частини інтеграла типу Коші – відповідно логарифмічні потенціали подвійного та простого шарів. При цьому для заникання логарифмічного потенціалу простого шару на нескінченності слід вимагати, щоб повна потужність тепловиділення дорівнювала нулеві. Формулюючи такі задачі, постулюють відсутність джерел тепла поза межами області тепловиділення, що призводить до коренево-сингулярного розподілу потоків тепла на її краю.

Розв'язки рівнянь термопружності зі стрічковою пеленою джерел тепла. В однорідному пружному просторі введемо декартову систему координат $L\alpha$, $L\beta$, $L\gamma$ з початком у площині $\gamma = 0$ і вважатимемо, що у тілі під дією температурного поля реалізується плоска деформація. Тоді векторне рівняння квазістатичної термопружності

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\theta - 2\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha_T\,(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,T$$

у декартовій системі координат зведемо до двох рівнянь у частинних похідних

$$k^2\partial_\alpha\theta + 2\partial_\gamma\omega_\beta = \alpha_T\left(3k^2 - 4\right)\partial_\alpha T\,,$$

$$k^2\partial_\gamma\theta - 2\partial_\alpha\omega_\beta = \alpha_T\left(3k^2 - 4\right)\partial_\gamma T \tag{1}$$

для інваріантних величин

$$\theta(\alpha,\gamma) = \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \partial_\alpha u_\alpha + \partial_\gamma u_\gamma\,,\ 2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{u})_\beta = \partial_\gamma u_\alpha - \partial_\alpha u_\gamma\,. \tag{2}$$

Контактна особа: Г. С. КІТ, e-mail: hkit@iapmm.lviv.ua

Тут $k^2=(\lambda+2\mu)/\mu=2(1-\nu)/(1-2\nu)$, де λ і μ – сталі Ляме; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення; Lu_α і Lu_γ – компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u}$; ∂_α і ∂_γ – оператори диференціювання.

Систему рівнянь (1) розщеплюємо на два незалежні рівняння

$$\Delta\theta^T=\beta_T\Delta T,\ \ \Delta u_\gamma^T=-\left(k^2-1\right)\partial_\gamma\theta^T+\alpha_T\left(3k^2-4\right)\partial_\gamma T \tag{3}$$

відносно ключових функцій $\theta^T(\alpha,\gamma)$ і $u_\gamma^T(\alpha,\gamma)$, де Δ – оператор Лапласа в декартовій системі координат; $\beta_T=\alpha_T k^{-2}\left(3k^2-4\right)$. Розв'язки рівнянь (3) такі:

$$\theta^T(\alpha,\gamma)=\beta_T T(\alpha,\gamma),\ \ u_\gamma^T(\alpha,\gamma)=0,5\beta_T\gamma T(\alpha,\gamma)\,. \tag{4}$$

Нехай у площині $\gamma=0$ джерела тепла розподілені за законом, який можна подати інтегралом Фур'є

$$W(\alpha,p)=2T_0\int_0^\infty \eta\left[G(\eta,p)\sin\eta\alpha+H(\eta,p)\cos\eta\alpha\right]d\eta\ , \tag{5}$$

де твірні функції $G(\eta,p)$ і $H(\eta,p)$ з параметром p визначають антисиметричну та симетричну за змінною α компоненти функції $W(\alpha,p)$, $T_0=W_0L/\lambda_T$ – множник із розмірністю температури. Тоді температурне поле у тілі визначаємо з розв'язку рівняння стаціонарної теплопровідності з розподіленими у площині $\gamma=0$ джерелами тепла:

$$\Delta T=-2\delta(\gamma)W(\alpha,p),$$

де $\delta(\gamma)$ – дельта-функція Дірака. Звідси

$$T(\alpha,\gamma)=T_0\int_0^\infty e^{-\eta|\gamma|}K(\eta,p,\alpha)d\eta\,, \tag{6}$$

де $K(\eta,p,\alpha)=G(\eta,p)\sin\eta\alpha+H(\eta,p)\cos\eta\alpha$.

Якщо ввести таку функцію $P^T(\alpha,\gamma)$, що $u_\alpha^T(\alpha,\gamma)=\partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma)$, то перше рівняння (2) набуде вигляду

$$\partial_\alpha^2 P^T(\alpha,\gamma)=0,5\beta_T T_0\int_0^\infty (1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}K(\eta,p,\alpha)\,d\eta$$

і після подвійного інтегрування за змінною α одержимо:

$$P^T(\alpha,\gamma)=-0,5\beta_T T_0\int_0^\infty \eta^{-2}(1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}K(\eta,p,\alpha)\,d\eta\,.$$

Функція $P^T(\alpha,\gamma)$ – відомий [4] термопружний потенціал переміщень у декартовій системі координат, оскільки

$$u_\alpha^T(\alpha,\gamma)=\partial_\alpha P^T(\alpha,\gamma),\quad u_\gamma^T(\alpha,\gamma)=\partial_\gamma P^T(\alpha,\gamma)\,.$$

За нею визначаємо компоненту

$$u_\alpha{}^T(\alpha,\gamma)=-0,5\beta_T T_0\int_0^\infty \eta^{-2}(1+\eta|\gamma|)e^{-\eta|\gamma|}\partial_\alpha\left[K(\eta,p,\alpha)\right]d\eta\,. \tag{7}$$

Зумовлені температурним полем (6) і знайдені за співвідношеннями Дюамеля–Неймана температурні напруження мають вигляд

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{T}(\alpha,\gamma)=-\beta_T\mu\left[T(\alpha,\gamma)+T_0\left|\gamma\right|\int_0^{\infty}\eta e^{-\eta|\gamma|}K\left(\eta,p,\alpha\right)d\eta\right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{T}(\alpha,\gamma)=-\beta_T\mu\left[T(\alpha,\gamma)-T_0\left|\gamma\right|\int_0^{\infty}\eta e^{-\eta|\gamma|}K\left(\eta,p,\alpha\right)d\eta\right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{T}(\alpha,\gamma)+\sigma_{\beta\beta}^{T}(\alpha,\gamma)+\sigma_{\gamma\gamma}^{T}(\alpha,\gamma)=-4\mu\beta_T T(\alpha,\gamma)\,,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{T}(\alpha,\gamma)=\beta_T\mu T_0\gamma\int_0^{\infty}e^{-\eta|\gamma|}\partial_{\alpha}\left[K\left(\eta,p,\alpha\right)\right]d\eta\,. \tag{8}$$

Отже, відповідно до подань (8) за існування у площині $\gamma=0$ пелени джерел тепла (5) нормальні напруження $\sigma_{\gamma\gamma}^{T}(\alpha,\pm 0)$ і $\sigma_{\alpha\alpha}^{T}(\alpha,\pm 0)$ там за додатної температури є стискальні, а дотичні $\sigma_{\alpha\gamma}^{T}(\alpha,\pm 0)=0$.

Температурні поле і напруження у площині із джерелами тепла на відрізку. Нехай на відрізку $0\le\left|\alpha\right|\le 1$ задані джерела тепла, розподіл яких симетричний відносно осі $\alpha=0$. Такий розподіл зумовлює у тілі двовимірне температурне поле $T(\alpha,\gamma)$, яке на цьому відрізку створює температуру $T\left(\alpha,\pm 0\right)=T_0\left[C-f\left(\alpha^2\right)\right]$, де $f(\alpha^2)$ – довільна неперервна функція, а C – стала. Тоді твірна функція $G\left(\eta,p\right)=0$ і $K\left(\eta,p,\alpha\right)=H\left(\eta,p\right)\cos\eta\alpha$, а отже, згідно з поданням (6) для визначення твірної функції $H(\eta,p)$ одержимо інтегральне рівняння першого роду

$$\int_0^{\infty}H\left(\eta,p\right)\cos\eta\alpha d\eta=C-f\left(\alpha^2\right)\quad 0\le\left|\alpha\right|\le 1\,, \tag{9}$$

яке після диференціювання за змінною α набуде вигляду

$$\int_0^{\infty}\eta H\left(\eta,p\right)\sin\eta\alpha d\eta=2\alpha f'\left(\alpha^2\right)\quad 0\le\left|\alpha\right|\le 1\,. \tag{10}$$

Шукану функцію $H\left(\eta,p\right)$ у рівнянні (10) подамо узагальненим рядом Неймана за функціями Бесселя першого роду

$$\eta H\left(\eta,p\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}\ ,\quad p>0{,}5\ , \tag{11}$$

із коефіцієнтами a_n і параметром p, фізичний зміст якого з'ясуємо нижче. Якщо ряд (11) підставити в інтегральне рівняння (10) та обчислити розривний інтеграл Фур'є [5], то для коефіцієнтів a_n одержимо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+2\right)\alpha F\left(n-p+2;-n;1{,}5;\alpha^2\right)}{2^{p}\Gamma\left(n+1\right)}=\alpha f'\left(\alpha^2\right) \tag{12}$$

за повною і ортогональною системою функцій на проміжку $0\le\left|\alpha\right|\le 1$, оскільки тут гіпергеометрична функція Ґаусса $F\left(n-p+2;\,-n;\,1{,}5;\,\alpha^2\right)=\dfrac{\Gamma\left(n+1\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(n+1{,}5\right)}\times$ $\times P_n^{(0,5;-p+0,5)}\left(1-2\alpha^2\right)$, де $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – поліноми Якобі [6]. Тому коефіцієнти a_n з рівняння (12) визначають за формулою ортогональності поліномів Якобі і вони існують за довільної неперервно диференційовної функції $f(\alpha^2)$. Якщо коефіцієнти a_n знайдені, то у рівнянні (9) стала $C=f\left(0\right)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{\Gamma\left(n-p+1\right)}{2^{p+1}\Gamma\left(n+2\right)}$ і залежить від параметра $p>0{,}5$.

За відомими коефіцієнтами a_n і твірною функцією (11) визначаємо усі характеристики температурного поля:

температуру (6)

$$T\left(\alpha,\gamma\right)=T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p+1}}e^{-\eta|\gamma|}\cos\eta\alpha d\eta\,; \tag{13}$$

компоненти безрозмірного вектора $\vec{\mathbf{q}}^*=L\vec{\mathbf{q}}/\lambda_T T_0$ теплового потоку $\vec{\mathbf{q}}=-\lambda_T\,\mathrm{grad}T$

$$q_\alpha^*\left(\alpha,\gamma\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}e^{-\eta|\gamma|}\sin\eta\alpha d\eta\,;$$

$$q_\gamma^*\left(\alpha,\gamma\right)=\mathrm{sign}\,\gamma\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}e^{-\eta|\gamma|}\cos\eta\alpha d\eta\,, \tag{14}$$

розподіл (5) джерел тепла

$$W\left(\alpha,p\right)=2T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}\cos\eta\alpha d\eta. \tag{15}$$

Згідно з виразами (4), (7) і (8) знаходимо зумовлені температурним полем (13) переміщення і напруження. Зокрема,

$$u_\alpha^T\left(\alpha,\gamma\right)=0{,}5\beta_T T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{\left(1+\eta|\gamma|\right)J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p+2}}e^{-\eta|\gamma|}\sin\eta\alpha d\eta\,,$$

$$u_\gamma^T\left(\alpha,\gamma\right)=0{,}5\beta_T T_0\gamma\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p+1}}e^{-\eta|\gamma|}\cos\eta\alpha d\eta\,,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^T\left(\alpha,\gamma\right)=-\beta_T\mu\left[T\left(\alpha,\gamma\right)+T_0|\gamma|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}e^{-\eta|\gamma|}\cos\eta\alpha d\eta\right],$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^T\left(\alpha,\gamma\right)=-\beta_T\mu\left[T\left(\alpha,\gamma\right)-T_0|\gamma|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}e^{-\eta|\gamma|}\cos\eta\alpha d\eta\right],$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^T\left(\alpha,\gamma\right)=-\beta_T\mu T_0\gamma\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^{\infty}\frac{J_{2n-p+2}\left(\eta\right)}{\eta^{p}}e^{-\eta|\gamma|}\sin\eta\alpha d\eta\,. \tag{16}$$

Інтеграли у виразах (13)–(16) можна знайти числовими методами, проте на лінії $\gamma=0$ вони стають розривними інтегралами Фур'є, для яких існують [5] аналітичні вирази. Зокрема, на відрізку $0\le|\alpha|\le1$

$$T\left(\alpha,\pm 0\right)=T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+1\right)F\left(n-p+1;-n-1;0,5;\alpha^2\right)}{2^{p+1}\Gamma\left(n+2\right)};$$

$$q_{\alpha}^{*}\left(\alpha,\pm 0\right)=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+2\right)F\left(n-p+2;-n;1,5;\alpha^2\right)}{2^{p-1}\Gamma\left(n+1\right)};$$

$$q_{\gamma}^{*}\left(\alpha,\pm 0\right)=\pm\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+1,5\right)F\left(n-p+1,5;-n-0,5;0,5;\alpha^2\right)}{2^{p}\Gamma\left(n+1,5\right)};$$

$$W\left(\alpha,p\right)=2T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+1,5\right)F\left(n-p+1,5;-n-0,5;0,5;\alpha^2\right)}{2^{p}\Gamma\left(n+1,5\right)}=$$

$$=2T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+1,5\right)F\left(-n+p-1;n+1;0,5;\alpha^2\right)}{2^{p}\Gamma\left(n+1,5\right)\left(1-\alpha^2\right)^{0,5-p}};$$

$$u_{\alpha}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=0,5\beta_T T_0\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\Gamma\left(n-p+1\right)F\left(n-p+1;-n-1;1,5;\alpha^2\right)}{2^{p+1}\Gamma\left(n+2\right)};$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=-\beta_T\mu T\left(\alpha,\pm 0\right),\ u_{\gamma}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=0,\ \sigma_{\alpha\gamma}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=0 \qquad (17)$$

і, відповідно, на півбезмежному відрізку $1\le\left|\alpha\right|<\infty$

$$T\left(\alpha,\pm 0\right)=T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-p+1\right)F\left(n-p+1;n-p+1,5;2n-p+3;\alpha^{-2}\right)}{2^{p+1}\Gamma\left(2n-p+3\right)\Gamma\left(-n+p-0,5\right)\left|\alpha\right|^{2n-2p+2}};$$

$$q_{\alpha}^{*}\left(\alpha,\pm 0\right)=\operatorname{sign}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-p+2\right)F\left(n-p+2;n-p+1,5;2n-p+3;\alpha^{-2}\right)}{2^{p}\Gamma\left(2n-p+3\right)\Gamma\left(-n+p-0,5\right)\left|\alpha\right|^{2n-2p+3}};$$

$$q_{\gamma}^{*}\left(\alpha,\pm 0\right)=\pm\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-p+1,5\right)F\left(n-p+1,5;n-p+2;2n-p+3;\alpha^{-2}\right)}{2^{p}\Gamma\left(2n-p+3\right)\Gamma\left(-n+p-1\right)\left|\alpha\right|^{2n-2p+3}};$$

$$W\left(\alpha,p\right)=2T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-p+1,5\right)F\left(n-p+1,5;n-p+2;2n-p+3;\alpha^{-2}\right)}{2^{p}\Gamma\left(2n-p+3\right)\Gamma\left(-n+p-1\right)\left|\alpha\right|^{2n-2p+3}};$$

$$u_{\alpha}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=$$

$$=0,5\beta_T T_0\operatorname{sign}\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-p+1\right)F\left(n-p+1;n-p+0,5;2n-p+3;\alpha^{-2}\right)}{2^{p+2}\Gamma\left(2n-p+3\right)\Gamma\left(-n+p+0,5\right)\left|\alpha\right|^{2n-2p+1}};$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=-\beta_T\mu T_0\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-p+1\right)F\left(n-p+1;n-p+1;2n-p+3;\alpha^{-2}\right)}{2^{p+1}\Gamma\left(2n-p+3\right)\Gamma\left(-n+p-0,5\right)\left|\alpha\right|^{2n-2p+2}};$$

$$u_{\gamma}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=0,\ \sigma_{\alpha\gamma}^{T}\left(\alpha,\pm 0\right)=0. \qquad (18)$$

Характеристики (17) і (18) температурного поля і зумовлені ним напруження повинні бути неперервні в точках $|\alpha| = 1$ межі тепловиділення і заникати на нескінченності. Тому у першому випадку вимагаємо, щоб

$$\lim_{|\alpha|\to 1-0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \lim_{|\alpha|\to 1+0} q_\alpha^*(\alpha, \pm 0), \quad \lim_{|\alpha|\to\infty} T(\alpha, \pm 0) = 0\,, \tag{19}$$

а в другому випадку, щоб

$$\lim_{|\alpha|\to 1-0} \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = \lim_{|\alpha|\to 1+0} \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0), \quad \lim_{|\alpha|\to\infty} \sigma_{\gamma\gamma}^T(\alpha, \pm 0) = 0\,. \tag{20}$$

Умови (19) виконуватимуться, якщо $0{,}5 < p < 1$, а умови (20) – якщо $-1 < p < 1$. Тому перетин множин значень параметра p такий:

$$0{,}5 \le p < 1\,. \tag{21}$$

За виконання нерівності (21) джерела тепла поширюються в область $1 \le |\alpha| < \infty$ за законом (18), неперервні на межі $|\alpha| = 1$ і заникають на нескінченності. Разом з тим за обмеження $0 \le p < 0{,}5$ розподіл джерел тепла на цій межі сингулярний з особливістю $\left[\left(1-\alpha^2\right)^{0{,}5-p}\right]^{-1}$. Отже, параметр p може слугувати певною теплофізичною характеристикою внутрішнього теплового шару, який обмежений поверхнями $\gamma = \pm 0$.

Зазначимо, що за розподілу джерел тепла (15) у тепловому шарі і обмеженні (21) повна потужність тепловиділення дорівнює нулеві.

Коренево-сингулярний розподіл характеристик температурного поля. Класичний коренево-сингулярний розподіл теплових потоків на краю $|\alpha| = 1$ області тепловиділення одержимо за умови, що поза нею джерела тепла $W(\alpha, p) = 0$. Тому за поданням (18) функції $W(\alpha, p)$ ця умова в області $1 < |\alpha| < \infty$ виконуватиметься, якщо параметр $p = 0$, що порушує нерівність (21).

Таким чином, відповідно до подань (17) і (18) при $p = 0$ на відрізку $0 \le |\alpha| \le 1$ знаходимо

$$T(\alpha, \pm 0) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{T_{n+1}\left(1-2\alpha^2\right)}{2(n+1)}, \qquad q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^1\left(1-2\alpha^2\right),$$

$$q_\gamma^*(\alpha, \pm 0) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{n+1}\left(1-2\alpha^2\right), \quad W(\alpha, 0) = \frac{2T_0}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_{n+1}\left(1-2\alpha^2\right)$$

і, відповідно, на відрізку $1 \le |\alpha| < \infty$

$$T(\alpha, \pm 0) = T_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)\left(|\alpha| + \sqrt{\alpha^2-1}\right)^{2n+2}},$$

$$q_\alpha^*(\alpha, \pm 0) = \frac{\operatorname{sign}\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^{n+1}}{\left(|\alpha| + \sqrt{\alpha^2-1}\right)^{2n+2}},$$

$$q_{\gamma}^{*}(\alpha, \pm 0) \equiv 0, \; W(\alpha, 0) \equiv 0,$$

де $T_{n+1}(x)$ і $C_n^1(x)$ – поліноми Чебишева і Гегенбауера [6].

ВИСНОВКИ

Запропоновано нове формулювання плоских задач термопружності, у якому стрічкові тепловиділювальні елементи змодельовані пеленою джерел тепла. Знайдені подання температурного поля і зумовлених ним температурних переміщень та напружень через інтеграли Фур'є з двома твірними функціями, які визначені з розв'язків інтегральних рівнянь першого роду. Знайдено клас законів розподілу джерел тепла у стрічковій області, сумарна потужність яких завжди дорівнює нулю, що забезпечує обмежений розв'язок задачі теплопровідності.

З'ясовано, що пелена джерел тепла у стрічковій області утворює внутрішній тепловий шар з теплофізичним параметром $0 \le p < 1$, який регулює розподіл теплових потоків у ньому. За умови $0,5 < p < 1$ теплові потоки на межі області тепловиділення є неперервні і обмежені. При цьому тепловий шар поширюється поза межі тепловиділення і заникає на нескінченності. Якщо $0 \le p \le 0,5$, теплові потоки на межі тепловиділення мають сингулярний розподіл, зокрема, при $p = 0$ – класичний коренево-сингулярний. При цьому тепловий шар існує тільки в межах області тепловиділення, а розподіл джерел тепла є також коренево-сингулярний.

РЕЗЮМЕ. Предложены новая постановка и метод решения плоских задач стационарной теплопроводности и термоупругости для тела с тонким ленточным элементом в условиях плоской деформации. Ленточные элементы смоделированы пеленой источников тепла, а созданное ими температурное поле определено из решения интегральных уравнений первого рода. Показано, что среди множества таких решений всегда существует классическое с корневой особенностью распределения тепловых потоков на краю области тепловыделения.

SUMMARY. New formulation and solution method of plain problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a thin band inclusion in the conditions of plain deformation are presented. Band elements within this statement are modeled by a sheet of heat sources and specified temperature field is determined by the solutions of the first-kind integral equations. Among the solution set of such integral equations always exist the solution which determines a classical root-singular distribution of heat transfer at the edge of heat release region.

1. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
2. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 638 с.
4. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1982. – 364 с.
5. *Градштейн И. С., Рижик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
6. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Одержано 10.11.2011