

УДК 539.3

ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР З ШАРУВАТИМ ПОКРИВОМ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ ПІД ДІЄЮ ТИСКУ ГЕРЦА

Р. Д. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО

Білостоцький технічний університет, Польща

Розглянуто осесиметричну задачу теорії пружності про навантаження тиском Герца неоднорідного півпростору. Півпростір складається з однорідної основи і системи двох періодично укладених пружних шарів. Розв'язок задачі теорії пружності для неоднорідного покриття порівняно з розв'язком задачі, де він змодельований гомогенізованим однорідним шаром.

Ключові слова: *напруження, шаруватий покрив періодичної структури, тиск Герца.*

У механіці контактної взаємодії останнім часом значну увагу приділяють покриттям, які використовують для поліпшення трибологічних характеристик пар тертя. Поряд з однорідними [1–3], неоднорідними з механічними властивостями, які описують неперервними функціями відстані до поверхні [4–6], досліджують також покриття, що складаються з періодично укладених пружних шарів [7–8]. Під час аналізу напруженого стану, дослідники, як правило, зосереджуються на обчисленні розтягальних напружень і напружень Губера–Мізеса, які описують за допомогою другого інваріанта девіатора тензора напружень. Моделюючи шаруватий півпростір чи покрив періодичної структури, використовують два підходи. Перший враховує структуру і розглядає шари як окремі пружні середовища, а другий базується на створенні гомогенізованого однорідного покриття, механічні властивості якого визначають на основі механічних і геометричних характеристик смуги періодичності [9–11]. Порівняно розв'язки для шаруватого півпростору [12–14]. Показано, коли відношення між товщиною смуги періодичності і характерним розміром ділянки навантаження менше ніж 0,1, то неоднорідний півпростір з періодичною структурою можна моделювати гомогенізованим півпростором. Розглядуваний покрив на відміну від шаруватого півпростору містить скінченну кількість смуг періодичності. Тому необхідно дослідити, як це впливає на різницю між розв'язками.

Нижче розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності про навантаження тиском Герца пружного півпростору з шаруватим покриттям періодичної структури. Оскільки деякі компоненти тензора напружень можуть суттєво відрізнятися у різних шарах смуги періодичності, то виберемо метод гомогенізації [10–11], який дав змогу це врахувати. Проаналізуємо різницю між вертикальними переміщеннями точок поверхні неоднорідного півпростору, розподілами розтягальних напружень і напружень Губера–Мізеса, що виникає внаслідок використання двох моделей неоднорідного покриття.

Формулювання задачі. Нехай у крузі радіуса a поверхні $z = h = H/a$ пружного неоднорідного півпростору (рис. 1а) прикладено тиск Герца

$$p(r) = p_0 \sqrt{1-r^2}, \quad r \leq 1, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr}^{(1),k} = K_k u_{r,r}^{(1)} + L_k r^{-1} u_r^{(1)} + M_k u_{z,z}^{(1)}, \quad k = 1, 2; \quad (8)$$

$$\sigma_{\psi\psi}^{(1),k} = L_k u_{r,r}^{(1)} + K_k r^{-1} u_r^{(1)} + M_k u_{z,z}^{(1)}, \quad k = 1, 2; \quad (9)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = A_3 u_{r,r}^{(1)} + A_3 r^{-1} u_r^{(1)} + A_4 u_{z,z}^{(1)}, \quad \sigma_{rz}^{(1)} = A_5 (u_{r,z}^{(1)} + u_{z,r}^{(1)}), \quad (10)$$

де $L_k = \lambda_k - h_k \lambda_k \frac{[\lambda]}{\bar{\lambda} + 2\bar{G}}$, $K_k = L_k + 2G_k$, $M_k = \lambda_k - h_k \lambda_k \frac{[\lambda] + 2[G]}{\bar{\lambda} + 2\bar{G}}$, $h_1 = 1$, $h_2 = -l_1/l_2$; λ_k , G_k – сталі Ламе, індекс k відповідає номеру шару в смузі періодичності; механічні сталі A_3 , A_4 , A_5 , κ_1 , κ_2 , $[\lambda]$, $[G]$, $\bar{\lambda}$, \bar{G} можна обчислити за відомими формулами [14].

Оскільки алгоритм розв'язування розглядуваної задачі подібний до алгоритму [14], то обмежимося коротким його описом. Застосовуючи до рівнянь (2), (3) і співвідношень (7)–(10) інтегральне перетворення Ганкеля, знаходимо трансформанти Ганкеля компонент вектора переміщення і тензора напруження, що задовольняють крайові умови (6). Знайдені формули містять шість невідомих функцій параметра інтегрального перетворення. Для їх визначення використовуємо крайові умови (4)–(5). Отримаємо систему шести лінійних алгебричних рівнянь. Оскільки тільки одне рівняння цієї системи неоднорідне, а права його частина рівна трансформанті Ганкеля навантаження (1), то розв'язок системи рівнянь пропорційний до цієї трансформанти. Повертаючись у знайдених трансформантах до простору оригіналів, отримуємо залежності у вигляді інтегралів між переміщеннями і напруженнями, з одного боку, та прикладеним навантаженням – з іншого. Інтегралі у внутрішніх точках неоднорідного півпростору ($z < h$) обчислюємо за допомогою квадратури Гаусса. На поверхні $z = h$ враховуємо асимптотичну поведінку розв'язку системи рівнянь, коли параметр інтегрального перетворення прямує до нескінченності. Інтегралі, в яких підінтегральні функції замінені їх асимптотиками, знаходимо аналітично. Для визначення решти інтегралів застосовуємо квадратуру Гаусса.

Моделювання неоднорідного покриття за допомогою пакета шарів. Пронумеруємо шари неоднорідного покриття знизу вгору, починаючи від шару, який безпосередньо контактує з однорідною основою (рис. 1b). Їх механічні властивості опишемо за допомогою модулів Юнга $E^{(j)}$ ($E^{(2k)} = E_1$, $E^{(2k-1)} = E_2$, $k = 1, \dots, n/2$) і коефіцієнтів Пуассона $\mu^{(j)}$, ($\mu^{(2k)} = \mu_1$, $\mu^{(2k-1)} = \mu_2$, $k = 1, \dots, n/2$), де індекс j вказує на номер шару в пакеті, n – парне число, що відповідає кількості шарів у пакеті. Загальний розв'язок рівнянь теорії пружності в шарах пакета і в однорідному півпросторі $z \leq 0$, описано раніше [6]. Враховуючи розв'язок [6], отримаємо формули для визначення компонент вектора переміщення і тензора напруження в шарах пакета:

$$u_k^{(j)} = \int_0^\infty U_k^{(j)}(s, z) \tilde{p}(s) J_k(sr) ds, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = r, z; \quad (11)$$

$$\sigma_{rr}^{(j)} = \int_0^\infty S_{r1}^{(j)}(s, z) \tilde{p}(s) J_0(sr) s ds - r^{-1} \int_0^\infty S_{r2}^{(j)}(s, z) \tilde{p}(s) J_1(sr) ds, \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\psi\psi}^{(j)} = & \int_0^\infty (S_{r1}^{(j)}(s, z) - S_{r2}^{(j)}(s, z)) \tilde{p}(s) J_0(sr) s ds + \\ & + r^{-1} \int_0^\infty S_{r2}^{(j)}(s, z) \tilde{p}(s) J_1(sr) ds, \quad j = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sigma_{kz}^{(j)}(r, z) = -\int_0^{\infty} S_{kz}^{(j)}(s, z) \tilde{p}(s) J_k(sr) s ds, \quad j=1, \dots, n, \quad k=r, z, \quad (14)$$

$$2U_z^{(j)}(s, z) = D_j s_j a_{4j-3}^{(p)}(s) + D_j c_j a_{4j-2}^{(p)}(s) + 2s s_j a_{4j-1}^{(p)}(s) + 2s c_j a_{4j}^{(p)}(s),$$

$$2U_r^{(j)}(s, z) = G^{(n)} S_{r2}^{(j)}(s, z) / G^{(j)} = 2s c_j a_{4j-1}^{(p)}(s) + 2s s_j a_{4j}^{(p)}(s) + \\ + ((2 + d_j) s_j + D_j c_j) a_{4j-3}^{(p)}(s) + ((2 + d_j) c_j + D_j s_j) a_{4j-2}^{(p)}(s),$$

$$G^{(n)} S_{r1}^{(j)}(s, z) / G^{(j)} = 2U_r^{(j)}(s, z) + (d_j - 1) s_j a_{4j-3}^{(p)}(s) + (d_j - 1) c_j a_{4j-2}^{(p)}(s),$$

$$G^{(n)} S_{zz}^{(j)}(s, z) / G^{(j)} = 2U_r^{(j)}(s, z) - (1 + d_j) s_j a_{4j-3}^{(p)}(s) - (1 + d_j) c_j a_{4j-2}^{(p)}(s),$$

$$G^{(n)} S_{rz}^{(j)}(s, z) / G^{(j)} = 2U_z^{(j)}(s, z) + (1 + d_j) c_j a_{4j-3}^{(p)}(s) + (1 + d_j) s_j a_{4j-2}^{(p)}(s),$$

де $\tilde{p}(s)$ – трансформанта Ганкеля навантаження (1), функції $a_i^{(p)}(s)$, $i = -1, \dots, 4n$ – розв’язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{4n+2} A_{ij}^{(2)} a_{j-2}^{(p)} = \delta_{i, 4n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 4n+2, \quad (15)$$

$d_j = 1/(1 - 2\mu^{(j)})$; $c_j = \cosh(s(h_j - z))$; $s_j = \sinh(s(h_j - z))$; $D_j = d_j s(h_j - z)$; h_j – координата z точки перетину верхньої площини, що обмежує шар пакета з віссю z ; $G^{(j)} = E^{(j)}/2/(1 + \mu^{(j)})$; $J_r(sr) = J_1(sr)$, $J_z(sr) = J_0(sr)$, $J_0(sr)$, $J_1(sr)$ – функції Бесселя; δ_{ij} – символ Кронекера.

Ненульові коефіцієнти системи (15) обчислюємо за відомими формулами [6]. Як і в попередньому розділі, інтеграли (11)–(14) у внутрішніх точках неоднорідного півпростору ($z < h$) обчислюємо за допомогою квадратури Гаусса. На поверхні $z = h$ враховуємо асимптотичну поведінку функцій $a_{4n-2}^{(p)}(s)$ і $a_{4n}^{(p)}(s)$, коли $s \rightarrow \infty$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a_{4n-2}^{(p)}(s) = -(1 - 2\mu^{(n)}), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} a_{4n}^{(p)}(s) = -(1 - \mu^{(n)}).$$

Аналіз результатів. Оцінюючи вихідні співвідношення, робимо висновок, що розподіл переміщень і напружень у задачі для гомогенізованого покритву залежить від семи безрозмірних параметрів: товщини покритву h , співвідношень між модулями Юнга E_1/E_0 і E_2/E_0 , коефіцієнтів Пуассона μ_0 , μ_1 і μ_2 , співвідношення між товщинами шарів у смузі періодичності l_1/l_2 . Аналогічні розподіли для неоднорідного покритву залежать додатково від кількості шарів у пакеті n . З метою зменшення кількості вхідних параметрів приймемо, що механічні властивості одного з шарів у смузі періодичності збігаються з механічними властивостями основи, а коефіцієнти Пуассона і товщини всіх шарів у пакеті однакові. Вважатимемо також, що $\mu_0 = 0,25$; E_1/E_0 (або E_2/E_0) = 2; 4 або 8; $h = 0,2$; 0,4 або 0,8; $n = 10$, 20 або 40. Обчислення показали, що характерними точками в розглядуваній задачі є точки **P**, **O** і **Q** (див. рис. 1a). Отримані розв’язки порівнюємо, використовуючи такі величини: переміщення u_z в точках **P** і **Q**, перше головне напруження σ_1 в точках **P** і **O**, другий інваріант девіатора тензора напружень J_2 в точках осі z і в точці **P**.

Значення, обчислені у задачі для гомогенізованого покритву, наведено у стовпчиках “hom.” таблиці. У стовпчиках $n = 10$, 20 або 40 подані розв’язки задачі для неоднорідного покритву зі зазначеною кількістю шарів. Перша цифра в них відповідає параметрам $E_1/E_0 = 8$ і $E_2/E_0 = 1$, а друга (без врахування дужок) –

$E_1/E_0 = 1$, $E_2/E_0 = 8$. Відносне відхилення (обчислене в процентах) переміщення $u_z(\mathbf{Q})E_0/p_0$ від відповідного переміщення, знайденого моделюванням неоднорідного покриття гомогенізованим шаром, подано в дужках. Як бачимо, вони добре узгоджуються між собою навіть тоді, коли модулі Юнга шарів, що утворюють смугу періодичності, суттєво відрізняються між собою. Якщо розглянемо щонайменше 10 шарів у пакеті, то відхилення залежить не від кількості шарів, а від відношення δ між товщиною смуги періодичності і радіусом круга навантаження. Для такого самого значення параметра δ більше відхилення спостерігаємо за товстішого покриття.

Залежність переміщення u_z в точках Q і P від параметра h

h	$u_z(\mathbf{Q})E_0/p_0$				$u_z(\mathbf{P})E_0/p_0$			
	hom.	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	hom.	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$
0,2	-1,3354	-1,3316 (0,28)	-1,3334 (0,15)	-1,3344 (0,08)	-0,7043	-0,7044	-0,7044	-0,7044
		-1,3398 (-0,33)	-1,3375 (0,16)	-1,3364 (-0,08)		-0,7043	-0,7043	-0,7043
0,4	-1,2306	-1,2236 (0,57)	-1,2267 (0,32)	-1,2288 (0,15)	-0,6814	-0,6818	-0,6817	-0,6816
		-1,2400 (-0,76)	-1,2350 (-0,36)	-1,2327 (-0,17)		-0,6815	-0,6813	-0,6813
0,8	-1,0747	-1,0580 (1,55)	-1,0655 (0,86)	-1,0699 (0,45)	-0,6240	-0,6251	-0,6245	-0,6243
		-1,0960 (-1,98)	-1,0851 (-1,01)	-1,0798 (-0,47)		-0,6250	-0,6240	-0,6238

Під час обчислення напружень вважатимемо, що $E_1/E_0 > 1$, а $E_2/E_0 = 1$. Ромбами на рис. 2 і 3 позначено результати обчислення задачі для шаруватого неоднорідного покриття, а суцільними лініями – для гомогенізованого однорідного. Криві 1 і 2 відповідають напруженням у шарах з більшим і меншим модулем Юнга, відповідно. Слід зазначити, що у випадку гомогенізованого покриття не знаємо, який шар смуги періодичності знаходиться в розглядуваній точці покриття. Тому стан напружень у кожній точці покриття описуємо за допомогою двох тензорів напружень (8)–(10). Залежно від того, який шар смуги періодичності розглядаємо, один з тензорів узгоджується з тензором напружень у неоднорідному покритті (рис. 2, 3). В однорідній основі криві 1 і 2 зливаються.

Порівнюючи напруження у двох розглядуваних задачах, робимо висновок, що лише під час обчислення напружень в однорідній основі отримаємо відхилення співмірні з відхиленнями переміщень. У шарах покриття відхилення напружень коливаються від 1...5% ($E_1/E_0 \leq 4$, $n = 20$) до навіть 10...20% під час обчислення напруження σ_1 на межі ділянки навантаження. Вказане відхилення суттєво залежить від градієнта досліджуваного параметра в розглядуваному шарі смуги періодичності, що пояснює такі спостереження: в шарах з меншим модулем Юнга відхилення суттєво менші (рис. 2 і 3); найбільші відхилення – в точці P (див. рис. 1a і 3). Як і слід було чекати, узгодженість між розв'язками покращиться, якщо збільшимо кількість шарів у покритті (рис. 2d) або зменшимо співвідношення між модулями Юнга шарів у смугі періодичності (рис. 2e).

Як і в задачі для однорідного півпростору, в околі точок ненавантаженої поверхні ($z = h$, $r \geq 1$) головне напруження σ_1 додатне. Найбільше його значення в цій області досягається в точці P. Розтягальні напруження можуть виникнути в шарах з більшим модулем Юнга на межі поділу між покритвом і основою. Найви-

ще їх значення спостерігаємо в точці **О**. Розтягальні напруження в точці **Р**, як правило, більші, ніж у точці **О**. Однак зі зростанням параметра E_1/E_0 і товщини покриття глобальний максимум може виникнути в точці **О**.

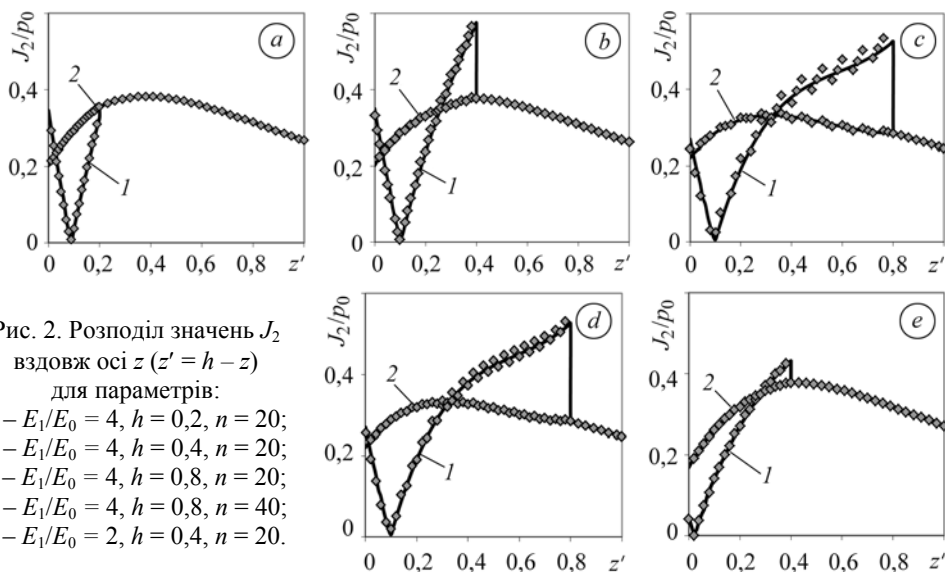
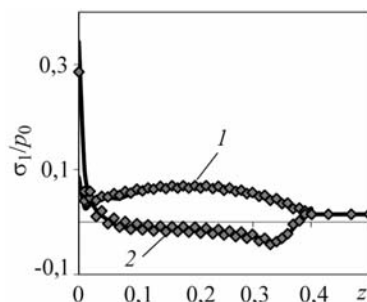


Рис. 2. Розподіл значень J_2 вздовж осі z ($z' = h - z$) для параметрів:
 a – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0,2$, $n = 20$;
 b – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0,4$, $n = 20$;
 c – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0,8$, $n = 20$;
 d – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0,8$, $n = 40$;
 e – $E_1/E_0 = 2$, $h = 0,4$, $n = 20$.

Fig. 2. Distribution of the parameter J_2 along the z -axis ($z' = h - z$) for parameters:
 a – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0.2$, $n = 20$; b – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0.4$, $n = 20$; c – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0.8$, $n = 20$;
 d – $E_1/E_0 = 4$, $h = 0.8$, $n = 40$; e – $E_1/E_0 = 2$, $h = 0.4$, $n = 20$.

Рис. 3. Розподіл першого головного напруження вздовж лінії $r = 1$ ($z' = h - z$). $E_1/E_0 = 4$; $E_2/E_0 = 1$; $h = 0,4$; $n = 40$.

Fig. 3. Distribution of the first principal stress along the line $r = 1$ ($z' = h - z$).
 $E_1/E_0 = 4$; $E_2/E_0 = 1$; $h = 0.4$; $n = 40$.



Для розподілу параметра J_2 в шарах з більшим модулем Юнга характерні три локальні максимуми: в точках **Р**, **Q** і **О**. За винятком тонких покриттів з суттєвою різницею між модулями Юнга ($h = 0,2$; $E_1/E_0 = 4$) глобальний максимум досягається на межі між покритвом і основою.

ВИСНОВКИ

Показано, що розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності про навантаження тиском Герца пружного півпростору з шаруватим покритвом періодичної структури добре узгоджується з розв'язком задачі, де він змодельований гомогенізованим однорідним покритвом. Найменші відхилення отримано під час обчислення переміщень і напружень в однорідній основі. Це вагомий аргумент щодо використання методу гомогенізації для знаходження реального контактного тиску в задачах про втискування штампа в такий неоднорідний півпростір. Хоч відхилення напружень у покритві значно перевищує відхилення переміщень, спостерігаємо дуже добру якісну узгодженість розв'язків. За винятком межі ділянки навантаження, де слід проводити додаткові розрахунки з врахуванням структури покриття, напруження в гомогенізованому покритві можуть бути використані для оцінювання міцності шаруватих покриттів періодичної структури.

Характер розподілу першого головного напруження і напруження Губера-Мізеса такий, як і для однорідного півпростору, покритого однорідним шаром з іншими механічними властивостями.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена осесимметричная задача теории упругости о нагружении неоднородного полупространства давлением Герца. Полупространство состоит из однородного основания и системы двух периодически уложенных упругих слоёв. Решение задачи теории упругости для неоднородного покрытия сравнено с решением задачи, где оно смоделировано гомогенизированным однородным слоем.

SUMMARY. An axisymmetric problem of elasticity for a two-layered periodic coated half-space under Hertz's pressure is considered. The solution of the problem for non-homogeneous half-space and the one based a homogenized model are compared.

Працю виконано за проектом S/WM/2/2008, що реалізується в Білостоцькому технічному університеті і фінансується Комітетом наукових досліджень Польщі.

1. *Schwarzer N.* Coating desing due to analytical modeling of mechanical contact problems on multiplayer systems // *Surface & Coatings Technology.* – 2000. – **133–134.** – P. 397–402.
2. *Bargallini G. M., Cavatorta M. P., and Sainsot P.* Coated contact: astrain approach // *Tribol. Int.* – 2003. – **36.** – P. 935–941.
3. *Kulchytsky-Zhyhailo R. and Rohovsky G.* Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space // *Ibid.* – 2010. – **43.** – P. 1592–1601.
4. *Guler M. A. and Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // *Int. J. Mech. Sci.* – 2007. – **49.** – P. 161–182.
5. *Liu T.-J., Wang Y.-S., and Zhang C.* Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials // *Archive of Appl. Mech.* – 2008. – **78.** – P. 267–282.
6. *Кульчицький-Жигайло Р., Байковський А.* Пружний півпростір з неоднорідним покритвом під дією дотичних зусиль // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2010. – **46,** № 6. – С. 25–34.
(*Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R. and Bajkowski A.* Elastic half space with inhomogeneous coating under the action of tangential forces // *Materials Science.* – 2010. – **46,** № 6. – P. 735–746.)
7. *Nanoindentation and friction studies on Ti-based nanolaminated films / Z. N. Farhat, Y. Ding, D. O. Northwood, and A. T. Aplas* // *Surface & Coatings Technology.* – 1997. – **89.** – P. 24–30.
8. *Stress analyses and in-situ fracture observation of wear protective multilayer coatings in contact loading / A. A. Voevodin, E. V. Iarve, W. Ragland, J. S. Zabinski, and S. Donaldson* // *Surface & Coatings Technology.* – 2001. – **148.** – P. 38–45.
9. *Christensen R. M.* *Mechanics of composite materials.* – New York: J. Wiley and Sons, 1979. – 348 p.
10. *Matysiak S. J. and Woźniak Cz.* On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // *Acta Mechanica.* – 1986. – **65.** – P. 223–238.
11. *Woźniak Cz.* A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites // *Int. J. Eng. Sci.* – 1987. – **25,** № 5. – P. 483–499.
12. *Кульчицький-Жигайло Р., Колодзейчик В.* Поле напружений в неоднорідній полуплоскості с періодической структурой, вызванное давлением Герца // *Трение и износ.* – 2005. – **26,** № 4. – С. 358–366.
13. *Колодзейчик В., Кульчицький-Жигайло Р.* Тиск бокової поверхні циліндра на періодично шаруватий півпростір // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2007. – **43,** № 3. – С. 51–57.
(*Kolodziejczyk W. and Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R.* Pressure of the Lateral Surface of a Cylinder on a Periodically Layered Half Space // *Materials Science.* – 2007. – **43,** № 3. – P. 351–360.)
14. *Kulchytsky-Zhyhailo R. and Kolodziejczyk W.* On axisymmetrical contact problem of pressure of a rigid sphere into a periodically two-layered semi-space // *Int. J. Mech. Sci.* – 2007. – **49.** – P. 704–711.

Одержано 07.04.2011