

УДК 537.874.4

АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ХВИЛЬ НА ПЛОСКИХ ДІЕЛЕКТРИКАХ

З. Т. НАЗАРЧУК, А. Т. СИНЯВСЬКИЙ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Створено метод визначення матеріальних параметрів діелектричних покриттів за вимірними значеннями розсіяного електромагнетного поля, що дасть можливість впровадити ефективну обробку результатів вимірювань у засобах неруйнівного контролю. Особливістю запропонованого методу розв'язання сформульованої оберненої задачі є можливість реконструкції кусково-неперервного профілю діелектричної проникності для плоскошаруватих матеріалів. В основі реконструкції – метод інтегральних рівнянь, а розв'язок задачі отримано наближено. Вимірні значення коефіцієнта відбиття плоскої електромагнетної хвилі екстрапольовано у високочастотній області, через що вдалося досягнути вищої точності реконструкції функції діелектричної проникності досліджуваних структур.

Ключові слова: *неруйнівний контроль, діелектрична проникність, обернена задача розсіювання, рівняння Захарова–Шабата.*

Використання діелектричних матеріалів для ізоляції та корозійного захисту, а також розширення сфери застосування полімерних композиційних матеріалів як елементів конструкцій визначають необхідність створення засобів неруйнівного контролю таких матеріалів. Нижче розглянуто задачу встановлення матеріальних параметрів плоских діелектричних структур за вимірними значеннями розсіяного електромагнетного поля як апроксимацію розв'язку системи інтегральних рівнянь. Модель, яка вжита для формулювання оберненої задачі розсіювання (ОЗР), базується на припущенні про нормальне падіння плоскої електромагнетної хвилі на осесиметричну плоску структуру. Пошук ефективного методу розв'язання ОЗР є передумовою створення високоточних засобів неруйнівного контролю діелектричних матеріалів і розвитку таких технічних напрямів, як мікрохвильова візуалізація та дистанційне зондування.

Публікації Марченка [1], Гельфанда і Левітана [2] стали математичною основою теорії одновимірних ОЗР. Таку задачу вони сформулювали в контексті квантової теорії розсіювання. Всебічний аналіз такого підходу до розв'язання одновимірної оберненої задачі електромагнетизму подано в працях [3, 4]. Особливу увагу заслуговує стаття [5], де ОЗР розв'язано для системи звичайних диференціальних рівнянь Захарова–Шабата (З–Ш) [6]. Це дало можливість отримати розв'язки для істотно ширшого класу функцій, ніж для рівняння Шредінгера. Саме тому формулювання З–Ш використали для розв'язання поставленої ОЗР.

Критичним обмеженням у перелічених вище підходах є виконання умови про неперервність шуканої функції діелектричної проникності. Для реконструкції діелектричної проникності шаруватих матеріалів розроблено метод пошарового зрізання [7], який ефективно працює, коли така функція є кусково-стала. Математична модель, покладена в основу методу пошарового зрізання, не передбачає неперервної зміни діелектричної проникності у досліджуваній структурі. Тому

мета цього дослідження – створити метод, придатний як для реконструкції неперервних функцій діелектричної проникності, так і для встановлення розривів у функцій, що описують місця поділу середовищ у багатошарових структурах. Аналогічні задачі подібно сформулювали Актосан [8, 9] та Грінберг [10], але отриманий там розв’язок у вигляді сингулярного інтегрального рівняння є мало-прийнятний для практики.

Формулювання задачі. Математичну модель розсіювання плоских електромагнетних хвиль на плоскому шаруватому середовищі за умови нормального падіння можна подати рівняннями Максвелла для тангенціальних компонент електричного $E(z)$ та магнетного $H(z)$ полів:

$$\begin{cases} dE(z)/dz = -i\omega\mu_0 H(z), \\ dH(z)/dz = -i\omega\epsilon_0 \epsilon(z) E(z), \end{cases} \quad (1)$$

де ϵ_0 та μ_0 – діелектрична та магнетна проникності вакууму; ω – кругова частота, яка пов’язана з хвильовим коефіцієнтом вакууму залежністю $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ і визначає гармонічну поведінку в часі всіх компонент поля як функції $\exp(i\omega t)$. Шарувате неоднорідне середовище має діелектричну проникність $\epsilon(z)$, яка є розривна функція координати z . Хвилі розповсюджуються вздовж осі $0z$. Беручи до уваги те, що функція $\epsilon(z)$ має скінченну кількість розривів у точках z_n , де $n = 1, (N+1)$,

дійсну вісь можна розділити на інтервали $\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{N+2} (z_{n-1}, z_n)$ з кінцями у безмежності $z_0 = -\infty$ і $z_{N+2} = +\infty$ (рис. 1). Тоді на кожному з інтервалів (z_{n-1}, z_n) можна визначити неперервну функцію $\epsilon_{n, n+1}(z) \in \mathbb{C}$. Нехай також значення функції діелектричної проникності на крайніх інтервалах є однакові і рівні: $\epsilon_{0,1} = \epsilon_{N+1, N+2} = 1$.

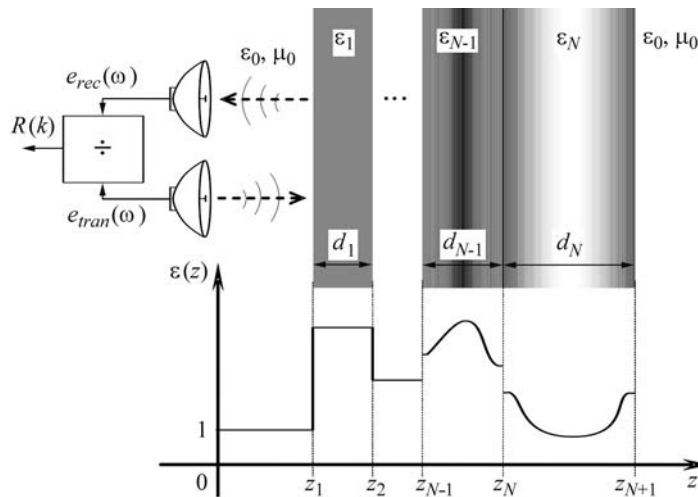


Рис. 1. Розсіювання плоскої електромагнетної хвилі на плоскій шаруватій діелектричній структурі з кусково-неперервною функцією діелектричної проникності.

Fig. 1. Scattering of electromagnetic plane wave on a plane layered dielectric structure, with a piece-wise continuous function of its dielectric permittivity.

На відміну від прямої задачі, де для відомого значення діелектричної проникності $\epsilon(z)$ знаходять розв’язок рівнянь (1) відносно функцій $E(z)$ та $H(z)$, ОЗР

сформульовано за умови, що функція $\varepsilon(z)$ невідома. Вихідними даними тут слугують значення коефіцієнта відбиття $R(k)$, який визначає асимптотична поведінка розв'язку рівнянь (1)

$$\begin{aligned} E(z, k) &\underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} 1/T(k) \exp(-ikz) + R(k)/T(k) \exp(ikz) = \\ &= a(k) \exp(-ikz) + b(k) \exp(ikz) \end{aligned} \quad (2)$$

за умови, що у протилежному напрямі цей розв'язок має асимптоту $E(z, k) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-ikz)$, де $T(k)$ – коефіцієнт проходження хвилі. Величини $a(k)$ та $b(k)$ прийнято називати коефіцієнтами розсіювання.

Коефіцієнт відбиття $R(k)$ можна безпосередньо знайти за результатами вимірювання розсіяного поля. Як правило, практичні застосування накладають обмеження на область визначення функції $R(k)$, оскільки вимірювальні засоби мають скінченний діапазон частот, на якому для певної множини $\omega = k/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ з відрізка $\Omega_{\min} \leq \omega \leq \Omega_{\max}$ визначають цю функцію. Попри це, вимірювання супроводжує випадкова компонента коефіцієнта відбиття, що ускладнює задачу реконструкції $\varepsilon(z)$. Тому скористаємося значеннями коефіцієнта відбиття $R(k)$, що задані лише для скінченної множини дискретних k .

Високочастотні асимптотичні властивості розв'язків рівнянь Максвелла. Розриви у функції діелектричної проникності визначають особливий характер частотної залежності коефіцієнта відбиття $R(k)$ саме на високих ($k \rightarrow \infty$) частотах (ВЧ). Використаємо це для обґрунтування алгоритму розв'язання ОЗР. Як окремий етап дослідження дамо порівняльний асимптотичний аналіз функції коефіцієнта відбиття на ВЧ для структур з неперервною функцією діелектричної проникності та для шаруватих, що мають розриви у ній.

Неперервна функція діелектричної проникності. Асимптотичну поведінку коефіцієнта відбиття на ВЧ визначимо шляхом приведення рівнянь Максвелла до системи З–Ш. Еквівалентність коефіцієнтів відбиття для таких моделей та взаємозв'язок між потенціалом у системі З–Ш і діелектричною проникністю можна ефективно використати для розв'язання ОЗР за неперервної функції $\varepsilon(z) \in \mathbb{C}$ [5].

Для приведення одних рівнянь до інших застосуємо перетворення Ліувілля

$$x(z) = \int_{-\infty}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \quad (3)$$

та замінимо змінні E та H у рівнянні Максвелла на дві нові v_1 та v_2 :

$$\begin{bmatrix} H \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\varepsilon(x)/\rho_0} & \sqrt[4]{\varepsilon(x)/\rho_0} \\ \sqrt{\rho_0} \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon(x)} & -\sqrt{\rho_0} \sqrt[4]{\rho_0/\varepsilon(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – хвильовий імпеданс вакууму.

У результаті отримуємо систему З–Ш [6]:

$$\begin{cases} dv_1/dx + ikv_1 = v_2 q(x) \\ dv_2/dx - ikv_2 = v_1 q(x), \end{cases} \quad (5)$$

де $q(x) = -(1/4) d \ln(\varepsilon(x))/dx$ – дійсна функція потенціалу, яку безпосередньо визначає функція діелектричної проникності.

Коли на безмежності $z \rightarrow \pm\infty$ функція діелектричної проникності набуває значення $\varepsilon(z)=1$, фундаментальними розв'язками системи (5) є дві пари незалежних векторнозначних функцій ϕ та $\bar{\phi}$ і ψ та $\bar{\psi}$, для елементів яких виконуються співвідношення $\bar{v}_1 = v_2^*$, а $\bar{v}_2 = -v_1^*$. Такі функції мають асимптоти [11]

$$\phi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(-ikx), \quad x \rightarrow -\infty; \quad (6)$$

$$\psi \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(ikx), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Лінійна їх комбінація дає можливість записати розв'язок системи 3–Ш для будь-яких початкових умов. Зокрема, одну з функцій (6) і (7) можна визначити лінійною комбінацією двох інших

$$\phi(k, x) = a_{reg}(k)\bar{\psi}(k, x) + b_{reg}(k)\psi(k, x) \rightarrow \begin{bmatrix} a_{reg}(k)\exp(-ikx) \\ b_{reg}(k)\exp(ikx) \end{bmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty; \quad (8)$$

$$\bar{\phi}(k, x) = b_{reg}^*(k)\bar{\psi}(k, x) - a_{reg}^*(k)\psi(k, x) \rightarrow \begin{bmatrix} b_{reg}^*(k)\exp(-ikx) \\ -a_{reg}^*(k)\exp(ikx) \end{bmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

для яких співвідношення коефіцієнтів $a_{reg}(k)$ та $b_{reg}(k)$ визначає коефіцієнт відбиття $R(k) = b_{reg}(k)/a_{reg}(k)$.

Варто зауважити, що для системи рівнянь Максвелла, а також еквівалентних форм запису задачі розсіювання у разі нормально падаючої плоскої електромагнетної хвилі для суто діелектричного середовища (рівняння Шредінгера та 3–Ш) виконується умова відсутності зв'язаних станів [3]. Це свідчить про те, що для дійснозначного потенціалу $q(x)$, який взаємопов'язаний з функцією діелектричної проникності $\varepsilon(z) \in \mathbb{C}$, відсутні лінійно залежні розв'язки у виразах (8) та (9), коли $a_{reg}(k) = 0$ у верхній комплексній півплощині k , де $\text{Im}(k) \geq 0$.

Один із розв'язків системи рівнянь (5) для зручності можна отримати у вигляді інтегрального рівняння

$$\begin{cases} \psi_1(x)\exp(-ikx) = - \int_x^{+\infty} \exp(-2ik(x-y))q(y)\exp(-iky)\psi_2(y)dy, \\ \psi_2(x)\exp(-ikx) = 1 + \int_x^{+\infty} M(k, x, y)\exp(-iky)\psi_2(y)dy, \end{cases} \quad (10)$$

де $M(k, x, y) = q(y) \int_x^y q(z)\exp(-2ik(z-y))dz$ – допоміжна функція. Розв'язки

$\phi(x)$, $\bar{\phi}(x)$ та $\bar{\psi}(x)$ мають подібну інтегральну форму, яку отримують, інтегруючи вихідну систему диференціальних рівнянь (5).

Теорему про рівномірну збіжність ряду Неймана, у формі якого можна отримати розв'язок системи інтегральних рівнянь (10), доведено для випадку, коли $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(y)|dy < \infty$ [11]. Використовуючи метод інтегрування за частинами, неважко

показати, що при $|k| \rightarrow \infty$ у верхньому комплексному півпросторі асимптотична поведінка розв'язків $\psi(x)$ така:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(x) \exp(-ikx) \\ \psi_2(x) \exp(-ikx) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} q(x)/(2ik) \\ 1 - 1/(2ik) \int_x^\infty q^2(y) dy \end{bmatrix} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (11)$$

У нижньому півпросторі асимптоти функції $\bar{\psi}(x)$ мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \bar{\psi}_1(x) \exp(ikx) \\ \bar{\psi}_2(x) \exp(ikx) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 + 1/(2ik) \int_x^\infty q^2(y) dy \\ -q(x)/(2ik) \end{bmatrix} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (12)$$

Подібні співвідношення можна також записати для функцій $\phi(x)$ та $\bar{\phi}(x)$. У свою чергу можна показати, що коефіцієнт відбиття для структури з неперервною функцією діелектричної проникності зникає з частотою, як $R_{reg}(k) = O(1/k)$ для $k \rightarrow +\infty$. При цьому асимптотичну поведінку коефіцієнтів розсіювання можна охарактеризувати як $a_{reg}(k) = 1 + O(1/k)$ та $b_{reg}(k) = O(1/k)$.

Кусково-неперервна функція діелектричної проникності. Встановлюючи асимптотичні властивості коефіцієнта відбиття для плоскої діелектричної структури, що містить межі поділу, необхідно враховувати умову неперервності функцій електричної $E(z)$ та магнетної $H(z)$ компонент поля на площинах поділу середовищ, або у точках розриву функції діелектричної проникності. Керуючись стратегією, вибраною для неперервної функції діелектричної проникності, перетворимо систему рівнянь Максвелла у систему З–Ш за умови, що функція діелектричної проникності неперервна лише на інтервалах $\varepsilon(z) \in \mathbb{C} | z \in (z_{n-1}, z_n)$, а в точках $z_n, n = \overline{1, (N+1)}$ має розриви. Така особливість змушує по-новому записати перетворення Ліувілля:

$$x(z) = x_n + \int_{z_{n-1}}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz', \quad z \in (z_{n-1}, z_n), \quad (13)$$

де $x_n = \sum_{l=1}^{n-1} \sqrt{\varepsilon_{l-1,l}} (z_l - z_{l-1})$ – точки, в яких функція $\varepsilon(x)$ має розриви.

Характер функції (13), отриманої перетворенням Ліувілля, дає можливість зробити висновок, що рівняння (5) чинні лише на кожному з інтервалів $z \in (z_{n-1}, z_n)$. Тому інтегральну форму розв'язків системи З–Ш визначимо для інтервалів (x_{n-1}, x_n) . При цьому граничні умови на кінцях інтервалів можна подати так, як асимптоти для фундаментальних розв'язків (6) та (7). Наприклад, інтегральне зображення розв'язку $\psi(x)$ на інтервалі $x \in (x_{n-1}, x_n)$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \psi_1(x) \exp(-ikx) = - \int_x^{x_n} \exp(-2ik(x-y)) q(y) \exp(-iky) \psi_2(y) dy, \\ \psi_2(x) \exp(-ikx) = 1 + \int_x^{x_n} M(k, x, y) \exp(-iky) \psi_2(y) dy. \end{cases} \quad (14)$$

Розв'язок (14) системи 3–Ш на кожному з інтервалів можна використати для встановлення ВЧ асимптот усіх розв'язків, подібно, як для функцій $\psi(x)$ та $\bar{\psi}(x)$ у виразах (11) та (12).

Проаналізуємо взаємозв'язок між розв'язками системи 3–Ш $\phi'(k, x)$ та $\phi''(k, x)$ на сусідніх інтервалах (x_{n-1}, x_n) та (x_n, x_{n+1}) . Для цього використаємо лінійну комбінацію $\phi'(k, x) = a_1(k)\bar{\psi}'(k, x) + b_1(k)\psi'(k, x)$ фундаментальних розв'язків $\bar{\psi}'(k, x)$ та $\psi'(k, x)$ на інтервалі $x \in (x_{n-1}, x_n)$. Запишемо аналогічний вираз $\phi''(k, x) = a_2(k)\bar{\psi}''(k, x) + b_2(k)\psi''(k, x)$ для інтервалу $x \in (x_n, x_{n+1})$. Тут $a_1(k)$ та $b_1(k)$ – коефіцієнти розсіювання для розв'язку на інтервалі $x \in (x_{n-1}, x_n)$; $a_2(k)$ та $b_2(k)$ – відповідно, на інтервалі $x \in (x_n, x_{n+1})$.

Коефіцієнти розсіювання $a_n(k)$, $b_n(k)$, $n=1, (N+1)$ визначають взаємозв'язок між функціями електричної і магнетної компонент поля на кожному інтервалі та незалежними розв'язками системи 3–Ш. Згідно з виразом (4), для інтервалу (x_{n-1}, x_n)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi'_2 & -\bar{\psi}'_1 \\ -\bar{\psi}'_2 & \psi'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0} & -\sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0^3} \\ \sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0} & \sqrt[4]{\varepsilon'(x)/\rho_0^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E' \\ H' \end{bmatrix} = \Lambda(\varepsilon'(x), k) \begin{bmatrix} E' \\ H' \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Зворотню залежність запишемо для інтервалу (x_n, x_{n+1}) :

$$\begin{bmatrix} E'' \\ H'' \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\varepsilon''(x)/\rho_0} & \sqrt[4]{\varepsilon''(x)/\rho_0} \\ -\sqrt[4]{\rho_0^3/\varepsilon''(x)} & \sqrt[4]{\rho_0^3/\varepsilon''(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\psi}''_1 & \psi''_1 \\ \bar{\psi}''_2 & \psi''_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \Lambda^{-1}(\varepsilon''(x), k) \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Тут $\Lambda(\varepsilon(x), k) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ – матриці з комплекснозначними коефіцієнтами, які для певного значення хвильового коефіцієнта визначає функція діелектричної проникності на інтервалах $\varepsilon'(x)|_{x \in (x_{n-1}, x_n)}$ та $\varepsilon''(x)|_{x \in (x_n, x_{n+1})}$.

Залежність між коефіцієнтами розсіювання на суміжних інтервалах можна встановити з умови неперервності електричної та магнетної компонент поля в точці x_n : $E'(x) = E''(x)|_{x=x_n}$ та $H'(x) = H''(x)|_{x=x_n}$.

Переслідуючи мету дослідити асимптотичну поведінку ($k \rightarrow \infty$) розв'язків, скористаємося твердженням про характер ВЧ компонент коефіцієнтів розсіювання, якщо $\varepsilon(z) \in \mathbb{C}$ на кожному з інтервалів, та подамо коефіцієнти розсіювання сумою ВЧ та зникальної компонент. Оскільки останні мають асимптоти $a_{reg}(k) = 1 + O(1/k)$ та $b_{reg}(k) = O(1/k)$, то у ВЧ області коефіцієнти розсіювання можна охарактеризувати як $a(k) = \tilde{a}(k) + O(1)$ та $b(k) = \tilde{b}(k) + O(1)$, $k \rightarrow \infty$. Тут і надалі всі ВЧ асимптотичні значення параметрів позначатимемо тильдою.

З виразів (15) та (16) випливає, що ВЧ компоненти коефіцієнтів розсіювання $\tilde{a}_1(k)$ та $\tilde{b}_1(k)$ на інтервалі (x_{n-1}, x_n) можна відшукати матричним перетворенням ВЧ компоненти коефіцієнтів розсіювання $\tilde{a}_2(k)$ та $\tilde{b}_2(k)$ на інтервалі (x_n, x_{n+1}) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{b}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\Lambda}(\varepsilon'(z_n - 0), k) \tilde{\Lambda}^{-1}(\varepsilon''(z_n + 0), k) \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_n & \delta_n^2 B_n \\ \delta_n^{-2} B_n & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_2 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

де $\delta_n = \exp(-ikx_n)$ – набіг фази; A_n та B_n – коефіцієнти, які визначає діелектрична

проникність матеріалу в околі точки розриву z_n : $A_n = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n + 0)}{\varepsilon(z_n - 0)}} + \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n - 0)}{\varepsilon(z_n + 0)}}$ та

$$B_n = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n + 0)}{\varepsilon(z_n - 0)}} - \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(z_n - 0)}{\varepsilon(z_n + 0)}}.$$

Для узагальнення асимптотичного аналізу коефіцієнтів розсіювання, коли кількість розривів у функції діелектричної проникності довільна, введемо позначення добутку двох матриць у виразі (17)

$$\Gamma(x_n, \varepsilon(z_n + 0), \varepsilon(z_n - 0), k) := \tilde{\Lambda}(\varepsilon'(z_n - 0), k) \tilde{\Lambda}^{-1}(\varepsilon''(z_n + 0), k), \quad (18)$$

за послідовним перемноженням яких для кожної наступної точки z_n можна встановити взаємозв'язок між коефіцієнтами розсіювання на будь-яких двох інтервалах.

Беручи до уваги умову на безмежності $E(k, z) \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \exp(-ikz)$ та сталий характер функції діелектричної проникності на крайніх інтервалах за умовами задачі, задамо значення коефіцієнтів розсіювання на крайньому правому інтервалі як $\tilde{a}_{N+2}(k) = 1$ та $\tilde{b}_{N+2}(k) = 0$. Послідовним перемноженням матриць (18) отримаємо тотожність, яка визначає коефіцієнти розсіювання на крайньому лівому інтервалі:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_0(k) \\ \tilde{b}_0(k) \end{bmatrix} = \left(\prod_{n=1}^{N+1} \Gamma(x_n, \varepsilon(x_n + 0), \varepsilon(x_n - 0), k) \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Із аналізу залежності (19) можна зробити важливі висновки про характер ВЧ поведінки компонент коефіцієнтів розсіювання та коефіцієнта відбиття.

Оскільки регулярна компонента діелектричної проникності має заникальний асимптотичний характер коефіцієнтів розсіювання $a_{reg}(k) = 1 + O(1/k)$ та $b_{reg}(k) = O(1/k)$, то коефіцієнт відбиття у ВЧ області

$$R(k) = R_{as}(k) + O(1/k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (20)$$

де ВЧ компоненту визначає відношення $R_{as}(k) = \tilde{b}_0(k)/\tilde{a}_0(k)$. Коефіцієнт $R_{as}(k)$ залежить тільки від наявності, розташування та характеру розривів у функції діелектричної проникності.

ВЧ компоненти коефіцієнтів розсіювання є скінченними тригонометричними рядами $\tilde{a}_0(k) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ikv_l)$ та $\tilde{b}_0(k) = \sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ikv_l)$, де L – кількість членів ряду, що залежить від кількості розривів у функції діелектричної проникності; α_l , β_l та v_l – коефіцієнти рядів. Крім того, компонента $R_{as}(k)$ є нескінченним збіжним тригонометричним рядом:

$$R_{as}(k) = \frac{\tilde{b}_0(k)}{\tilde{a}_0(k)} = \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ikv_l)}{\sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ikv_l)} = \sum_{m=1}^{\infty} r_m \exp(ik\tau_m), \quad (21)$$

де r_m та τ_m – коефіцієнти ряду.

За відсутності розривів у функції діелектричної проникності коефіцієнт $R_{as}(k) = 0$, що випливає з рівності нулю коефіцієнта $B_n = 0$ у виразі (17). Неперервна частина функції діелектричної проникності на інтервалах між точками розриву визначає тільки низькочастотні швидкозникальні компоненти коефіцієнта відбиття та коефіцієнтів розсіювання. Тому коефіцієнт відбиття можна записати як суму цих двох компонент:

$$R(k) = R_{reg}(k) + R_{as}(k), \quad (22)$$

де $R_{reg}(k)$ – регулярна компонента, залежна від неперервної частини діелектричної проникності.

Розв’язок оберненої задачі розсіювання. Аналітичний характер розв’язків системи 3–Ш відіграє ключову роль під час розв’язання ОЗР для неперервної функції потенціалу. Властивість аналітичності можна використати, розкладаючи в ряд Неймана розв’язки рівняння 3–Ш (10). Зокрема, функції $\exp(ikx)\phi(k, x)$ та $\exp(-ikx)\psi(k, x)$ є аналітичними у верхній комплексній півплощині $\text{Im}(k) \geq 0$, а $\exp(-ikx)\bar{\phi}(k, x)$ та $\exp(ikx)\bar{\psi}(k, x)$ – у нижній півплощині $\text{Im}(k) \leq 0$ [11].

Взаємозв’язок між функціями, аналітичними у верхній та нижній комплексних півплощинах, дає задача Гілберта–Рімана [6, 11]:

$$\begin{bmatrix} 1 & -b^*(k)e^{-2ikx} \\ 0 & -a(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-ikx)\bar{\phi} \\ \exp(ikx)\bar{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a^*(k) \\ -1 & b(k)e^{2ikx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(ikx)\phi \\ \exp(-ikx)\psi \end{bmatrix} \quad (23)$$

Розв’язок цієї задачі відносно функцій $\psi(x, k)$ та $\bar{\psi}(x, k)$ можна записати через оператори перетворення [1] з ядрами $K_1(x, s)$ та $K_2(x, s)$, які є розв’язками системи інтегральних рівнянь [6]

$$\begin{cases} K_2(x, y) = \int_{-y}^x G(y+t)K_1(x, t)dt, \\ K_1(x, y) = G(x+y) + \int_{-y}^x G(y+t)K_2(x, t)dt, \end{cases} \quad (24)$$

де $G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k)\exp(ikx)dk$ – перетворення Фур’є від коефіцієнта відбиття.

Шуканий потенціал у системі 3–Ш можна виразити через розв’язок $K_1(x, x)$ системи (24)

$$q(x) = -2K_1(x, x), \quad (25)$$

а невідому функцію діелектричної проникності – через знайдений потенціал $q(x)$:

$$\varepsilon(x) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^x q(x')dx'\right). \quad (26)$$

Описану процедуру розв’язання ОЗР реалізовано чисельно [12] та показано її ефективність, коли невідома діелектрична проникність є неперервна: $\varepsilon(z) \in \mathbb{C} | z \in (-\infty, +\infty)$. Встановлення кусково-неперервної функції $\varepsilon(z) \in \mathbb{C} | z \in (z_{n-1}, z_n)$ потребує додаткового вивчення.

Беручи до уваги, що ВЧ компонента $R_{as}(k)$ коефіцієнта відбиття для задачі з кусково-неперервною функцією $\varepsilon(z) \in \mathbb{C} | z \in (z_{n-1}, z_n)$ є безмежним тригонометричним рядом (21), перетворення Фур'є в обчисленні ядра $G(x)$ міститиме ряд з безмежною кількістю дельта-функцій:

$$G(x) = G_{reg}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \delta(x - \tau_m), \quad (27)$$

де $G_{reg}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{reg}(k) \exp(ikx) dk$ – перетворення Фур'є від зникальної компоненти коефіцієнта відбиття.

Розв'язання системи інтегральних рівнянь (24) з ядром (27) вимагає оцінки інтеграла $\int_{-y}^x \delta(y+t-\tau) K(x,t) dt$, в якому підінтегральна функція містить дельта-

функцію зі змінним аргументом і межі інтегрування є також змінні. Однозначне знаходження такого інтеграла неможливе [13]. Це вказує на неможливість застосувати процедуру розв'язання ОЗР методом інтегральних рівнянь (24)–(26) для випадків, коли шукана функція діелектричної проникності має розриви.

Згідно з умовою задачі, область визначення коефіцієнта відбиття завжди обмежена відрізком частот $\Omega_{\min} \leq \omega \leq \Omega_{\max}$, на якому вимірюють. Тому ядро $G(x)$

можна знайти лише наближено: $\hat{G}_{low}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\min} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}^{\Omega_{\max} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} R(k) \exp(ikx) dk$. Така

оцінка функції $G(x)$ міститиме лише неперервну апроксимацію дельта-функцій, а отже, використання функції $\hat{G}_{low}(x)$ як наближення ядра $G(x)$ для розв'язку ОЗР методом інтегральних рівнянь має певне теоретичне підґрунтя. Для прикладу наведено оригінал функції діелектричної проникності (рис. 2a) та результат її реконструкції (рис. 2b) методом інтегральних рівнянь. Вихідними тут є значення коефіцієнта відбиття, що заданий на сітці частот $f = 2\pi\omega$ від 0 до 60 GHz з кроком 200 MHz.

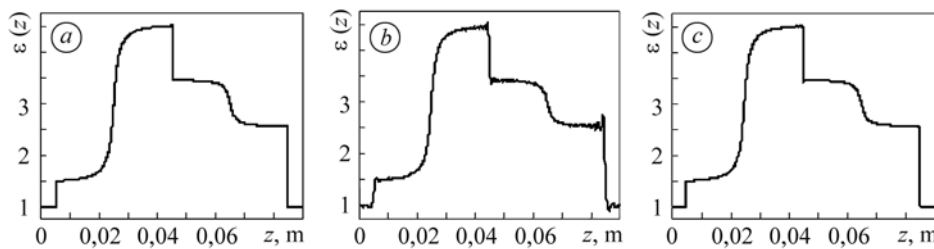


Рис. 2. Оригінал кусково-неперервної функції діелектричної проникності (a) та розв'язки оберненої задачі розсіювання, отримані методом інтегральних рівнянь (b) та запропонованим апроксимаційним підходом (c).

Fig. 2. An original of a piecewise-continuous function of dielectric permittivity (a) and solutions of the inverse problem, obtained by the direct application of the integral equation method (b) and by proposed approximation approach (c).

Значні спотворення під час встановлення діелектричної проникності проявляються у точках, де вона терпить розрив (рис. 2b). Тому пошук ефективнішої апроксимації ядра $G(x)$ неперервною функцією – окрема задача. Для цього за-

мість ядра $G(x)$ використаємо його апроксимацію $\hat{G}_{high}(x)$, в якій дельта-функції замінено їх неперервним наближенням $\delta_a(x) = (s\sqrt{\pi})^{-1} \exp(-x^2/s^2)$ при $s \rightarrow 0$. Так можна контролювати точність, вибираючи параметр s .

Для реалізації такого апроксимаційного підходу необхідно оцінити значення коефіцієнтів r_m та τ_m за ВЧ поведінкою коефіцієнта відбиття $R_{as}(k)$. Оскільки кількість цих параметрів безмежна, а r_m – коефіцієнти збіжного ряду, то задача визначення всіх таких коефіцієнтів некоректна через похибки у вихідних даних. Тому запропоновано параметризувати ВЧ частину коефіцієнта відбиття згідно з виразом (21), а апроксимувати у вигляді фільтраційної схеми

$$\hat{G}_{high}(x) = G_{reg}(x) + \delta_a(x) * \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{l=1}^L \beta_l \exp(ikv_l)}{\sum_{l=1}^L \alpha_l \exp(ikv_l)} \exp(ikx) dk \right), \quad (28)$$

де * – оператор згортки.

Перевагою такого підходу є те, що чисельне інтегрування у виразі (28) можна здійснювати, вибравши межі інтегрування довільно великими, оскільки підінтегральна функція задана параметрично і її можна обчислити для будь-якого значення k .

Як видно з виразу (28), задача оцінки безмежної кількості коефіцієнтів r_m та τ_m у рівнянні (27) зводиться до тривіальної задачі спектрального аналізу, яка полягає у визначенні скінченної кількості коефіцієнтів α_l , β_l та v_l за функціями $\tilde{a}_0(k)$ та $\tilde{b}_0(k)$. Задачу обчислення коефіцієнтів $\tilde{a}_0(k)$ та $\tilde{b}_0(k)$ за відомим значенням $R_{as}(k) = \tilde{b}_0(k)/\tilde{a}_0(k)$ розв'язано методом, описаним раніше [14].

Підтверджує достовірність та ефективність запропонованого підходу встановлення кусково-неперервної функції діелектричної проникності результат чисельного моделювання (рис. 2c). Для реконструкції діелектричної проникності використано апроксимацію ядра $G(x)$ у системі рівнянь (24), що базується на параметризованому зображенні ВЧ компоненти коефіцієнта відбиття. Як бачимо, розриви у функції діелектричної проникності встановлені з набагато більшою точністю, ніж коли безпосередньо застосовували метод розв'язання інтегральних рівнянь (рис. 2b).

ВИСНОВОК

Асимптотичний аналіз розв'язків системи 3–Ш (5), яка є еквівалентною моделлю поширення плоскої електромагнетної хвилі у шаруватому діелектричному матеріалі (1), показав можливість розділення коефіцієнтів розсіювання та відбиття на дві компоненти. Встановлено, що ВЧ компоненту, спричинену розривами у функції діелектричної проникності, можна виразити скінченним тригонометричним рядом. Заникальна з частотою компонента залежить лише від характеру поведінки діелектричної проникності на інтервалах між точками розриву. Виділення ВЧ компоненти коефіцієнта відбиття та її параметризація відношенням двох скінченних тригонометричних рядів дає можливість екстраполювати вихідні дані для довільно великого значення частоти. Отже, вдається отримати кращу апроксимацію Фур'є-перетворення коефіцієнта відбиття, а також уникнути дельта-функцій у ядрі системи інтегральних рівнянь, розв'язуючи сформульовану ОЗР.

Некоректність задачі, зумовлена характером вихідних даних (коефіцієнт відбиття задано для обмеженого діапазону частот), вказує на неможливість знаходження її точного розв'язку та доцільність пошуку його наближень. Викладений

підхід до апроксимації ядра у системі інтегральних рівнянь і числову реалізацію її розв'язку можна трактувати як ефективний спосіб регуляризації такої задачі.

РЕЗЮМЕ. Определены материальные параметры диэлектрических покрытий по измеренным значениям рассеянного электромагнитного поля, что послужит предусловием внедрения эффективной обработки результатов измерений в средствах неразрушающего контроля. Особенность предложенного метода решения сформулированной обратной задачи состоит в возможности реконструкции кусочно-непрерывного профиля диэлектрической проницаемости для плоских материалов. В основе реконструкции – метод интегральных уравнений, а решение задачи получено в приближенной форме. Измеренные значения коэффициента отражения плоской электромагнитной волны экстраполированы в высокочастотной области, что позволило достичь высшей точности реконструкции функции диэлектрической проницаемости исследуемых структур.

SUMMARY. The problem of dielectrics parameters evaluation starting from measured values of scattered electromagnetic field is considered for a case of plane layered structures. Solution of the problem stipulates the implementation of efficient measurement data processing in tools of non-destructive evaluation. A peculiarity of the proposed solution of mathematically formulated inverse scattering problem consists in capability to reconstruct a piecewise-continuous permittivity of plane layered materials. An approximated solution of this problem is derived from one of a set of integral equations. A thorough mathematical analysis allows to make extrapolation of the measured function of plane electromagnetic wave reflection coefficient for high frequencies, what consequently results in significant increase of the accuracy of permittivity profile reconstruction in the analysis of dielectric structures of interests.

1. *Марченко В. А.* Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн // Докл. АН СССР. – 1955. – **104**, № 5. – С. 695–698.
2. *Gel'fand I. M. and Levitan B. M.* On the determination of a differential equation by its spectral function // *Izvestiya AN SSSR, ser. mathem.* – 1951. – **15**, № 4. – P. 309–360.
3. *Khruslov E. Ya. and Shepelsky D. G.* Review article: Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // *Inverse problems.* – 1994. – **10**, № 1. – P. 1–37.
4. *Burridge R.* The Gelfand-Levitan, the Marchenko, and the Gopinath-Sondhi integral equations of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // *Wave Motion.* – 1980. – № 2. – P. 305–323.
5. *Jaulen M.* The inverse scattering problem for LCRG transmission lines // *J. of Mathematical Physics.* – 1982. – **23**, № 12. – P. 2286–2290.
6. *Zakharov V. E. and Shabat A. B.* Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media // *J. Exp. Theor. Physics.* – 1971. – **61**, № 1 (7). – P. 118–134.
7. *Gladwell G. M. L.* *Inverse Problems in Scattering: An Introduction.* – Springer, 1993. – 380 p.
8. *Aktosun T., Klaus M., and van der Mee C.* Recovery of discontinuities in a non-homogeneous medium // *Inverse Problems.* – 1996. – **12**, № 1. – P. 1–25.
9. *Aktosun T., Klaus M., and Van Der Mee C.* Inverse wave scattering with discontinuous wave speed // *J. of Mathematical Physics.* – 1995. – **36**, № 6. – P. 2880–2928.
10. *Grinberg N. I.* The inverse scattering problem for the wave equation on the line with discontinuous velocity // *Russ. Math. Surv.* – 1988. – **43**, № 5. – P. 231–232.
11. *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems / M. Ablowitz, J. Kaup, A. Newell, and H. Segur // Studies in Appl. Math.* – 1974. – **53**, № 4. – P. 249–315.
12. *Modelski J. and Synyavskyy A.* A New Numerical Method For Zakharov-Shabat's Inverse Scattering Problem Solution // XVI Intern. Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications, MIKON'2006. – Krakow, 2006. – **1**. – P. 191–194.
13. *Albeverio S., Hryniv R., and Mykytyuk Ya.* Inverse scattering for discontinuous impedance Schrodinger operators: a model example (preprint). – 2010. – P. 1–8.
14. *Назарчук З. Т., Снявський А. Т.* Визначення характеристик шаруватої структури за реконструйованою з коефіцієнтів відбиття матрицею розсіювання // *Радиофизика и радиоастрономия.* – 2010. – **15**, № 3. – С. 295–313.

Одержано 12.10.2010