

УДК 539.3

АНТИСИМЕТРИЧНИЙ РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ГОСТРИМ АБО ЗАКРУГЛЕНИМ КУТОВИМ ВИРІЗОМ*М. П. САВРУК^{1,2}, А. КАЗБЕРУК²*¹ *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*² *Білостоцька політехніка, Польща*

Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок плоскої задачі теорії пружності для площини з напівнескінченим кутовим закругленим вирізом за антисиметричного навантаження. На цій основі знайдено залежності між коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого кутового вирізу, максимальними напруженнями на межовому контурі або градієнтом напружень у вершині відповідного кутового закругленого вирізу та радіусом її закруглення. Показано, що такі залежності неоднозначні: для однакової кривини у вершині вирізу вони значно відрізняються для різних форм її околу. Для скінчених тіл з кутовими вирізами отримані розв'язки є асимптотичними залежностями для малих радіусів закруглення їх вершин. Такі співвідношення можна використовувати в граничних переходах для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі розв'язків для відповідних закруглених концентраторів напружень.

Ключові слова: *механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, кутовий виріз, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

У механіці руйнування останнім часом значну увагу приділяють вивченню процесів деформування та руйнування твердих тіл з кутовими вирізами. Це стосується як гострих вирізів, які в лінійній теорії пружності зумовлюють нескінченні напруження, так і закруглених чи затуплених з великою кривиною у вершині, що призводить навіть за низьких навантажень до суттєвих напружень (більших за границю міцності матеріалу) та не дає змоги оцінити їх міцність за допомогою класичних критеріїв. На сьогодні найбільш досліджено кутові вирізи за симетричного навантаження, коли максимальні напруження досягаються у вершині вирізу. Розроблено єдиний підхід до розв'язування такого класу задач [1–6], коли коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого вирізу знаходять на основі даних про концентрацію напружень у вершинах відповідних закруглених кутових вирізів (не дуже малого радіуса кривини), які можна отримати різними методами.

Нижче розроблено єдиний підхід до розв'язування антисиметричних плоских задач теорії пружності для тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами. Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок задачі для нескінченного закругленого кутового вирізу у пружній площині. На цій основі побудовано залежності між КІН \tilde{K}_{II}^V у вершині гострого кутового вирізу, максимальними напруженнями на межовому контурі або градієнтом напружень у вершині відповідного закругленого вирізу та радіусом її закруглення. Такі залежності для обмежених тіл мають асимптотичний характер, коли радіус кривини у вершині вирізу прямує до нуля, що дає змогу їх використати для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі даних для закруглених вирізів.

Розподіл напружень у пружному тілі з кутовим вирізом за антисиметричного навантаження. У механіці руйнування важливе значення мають дослідження поля напружень і переміщень в околі вершини гострого кутового вирізу, на гранях якого задано різні крайові умови. Вільямс [7] дав повне розв'язання розв'язку для клина за власними функціями для різних крайових умов на його гранях. Розглянемо детальніше антисиметричний розподіл напружень в околі кутового вирізу (грані якого вільні від напружень) у пружній ізотропній площині в умовах плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація та плоский напружений стан). Сингулярному розподілу напружень у клині відповідає власний розв'язок крайової задачі, який через комплексні потенціали напружень Колосова–Мухелішвілі [8] можна подати у вигляді [9]

$$\Phi_0(z) = \frac{i\tilde{K}_{II}^V \sin 2\alpha}{(2\pi z)^{\lambda_{II}} B(\lambda_{II})}, \quad \Psi_0(z) = \frac{i\tilde{K}_{II}^V \sin 2\lambda_{II}\alpha}{(2\pi z)^{\lambda_{II}} B(\lambda_{II})}, \quad (1)$$

де \tilde{K}_{II}^V – (узагальнений) КІН у вершині клина за антисиметричного розподілу напружень; $\alpha = \pi - \beta$; 2β ($0 \leq 2\beta < \pi$) – кут розхилу вирізу; r, θ – полярні координати з полюсом у вершині вирізу (див. схему на рис. 1); $z = x + iy = r \exp(i\theta)$; $B(\lambda_{II}) = \sin 2\lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha$; параметр λ_{II} ($0 < \lambda_{II} \leq 1$) – корінь характеристичного рівняння

$$(1 - \lambda_{II}) \sin 2\alpha - \sin 2(1 - \lambda_{II})\alpha = 0. \quad (2)$$

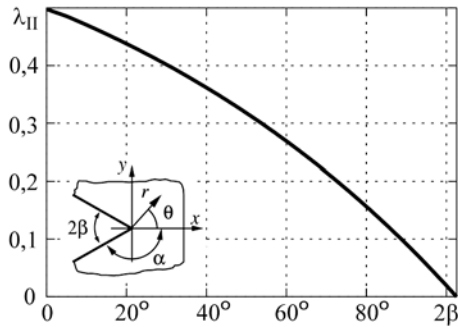


Рис. 1. Залежність показника особливості напружень λ_{II} у вершині гострого кутового вирізу від кута розхилу 2β .

Fig. 1. Dependence of stress singularity exponent at V-notch vertex, λ_{II} , on opening angle 2β .

За допомогою співвідношень [8]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \sigma_{rr} - i\tau_{r\theta} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - z\Phi'(z) - \frac{z}{\bar{z}}\Psi(z) \end{aligned}$$

та потенціалів (1) знайдемо сингулярний розподіл напружень у полярній системі координат у пружному клині за антисиметричного навантаження [10, 11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[(1 + \lambda_{II}) \sin \lambda_{II}\alpha \sin(2 - \lambda_{II})\theta + (2 + \lambda_{II}) \sin(2 - \lambda_{II})\alpha \sin \lambda_{II}\theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[(\lambda_{II} - 2) \sin \lambda_{II}\alpha \sin(2 - \lambda_{II})\theta + (2 - \lambda_{II}) \sin(2 - \lambda_{II})\alpha \sin \lambda_{II}\theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[(2 - \lambda_{II}) \sin \lambda_{II}\alpha \cos(2 - \lambda_{II})\theta - \lambda_{II} \sin(2 - \lambda_{II})\alpha \cos \lambda_{II}\theta \right], \quad (3) \end{aligned}$$

де $\Delta_2 = (2 - \lambda_{II}) \sin \lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin(2 - \lambda_{II})\alpha$.

Відповідні зображення компонент вектора переміщень у клині мають вигляд

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\tilde{K}_{II}^V r}{2G(1-\lambda_{II})\Delta_2(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left[(2-\lambda) \sin \lambda_{II} \alpha \sin(2-\lambda)\theta + \right. \\ &\quad \left. + (\kappa-1+\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II}) \alpha \sin \lambda_{II} \theta \right], \\ u_\theta &= \frac{\tilde{K}_{II}^V r}{2G(1-\lambda_{II})\Delta_2(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left[(2-\lambda_{II}) \sin \lambda_{II} \alpha \cos(2-\lambda_{II})\theta + \right. \\ &\quad \left. + (\kappa+1-\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II}) \alpha \cos \lambda_{II} \theta \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ – для плоскої деформації, $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ – для плоского напруженого стану; μ – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву.

КІН \tilde{K}_{II}^V виражають через дотичні напруження на бісектрисі клина $\tau_{r\theta}(r, 0)$ за допомогою співвідношення $\tilde{K}_{II}^V = \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\theta}(r, 0)]$. Зауважимо, що його можна подати також через градієнт колового напруження на бісектрисі клина $\partial\sigma_{\theta\theta}(r, 0)/\partial\theta$ за формулою

$$\tilde{K}_{II}^V = - \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{(2\pi r)^{\lambda_{II}}}{2-\lambda_{II}} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}(r, 0)}{\partial\theta} \right]. \quad (5)$$

У літературі КІН у вершині кутового вирізу також називають дещо іншу величину: $K_{II}^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_{II}} \tilde{K}_{II}^V$.

Напруження (3) у вершині клина мають степеневу особливість з показником λ_{II} для кутів розхилу $\beta < \beta^*$ ($\beta^* = 0,8945(51,2733^\circ)$), а коли кут $\beta \rightarrow \beta^*$, ця особливість зникає ($\lambda_{II} \rightarrow 0$) (рис. 1). Кут β^* – корінь рівняння $\operatorname{tg}2(\pi - \beta) = 2(\pi - \beta)$, яке можна отримати з рівності (2), спрямувавши параметр λ_{II} до нуля [12–14]. Для його визначення можна користуватися апроксимувальною формулою [6]

$$\lambda_{II} \approx 0,5 - 0,3134\operatorname{tg}\beta - 0,2479\operatorname{tg}^2\beta + 0,1937\operatorname{tg}^3\beta - 0,0410\operatorname{tg}^4\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 0,8945,$$

максимальна абсолютна похибка якої не перевищує 0,001.

У граничному випадку, коли $\beta \rightarrow \beta^*$ ($\lambda_{II} \rightarrow 0$), комплексні потенціали

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= iC + \frac{\theta \sin 2\alpha^*}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V, \quad z\Phi'_0(z) = -\frac{i \sin 2\alpha^*}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V, \\ \Psi_0(z) &= \frac{2i\alpha^*}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V, \quad \alpha^* = \pi - \beta^* \end{aligned}$$

та напруження у клині

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\alpha^* \sin 2\theta + 2\theta \sin 2\alpha^*}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2\theta \sin 2\alpha^* - 2\alpha^* \sin 2\theta}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2\alpha^* \cos 2\theta - \sin 2\alpha^*}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V \end{aligned} \quad (6)$$

не залежать від радіальної координати r , а тільки від кута θ . Тут C – дійсна стала, яка не впливає на напружений стан у клині. Дотичні напруження на бісектрисі клина сталі: $\tau_{r\theta}(r, 0) = \tilde{K}_{II}^V$.

Напівнескінченний закруглений кутовий виріз у пружній площині. Для використання граничного переходу від закруглених до гострих вирізів потрібно знати асимптотичну залежність між коефіцієнтами концентрації та інтенсивності напружень (для відповідних кутових вирізів), коли радіус кривини у вершині закругленого вирізу прямує до нуля. Вперше такі залежності за антисиметричного розподілу напружень отримано методом інтегральних рівнянь Шермана–Лаурічелли [8] для гіперболічного вирізу [9]. Нижче побудовано таку залежність для закругленого кутового вирізу, а також знайдено зв'язок між градієнтом колових напружень та КІН у вершинах закругленого та гострого вирізів. Такий зв'язок полегшує знаходження КІН у тілах з кутовими вирізами за допомогою граничного переходу від закруглених до гострих вирізів, оскільки колові напруження за антисиметричного їх розподілу досягають максимальних значень не у вершині вирізу, а на певній віддалі від неї, залежній від кута розхилу вирізу. Це особливо характерне для мішаного навантаження, коли КІН \tilde{K}_I^V та \tilde{K}_{II}^V відмінні від нуля.

Нехай пружна площина послаблена гострим кутовим вирізом з вершиною в початку координат і кутом розхилу 2β ($0 \leq \beta < \pi/2$) (рис. 2a). Вважатимемо, що напружений її стан описують комплексні потенціали $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ (1), які забезпечують відсутність напружень на контурі вирізу L_0 . Розглянемо гладкий контур L , який складається з прямолінійних ділянок, паралельних до граней клина L_0 , та дуги кола радіуса ρ з центром у його вершині. На цьому контурі знайдемо вектор нормальних (σ_n^0) і дотичних (τ_{ns}^0) напружень:

$$\sigma_n^0 + i\tau_{ns}^0 = \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t\overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] = -p(t), \quad t \in L.$$

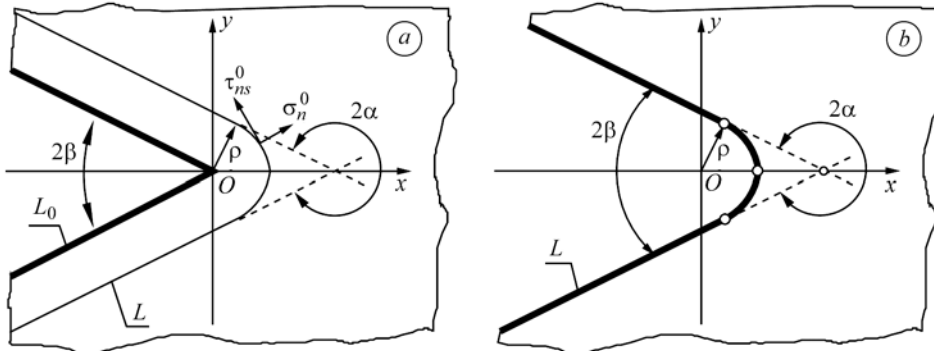


Рис. 2. Гострий (a) та закруглений (b) кутові вирізи у площині.

Fig. 2. Sharp (a) and rounded (b) V-shaped notches in the plane.

Тепер розглянемо у площині закруглений кутовий виріз такого ж кута розхилу з контуром L , вільним від напружень (рис. 2b). Нехай на нескінченності заданий асимптотичний розподіл напружень, який визначають потенціали $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ (1). Крайову задачу для такої області розв'язуватимемо методом суперпозиції. Подамо потенціали напружень задачі у вигляді

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z),$$

де $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ – функції Колосова–Мусхелішвілі, що описують збурений напружений стан, викликаний зробленим у клині закругленим кутовим вирізом L .

Для знаходження збуреного напруженого стану необхідно розв'язати крайову задачу для пружної площини, що містить закруглений кутовий виріз, на контурі L якого виконується крайова умова

$$\sigma_n + i\tau_{ns} = p(t), \quad t \in L,$$

а на нескінченності напруження відсутні.

Оскільки напруження на нескінченності зникають, то вказаний збурений стан можна отримати також у площині з гладкою симетричною криволінійною тріщиною вздовж контуру L (рис. 3), довжина якої прямує до нескінченності, а її береги завантажені самозрівноваженими напруженнями

$$\sigma_n^+ + i\tau_{ns}^+ = \sigma_n^- + i\tau_{ns}^- = p(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

де верхні індекси вказують на граничні значення на контурі L відповідних величин за підходу до нього зліва (+) або справа (–). Саме таким способом і знайдемо розв'язок поставленої задачі.

Задачу про розподіл напружень у пружній площині з криволінійною тріщиною розв'язуватимемо методом сингулярних інтегральних рівнянь [15]. Інтегральне зображення розв'язку візьмемо у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(t)}}{t-z} dt - \frac{\overline{t}g'(t)}{(t-z)^2} dt \right], \quad (8)$$

де невідома функція $g'(t)$ – похідна вектора стрибка переміщень на контурі тріщини.

Використовуючи потенціали (8) і задовольняючи крайові умови (7), отримуємо сингулярне інтегральне рівняння задачі [15]

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[K(t,t')g'(t)dt + L(t,t')\overline{g'(t)}d\overline{t} \right] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (9)$$

де

$$K(t,t') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-t'} + \frac{1}{\overline{t}-\overline{t'}} \frac{d\overline{t}'}{dt'} \right), \quad L(t,t') = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\overline{t}-\overline{t'}} + \frac{t-t'}{(\overline{t}-\overline{t'})^2} \frac{d\overline{t}'}{dt'} \right).$$

Єдиний його розв'язок у класі функцій з інтегровою особливістю на кінцях контуру інтегрування існує за додаткової умови

$$\int_L g'(t)dt = 0, \quad (10)$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини.

Запишемо параметричне рівняння контуру тріщини (у граничному випадку, коли її довжина прямує до нескінченності) у вигляді

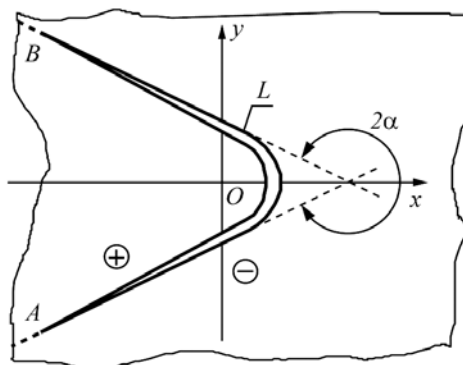


Рис. 3. Криволінійна тріщина в площині вздовж контуру закругленого кутового вирізу.

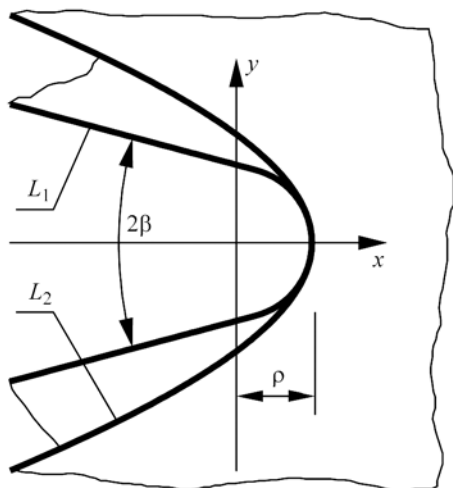
Fig. 3. A curvilinear crack in the plane along the contour of a rounded V-notch.

$$t = \rho\omega(\xi), \quad -1 < \xi < 1, \quad (11)$$

де ρ – радіус дугової ділянки;

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \sin \beta + (\zeta + \zeta_B) \cos \beta - i [\cos \beta - (\zeta + \zeta_B) \sin \beta], & -\infty < \zeta < -\zeta_B, \\ \cos \zeta + i \sin \zeta, & -\zeta_B \leq \zeta \leq \zeta_B, \\ \sin \beta - (\zeta - \zeta_B) \cos \beta + i [\cos \beta + (\zeta - \zeta_B) \sin \beta], & \zeta_B < \zeta < \infty, \end{cases} \quad (12)$$

де $\zeta = \xi/(1-\xi^2)^\gamma$; $\zeta_B = \pi/2 - \beta$ – кутова координата θ точки контуру L , в якій дуга кола переходить у прямолінійну ділянку. Параметр γ – довільне додатне число.



Його значення вибирають на підставі числових експериментів так, щоб дістати якомога кращу збіжність розв'язку (тут взято $\gamma = 3/2$).

Рис. 4. Порівняння конфігурацій контурів L_1 (кутовий закруглений виріз) та L_2 (гіперболічний) з однаковими кутами розхилу $2\beta = \pi/6$ та радіусами закруглення вирізів у вершині вирізу ρ .

Fig. 4. Comparison of configurations of contour L_1 (rounded V-notch) and L_2 (hyperbolic) with the same opening angles $2\beta = \pi/6$ and rounded vertex radii ρ .

Паралельно розглянемо також аналогічну задачу для гіперболічного вирізу, яку раніше [9] вже розв'язували методом інтегральних рівнянь Шермана–Лаурічелли. Тут параметричне рівняння має вигляд

$$t = \rho\omega(\xi), \quad \omega(\xi) = \frac{e^{i\xi\alpha} \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos \alpha \xi} + \frac{1}{2} \cot^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = \pi - \beta, \quad -1 < \xi < 1. \quad (13)$$

Вершини обох вирізів лежать у точці $z = \rho$ (рис. 4).

Використавши співвідношення (11) та заміну $t' = \rho\omega(\eta)$, зведемо рівняння (9) і (10) до канонічної форми:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [M(\xi, \eta)\varphi(\xi) + N(\xi, \eta)\overline{\varphi(\xi)}] d\xi = p(\eta), & -1 \leq \eta \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi)\omega'(\xi)d\xi = 0, \end{cases} \quad (14)$$

де

$$\varphi(\xi) = g'(\rho\omega(\xi)); \quad M(\xi, \eta) = \rho\omega'(\xi)K(\rho\omega(\xi), \rho\omega(\eta)); \quad N(\xi, \eta) = \overline{\rho\omega'(\xi)}L(\rho\omega(\xi), \rho\omega(\eta)).$$

Невідому функцію $\varphi(\xi)$ шукатимемо у класі функцій, обмежених на кінцях інтервалу інтегрування:

$$\varphi(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} u(\xi).$$

Числовий розв'язок інтегрального рівняння (14) знайдемо методом квадратур, використавши квадратурні формули Гаусса–Чебишова (див. напр., [16, 17]).

У результаті приходимо до комплексної системи $2n$ лінійних алгебричних рівнянь відносно $2n$ невідомих $u(\xi_k)$ ($k = \overline{1, 2n}$):

$$\begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} w_k [M(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + N(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] = p(\eta_m), & m = 1, \dots, 2n-1, \\ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} w_k \omega'(\xi_k) u(\xi_k) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

де

$$\xi_k = \cos \frac{\pi k}{2n+1}; \quad w_k = \sin^2 \frac{\pi k}{2n+1} = 1 - \xi_k^2; \quad \eta_m = \cos \frac{\pi(2m+1)}{2(2n+1)}.$$

Враховавши умову антисиметрії задачі

$$u(-\xi) = \overline{u(\xi)}, \quad (16)$$

зменшимо в два рази порядок системи (15):

$$\begin{cases} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n w_k \{ [M(\xi_k, \eta_m) + N(-\xi_k, \eta_m)] u(\xi_k) + \\ + [N(\xi_k, \eta_m) + M(-\xi_k, \eta_m)] \overline{u(\xi_k)} \} = p(\eta_m), & m = 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{2n+1} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n w_k \{ [M(\xi_k, 0) + N(-\xi_k, 0)] u(\xi_k) + \\ + [N(\xi_k, 0) + M(-\xi_k, 0)] \overline{u(\xi_k)} \} = \operatorname{Im} p(0), \\ \frac{1}{2n+1} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n w_k \omega'(\xi_k) u(\xi_k) = 0. \end{cases}$$

Тут враховано рівності $\omega'(\xi) = -\overline{\omega'(-\xi)}$, $\xi_{2n-k+1} = -\xi_k$, а також те, що на осі Ox ($\eta_n = 0$) внаслідок антисиметрії нормальні напруження відсутні ($\operatorname{Re} p(0) = 0$).

Узявши до уваги той факт, що контур вирізу вільний від навантаження ($\sigma_n = \tau_{ns} = 0$) і сума нормальних напружень є інваріантом, тобто $\sigma_n + \sigma_s = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$, для напруження σ_s отримуємо формулу

$$\sigma_s = 4 \operatorname{Re} [\Phi_0(t) + \Phi_*^-(t)],$$

яка в нових змінних набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_s^-(\eta) &= \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}} \operatorname{Re} \left[\frac{4i}{(\omega(\eta))^{\lambda_{II}}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha} - \frac{2iu(\eta)\sqrt{1-\eta^2}}{\omega'(\eta)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2} u(\xi)}{\omega(\xi) - \omega(\eta)} d\xi \right] = \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}} R_{II}(\eta). \end{aligned}$$

За виконання умови антисиметрії (16) безрозмірне напруження $R_{II}(\eta_m)$ у вузлах η_m ($m = 1, \dots, n-1$) знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} R_{II}(\eta_m) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{4i}{(\omega(\eta_m))^{\lambda_{II}}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha} - 2i\sqrt{1-\eta_m^2} u(\eta_m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{2n+1} \sum_{k=1}^n w_k \left[\frac{\omega'(\xi_k) u(\xi_k)}{\omega(\xi_k) - \omega(\eta_m)} - \frac{\overline{\omega'(\xi_k) u(\xi_k)}}{\omega(\xi_k) - \omega(\eta_m)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Значення функції $u(\eta)$ у вузлах η_m отримаємо з інтерполяційної формули Лагранжа, яку після врахування умови (16) можна записати у вигляді

$$u(\eta_m) = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{1-\eta_m^2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{m+k} (1-\xi_k^2) \left[\frac{u(\xi_k)}{\eta_m + \xi_k} - \frac{u(\xi_k)}{\eta_m - \xi_k} \right] \right\}.$$

Числові результати. Напруження на контурі вирізів σ_s знайдено у вузлах η_m ($m=1, \dots, n$). Перейшовши до полярних координат r, θ з полюсом у точці $z=0$, отримуємо: $\sigma_s(\theta_m) = \sigma_s(\eta_m)$, $\theta_m = \arg(t_m)$, $t_m = \rho\omega(\eta_m)$. Залежності безрозмірного напруження $R_{II}(\theta) = -R_{II}(-\theta)$ (17) на верхній половині межового контуру від кутової координати θ ($0 \leq \theta \leq \alpha^*$) для обох вирізів за різних значень їх кутів розхилу 2β зображено на рис. 5. Зауважимо, що за антисиметричного розподілу напружень форма околу вершини вирізу значно більше впливає на максимальні напруження, ніж за симетричного [6, 19].

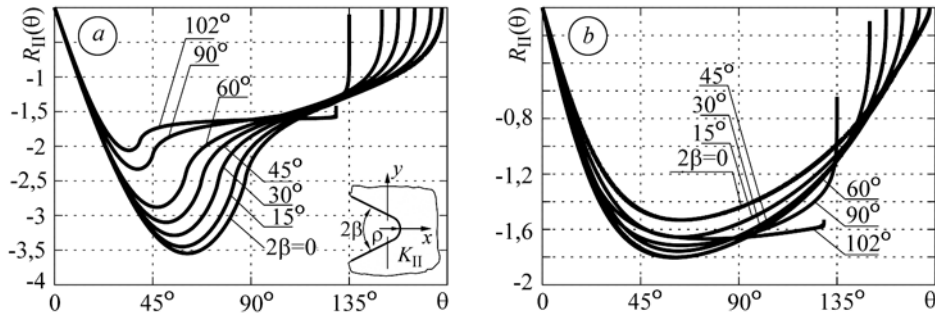


Рис. 5. Розподіл безрозмірних напружень $R_{II}(\theta)$ вздовж кутового закругленого (а) та гіперболічного (б) вирізів.

Fig. 5. Dimensionless stress, $R_{II}(\theta)$, distribution along the rounded V-notch (a) and hyperbolic notch (b).

Коли параметр $\lambda_{II} > 0$, напруження σ_s мають локальний екстремум в околі вершини вирізу і прямують до нуля на нескінченності ($\xi \rightarrow 1$). У граничному випадку, коли кут $\beta \rightarrow \beta^*$ ($\lambda_{II} \rightarrow 0$), вони на нескінченності прямують до обмеженого значення, яке збігається з напруженням $\sigma_{rr}(\alpha^*)$ (6):

$$\sigma_{rr}(\alpha^*) = \frac{3\alpha^* \sin 2\alpha^*}{2\alpha^* - \sin 2\alpha^*} \tilde{K}_{II}^V = -\frac{3\alpha^*}{\sqrt{1+4(\alpha^*)^2} + 1} \tilde{K}_{II}^V \approx -1,203.$$

Екстремальні значення безрозмірних напружень $R_{II} = R_{II}(\theta_{\max})$ (рис. 6b) досягаються в точках θ_{\max} (рис. 6a) на деякій віддалі від вершини вирізу.

Для U-подібного вирізу ($\beta = 0$) екстремальне значення безрозмірного напруження $R_{II} = -3,592$ досягається, коли $\theta = 1,082$. Отримані результати для гіперболічного вирізу добре узгоджуються для окремих значень кута розхилу 2β з відомими [9]. Коли $\beta = 0$, гіперболічний виріз переходить у параболічний, для якого відомий замкнений аналітичний розв'язок [8, 9, 18].

Аналогічно до співвідношення (5) можна отримати залежність між градієнтом колового напруження у вершині вирізу та КІН \tilde{K}_{II}^V :

$$\left. \frac{d\sigma_s(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}} \left. \frac{dR_{II}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}} R'_{II}.$$

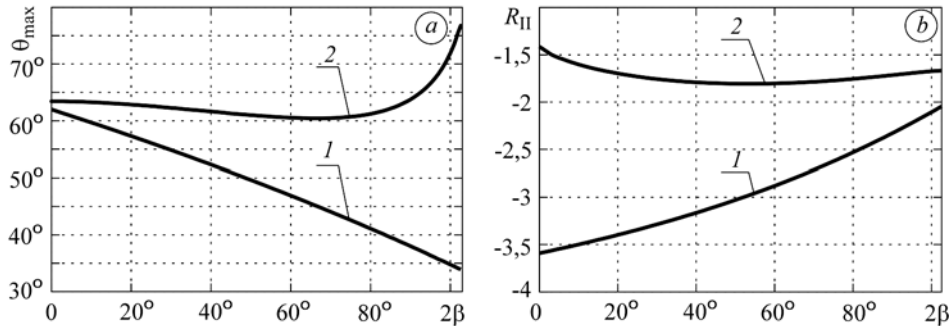


Рис. 6. Залежності кутової координати θ_{\max} (a) та відповідного безрозмірного напруження $R_{II} = R_{II}(\theta_{\max})$ (b) від кута розхилу вирізу 2β (1 – кутовий закруглений виріз, 2 – гіперболічний).

Fig. 6. Dependences of angular coordinate, θ_{\max} , (a) and corresponding dimensionless stress, $R_{II} = R_{II}(\theta_{\max})$, (b) on the opening angle 2β (1 – rounded V-notch, 2 – hyperbolic notch).

Зауважимо, що на колівій ділянці контуру кутового закругленого вирізу (12) кутова координата $\theta = \zeta$, а для гіперболічного вирізу (13) $\theta = \xi\alpha$. Для U-подібного вирізу ($\beta = 0$) маємо: $R'_{II} = -5,186$ (рис. 7).

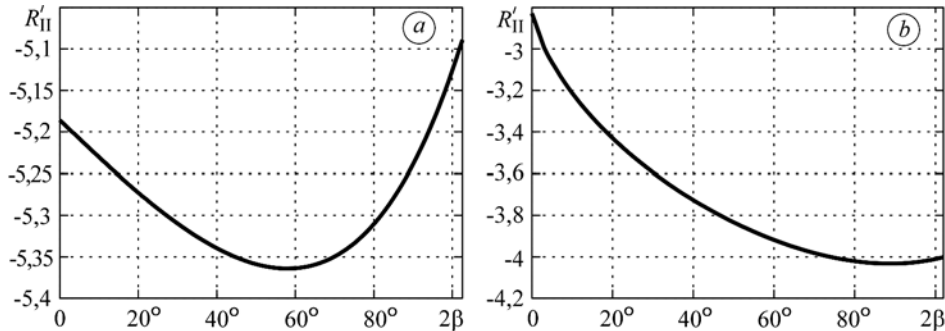


Рис. 7. Залежності безрозмірного градієнта напружень R'_{II} у вершинах кутового закругленого (a) та гіперболічного (b) вирізів від кута розхилу вирізу 2β .

Fig. 7. Dependences of dimensionless stress gradient, R'_{II} , at the vertex of the rounded V-notch (a) and the hyperbolic notch (b) on the opening angle 2β .

Відношення кутової координати точки контуру, в якій досягаються екстремальні напруження, до градієнта колівого напруження у вершині вирізу (θ_{\max} / R'_{II}) залежить від кута розхилу 2β (рис. 8). Для U-подібного вирізу ($\beta = 0$) маємо: $\theta_{\max} / R'_{II} = -0,209$.

Для симетричної області з гострим кутовим вирізом за антисиметричного навантаження КІН можна знайти за допомогою граничного переходу від відповідного закругленого вирізу, радіус закруглення якого прямує до нуля, скориставшись співвідношеннями для екстремальних значень безрозмірних напружень R_{II} (рис. 6b) або для їх градієнта R'_{II} у закругленій вершині (рис. 7). Коли ж пружна область не є симетрична щодо бісектриси кутового вирізу, то напруження на межовому контурі можуть досягати екстремальних значень на різних віддальх

від вершини вирізу залежно від відношення КІН \tilde{K}_I^V та \tilde{K}_{II}^V , що не дає змогу використати отриману залежність екстремальних напружень від радіуса закруглення ρ у вищезгаданих граничних переходах. З цією метою слід скористатися залежностями максимальних напружень [1] (симетричний розподіл) та градієнтом напружень (антисиметричний розподіл) у вершині вирізу від радіуса її закруглення. На підставі цих двох залежностей за допомогою граничного переходу, коли радіус закруглення ρ прямує до нуля, можна отримати два КІН: \tilde{K}_I^V та \tilde{K}_{II}^V .

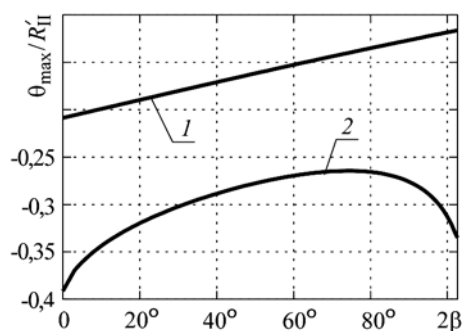


Рис. 8. Залежність відношення θ_{\max} / R'_{II} від кута розхилу вирізу 2β (1 – кутовий закруглений виріз, 2 – гіперболічний).

Fig. 8. Dependence of ratio θ_{\max} / R'_{II} on the opening angle 2β (1 – rounded V-notch, 2 – hyperbolic).

ВИСНОВКИ

Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок плоскої задачі теорії пружності для площини з вільним від зусиль нескінченним кутовим закругленим вирізом за антисиметричного навантаження на нескінченності. На цій основі знайдено залежності між коефіцієнтом інтенсивності напружень у вершині гострого вирізу, максимальним напруженням на межовому контурі або градієнтом напружень у вершині відповідного закругленого вирізу і радіусом її закруглення. Порівняння отриманого розв'язку з відповідними результатами для гіперболічного вирізу показало, що така залежність неоднозначна: за однакової кривини у вершині вирізу вона різна для різних форм її околу, причому ця різниця значно суттєвіша, ніж за симетричного навантаження. Побудовані залежності можна використати для наближеної оцінки узагальненого коефіцієнта інтенсивності напружень у вершині гострого кутового вирізу на основі даних для максимальних напружень на межовому контурі або градієнта напружень у вершині відповідного закругленого кутового вирізу за антисиметричного розподілу напружень. Отримані тут результати та відповідні розв'язки для симетричного навантаження дають змогу розробити єдиний підхід до розв'язування задач про концентрацію напружень біля гострих та закруглених вирізів за складного напруженого стану, що буде проілюстровано в наступних публікаціях авторів.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярних інтегральних уравнений получено решение плоской задачи теории упругости для плоскости с бесконечным угловым закругленным вырезом при антисимметричной нагрузке. На этой основе найдены зависимости между коэффициентом интенсивности напряжений в вершине острого углового выреза, максимальным напряжением на граничном контуре или градиентом напряжений в вершине соответствующего углового закругленного выреза и радиусом ее закругления. Показано, что такие зависимости неоднозначны: для одинаковой кривизны в вершине выреза они значительно отличаются для различных форм ее окрестности. Для конечных тел с угловыми вырезами полученные решения являются асимптотическими зависимостями для малых радиусов закругления их вершин. Такие соотношения можно использовать в граничных переходах для получения коэффициентов интенсивности напряжений в острых вершинах на основе решений для соответствующих закругленных вырезом.

SUMMARY. The solution of the elastostatic problem for an infinite plane with a rounded V-notch under antisymmetric load is obtained by the singular integral equation method. On this basis, the relationships between the stress intensity factor at the sharp notch vertex, the maximum

stress on the boundary contour or the stress gradient at the vertex of the corresponding rounded V-notch and notch vertex radius are found. It is shown that such dependences are ambiguous: for the same curvature at the notch vertex they are significantly different for the various forms of its neighborhoods. For finite bodies with angular notches the obtained solutions are asymptotic dependences for small radii of notch vertices that can be used when passing to the limit to determine the stress intensity factors at the sharp V-notches on the basis of the solutions for the corresponding rounded V-notches.

1. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Materials Science*. – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
2. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, № 2. – P. 182–196.)
3. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоска періодична крайова задача теорії пружності для півплощини з криволінійним краєм // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 4. – С. 5–12.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A plane periodic boundary-value problem of elasticity theory for a half-plane with curvilinear edge // *Materials Science*. – 2008. – **44**, № 4. – P. 461–470.)
4. *Саврук М. П., Казберук А.* Проблеми механіки руйнування твердих тіл з кутовими вирізами // Там же. – 2009. – **45**, № 2. – С. 23–39.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Problems of fracture mechanics of solid bodies with V-shaped notches // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 2. – P. 162–180.)
5. *Саврук М. П., Казберук А.* Напруження у пружній площині з періодичною системою близько розміщених отворів // Там же. – 2009. – **45**, № 6. – С. 70–81.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stresses in an elastic plane with periodic system of closely located holes // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 6. – P. 831–844.)
6. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
7. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* – 1952. – **19**, № 4. – P. 526–530.
8. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
9. *Benthem J. P.* Stresses in the region of rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
10. *Seweryn A. and Molski K.* Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions // *Eng. Fract. Mech.* – 1996. – **55**, № 4. – P. 529–556.
11. *Seweryn A.* Metody numeryczne w mechanice pękania. – Warszawa: IPPT PAN, 2003. – 361 s.
12. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
13. *Broberg K. B.* Cracks and Fracture. – San Diego: Academic Press, 1999. – 752 p.
14. *Barber J. R.* Elasticity. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 410 p.
15. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
16. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
17. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
18. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. под ред. В. В. Панасюка – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.
19. *Kazberuk A., Niedźwiedź M.* Wpływ kształtu karbu na rozkład naprężeń na jego krawędzi // *Acta Mech. Autom.* – 2009. – **3**, № 1. – S. 38–41.

Одержано 22.06.2010