

УДК 678.4.66:621.81

Васько В.М., магістр,
Гребенюк С.Н., канд. техн. наук,
Решевская Е.С., канд. техн. наук, доцент
(ЗНУ),
Дорохов М.А., аспірант
(ИФНТУНГ),
Агальцов Г.Н., інженер,
(ИГТМ НАН України)

РАСЧЁТ ЭЛАСТОМЕРНОЙ МАНЖЕТЫ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Васько В.М., магістр,
Гребенюк С.М., канд. техн. наук,
Решевська К.С., канд. техн. наук, доцент
(ЗНУ),
Дорохов М.А., аспірант
(ИФНТУНГ),
Агальцов Г.М., інженер
(ИГТМ НАН України)

РОЗРАХУНОК ЕЛАСТОМЕРНОЇ МАНЖЕТИ В УМОВАХ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

Vasko V.M., M.S. (Tech.),
Grebenuk S.N., Ph. D. (Tech.),
Reshevskaya K.S., Ph. D. (Tech.), Associate Professor
(ZNU),
Dorokhov M.A., Doctoral Student
(IFNUOG),
Agaltsov G.N., M.S (Tech.)
(IGTM NAS of Ukraine)

CALCULATION OF ELASTOMERIC COLLAR IN TERMS OF NONLINEAR DEFORMING

Аннотация. Рассмотрен метод определения напряжённно-деформированного состояния резиновых уплотнений пакеров манжетного типа. Наличие больших перемещений и деформаций в процессе эксплуатации конструкций из эластомеров требует учёта геометрической нелинейности. В статье нелинейная задача сведена к последовательности решения линейной задачи при помощи шаговых итерационных алгоритмов. Предложен конечно-элементный подход решения трёхмерной задачи с учётом геометрической нелинейности. Подход заключается в последовательном решении ряда линейных задач с пересчётом на каждом шаге матрицы жёсткости всей конструкции. Приведён пример численного решения задачи о деформировании эластомерной манжеты в трёхмерной постановке. В результате решения получены компоненты напряжённно-деформированного состояния резинового уплотнения пакера манжетного типа с учётом больших деформаций, возникающих в процессе проверки герметизационной способности нефтяных и газовых скважин.

Ключевые слова: напряжённно-деформированное состояние, нелинейность, резина, пакер манжетного типа, манжета

Исследование напряжённно-деформированного состояния резиновых уплотнений пакеров манжетного типа (далее – манжет) является непростой задачей в связи с возникновением больших напряжений и, соответственно, деформаций. Наличие больших перемещений и деформаций в процессе эксплуатации конструкций из эластомеров требует учёта геометрической нелинейности. Нелинейные задачи обычно сводятся к последовательности решения линейных задач при помощи так называемых шаговых итерационных алгоритмов. Среди них можно выделить метод упругих решений [1], последовательных нагружений (метод спуска по параметру) [2], Ньютона (Ньютона–Рафсона), Ньютона–Канторовича [3] и его модификации.

Существует в основном два способа учёта геометрической нелинейности.

Первый способ позволяет учитывать геометрическую нелинейность при составлении потенциальной энергии для каждого конечного элемента, используя нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями. Результат получается вследствие численного поиска минимума потенциальной энергии для совокупности конечных элементов и последующего решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Второй способ даёт возможность учитывать геометрическую нелинейность последовательным решением ряда линейных задач с пересчётом на каждом шаге матрицы жёсткости всей конструкции.

Как показывают численные эксперименты, применительно к расчёту конструкций из эластомеров наиболее эффективны инкрементальные методы, основанные на анализе поведения конструкций для последовательности достаточно малых приращений нагрузок. При этом на каждом шаге приращения нагрузки вычисляются приращения перемещений и компонент деформаций, новое положение деформированной поверхности и суммарные величины, необходимые для следующего шага нагружения.

Рассмотрим конечно-элементный подход решения нелинейной трёхмерной задачи на основе модифицированного метода Ньютона–Канторовича.

Кратко изложим пошаговую последовательность действий на основе метода Ньютона–Канторовича в сочетании с методом интегрирования со значением нагрузки, принятым в качестве параметра спуска [3].

1. По известным значениям вектора перемещений $\{u_i^{(n-1)}\}$, компонент тензора напряжений $\{\sigma_{ij}^{(n-1)}\}$, координат узлов сеточной области $\{x_i^{(n-1)}\}$ конструкции вычисляем матрицу жёсткости линеаризованной системы $[F_{(n)}^*]$ на n -ом шаге нагружения. Для первого шага вектор перемещений и компоненты тензора напряжений принимаются нулевыми.

2. Текущее значение нагрузки определяем по формуле

$$P_{(n)} = P_{(n-1)} + \Delta P_{(n)}. \quad (1)$$

На первом шаге алгоритма, при $n = 1$, его работа продолжается с пункта 4.3, где вектор узловых невязок $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ принимаем равным вектору узловых нагрузок $\{P_{(n)}^{(k)}\}$.

3. Начальное приближение искомого решения $\{\Delta u_{(n)}^{(1)}\}$ находим, используя экстраполяционную формулу вида:

$$\{u_{(n)}^{(1)}\} = \{u_{(n-1)}\} \frac{\Delta P_{(n)}}{\Delta P_{(n-1)}}. \quad (2)$$

4. Реализация итерационного подхода решения задачи упругости.

4.1. Приближённое значение $\{u_{(n)}^{(k)}\}$ подставляем в уравнение, определяющее тензор напряжений:

$$\sigma^{ij} = \lambda \theta g^{ij} + 2\mu g^{mi} g^{nj} \varepsilon_{mn},$$

где $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j} + u_{m',i} u_j^{m'})$.

Определяем вектор узловых невязок $\{R_{(n)}^{(k)}\}$. При этом его численной характеристикой, которая позволяет судить о сходимости получаемых решений, является сумма квадратов компонент узловых невязок $\{R_{(n)}^{*(k)}\}$.

4.2. Анализируем значение вектора узловых невязок $\{R_{(n)}^{(k)}\}$. При резком увеличении вектора невязок $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ итерационный процесс прерывается и происходит уменьшение шага по нагрузке, а работа начинается с пункта 2. Если сходимость итерационного процесса сильно замедляется, то выполняются аналогичные действия.

Условие, при котором считается, что вектор перемещений $\{u_{(n)}^{(k)}\}$ удовлетворяет исходным уравнением с заданной степенью точности ε , имеет вид:

$$\{R_{(n)}^{*(k)}\} < \{P_{(n)}^{*}\} \varepsilon. \quad (3)$$

Если условие (3) выполняется, то алгоритм продолжает свою работу с пункта 5. Если это условие не выполняется, то алгоритм переходит к выполнению следующего пункта 4.3.

4.3. Вектор невязок $\{R_{(n)}^{(k)}\}$ принимаем за дополнительную нагрузку и подставляем в правую часть линеаризованной системы уравнений.

4.4. Находим вектор перемещений $\{\Delta u_{(n)}^{(k)}\}$, решая систему линеаризованных уравнений, затем суммируем его с вектором $\{u_{(n)}^{(k)}\}$:

$$\{u_{(n)}^{(k+1)}\} = \{u_{(n)}^{(k)}\} + \{\Delta u_{(n)}^{(k)}\}. \quad (4)$$

4.5. Увеличиваем итерационную переменную $k := k+1$ и начинаем выполнение с пункта 4.1.

5. Пересчитываем напряжённо-деформированное состояние заданного эластомерного образца и координаты узлов сеточной области по формулам

$$\{\varepsilon_{ij}^{(n)}\} = \{\varepsilon_{ij}^{(n-1)}\} + \{\Delta \varepsilon_{ij}^{(n)}\}; \quad (5)$$

$$\{\sigma_{ij}^{(n)}\} = \{\sigma_{ij}^{(n-1)}\} + \{\Delta \sigma_{ij}^{(n)}\}; \quad (6)$$

$$\{z_i^{(n)}\} = \{z_i^{(n-1)}\} + \{u_i^{(n)}\}. \quad (7)$$

6. Выполняем проверку: достиг ли параметр спуска заданного (максимального) значения

$$P_{(n)} = P_{\max}. \quad (8)$$

Если условие (8) выполнено, то процесс завершает свою работу.

Численный расчёт эластомерной манжеты с учётом геометрической нелинейности. Для определения напряжённо-деформированного состояния эластомерной манжеты воспользуемся описанным выше итерационным процессом.

Размеры манжеты и условия закрепления приведены на рисунок 1 – рис. 2. Соответствующая конечно-элементная модель приведена на рис. 3. Упругие характеристики: $G = 2,425$ МПа, $\nu = 0,4999$. Нагрузка задана на гранях SG , FG и ED , величина которой варьировалась до $p = 40$ МПа.

В результате численного расчёта были получены распределения величин перемещений, деформаций и напряжений эластомерной манжеты в условиях нелинейного деформирования.

Распределения полей напряжений и перемещений в осевом на-

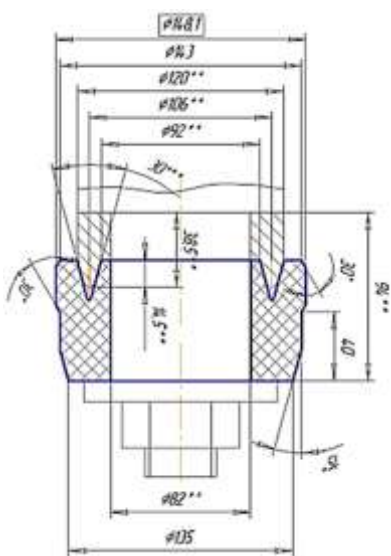


Рисунок 1 – Размеры манжеты 168×10,6

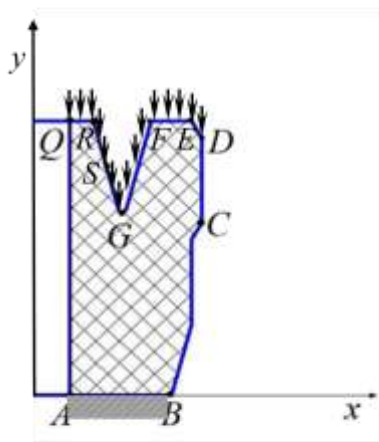


Рисунок 2 – Расчётная схема манжеты

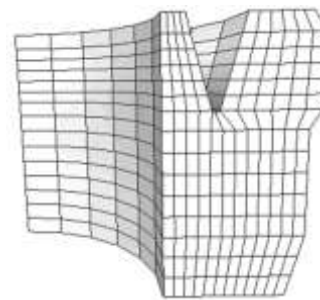
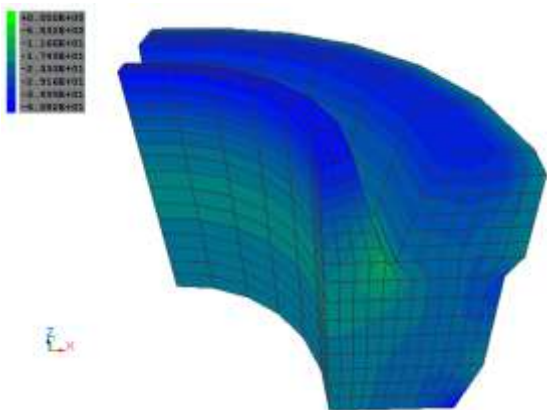
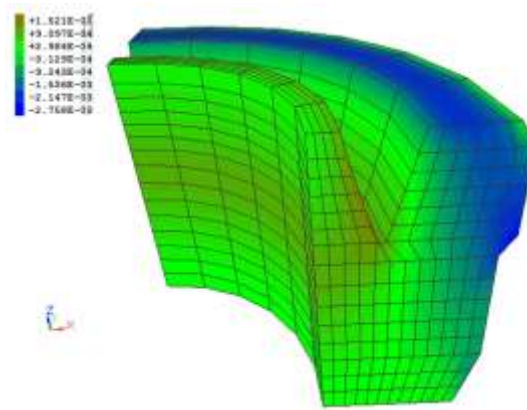
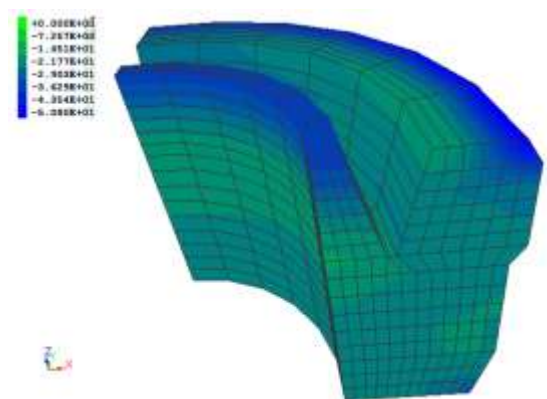
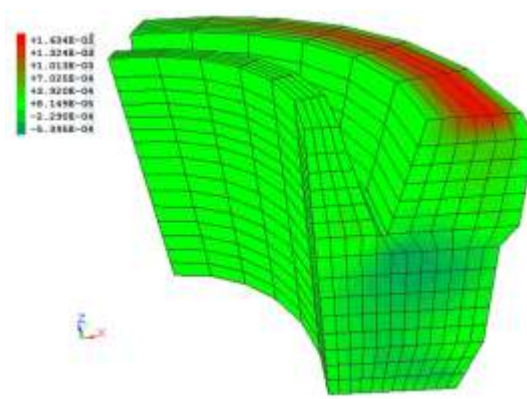


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель манжеты 168×10,6

Рисунок 4 – Распределение поля напряжений в осевом направлении (σ_{33})Рисунок 5 – Распределение величины перемещений в осевом направлении (u_3)Рисунок 6 – Распределение поля напряжений в радиальном направлении (σ_{11})Рисунок 7 – Распределение величин перемещений в радиальном направлении (u_1)

правления представлены на рис. 4, рис. 5. Величина максимальных сжимающих напряжений в осевом направлении приблизительно равна 41 МПа. Данные значения напряжений фиксируются на поверхности манжеты в местах приложения распределённой нагрузки.

Распределения полей напряжений и перемещений в радиальном направлении представлены на рис. 6 – рис. 7. Можно отметить, что величина наибольших сжимающих напряжений в радиальном направлении приблизительно равна 51 МПа нагрузки (рис. 6). Данные значения напряжений фиксируются на малой боковой поверхности манжеты (по поверхности отрезка ED на рис. 2) и на малой верхней поверхности манжеты (по поверхности отрезка QR на рис. 2).

Выводы. Таким образом, в статье описан конечно-элементный подход для решения трёхмерной задачи с учётом геометрической нелинейности. Данный подход применён для расчёта и анализа напряжённо-деформированного состояния эластомерной манжеты с учётом условий эксплуатации. Полученные значения полей напряжений и деформаций манжеты соизмеримы с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин, А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. Давыденко, Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений /

Д.Ф. Давыденко // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 83, № 4. – С. 601–602.

3. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 695 с.

4. Киричевский, В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В.В. Киричевский. – К.: Наук. думка, 2003. – 655 с.

5. Marvalova, B. Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modelling / B. Marvalova // Engineering Mechanics. – 2007. – Vol. 14, No. 1/2. – P. 81-89.

REFERENCES

1. Yl'yushyn, A.A. (1963), *Plastychnost'. Osnovy obshchey matematycheskoy teoryy* [Plasticity. Fundamentals of general mathematical theory], USSR Academy of Sciences Publishing, Moscow, USSR.

2. Davydenko, D.F. (1953), "About the one new method for numerical solving systems of nonlinear equations", *Reports of the USSR Academy of Sciences*, vol. 83, no. 4, pp. 601-602.

3. Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. (1962), *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis], *Fizmatgiz*, Moscow, USSR.

4. Kirichevskiy, V.V. (2003), *Metod konechnykh elementov v mekhanike elastomerov* [Finite element method in mechanics of elastomers], *Naukova dumka*, Kiev, Ukraine.

5. Marvalova, B. (2007), "Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modelling", *Engineering Mechanics*, vol. 14, no. 1/2, pp. 81-89.

Об авторах

Васько Виктория Михайловна, магистр, преподаватель кафедры математического моделирования Запорожского национального университета (ЗНУ), Запорожье, Украина, mf@znu.edu.ua

Гребенюк Сергей Николаевич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой математического анализа Запорожского национального университета (ЗНУ), Запорожье, Украина, mf@znu.edu.ua

Решевская Екатерина Сергеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий Запорожского национального университета (ЗНУ), Запорожье, Украина, mf@znu.edu.ua

Дорохов Максим Анатольевич, аспирант кафедры нефтегазового оборудования Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа (ИФНТУНГ), Ивано-Франковск, Украина, maximpu.5@gmail.com

Агальцов Геннадий Николаевич, инженер, младший научный сотрудник отдела механики эластомерных конструкций горных машин, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова Национальной академии наук Украины (ИГТМ НАНУ), Днепропетровск, Украина, ag.gena@gmail.com

About the authors

Vas'ko Viktoriya Mikhaylovna, Master of Science, Teacher of the Department of Mathematical Modelling in Zaporizhzhya National University (ZNU), Zaporizhzhya, Ukraine, mf@znu.edu.ua

Grebenyuk Sergey Nikolayevich, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Head of the Department of Mathematical Analysis in Zaporizhzhya National University (ZNU), Zaporizhzhya, Ukraine, mf@znu.edu.ua

Reshevskaya Yekaterina Sergeevna, Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Associate Professor of Information Technologies in Zaporizhzhya National University (ZNU), Zaporizhzhya, Ukraine, mf@znu.edu.ua

Dorokhov Maksim Anatol'yevich, Master of Science, Doctoral Student of the Department Oil and Gas Equipment in Ivano-Frankovsk National Technical University of Oil and Gas (IFNUOG), Ivano-Frankovsk, Ukraine, maximpu.5@gmail.com

Agaltsov Gennady Nikolaevich, Master of Science, Junior Researcher of Department of Elastomeric Component Mechanics in Mining Machines, M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics under the National Academy of Science of Ukraine (IGTM, NASU), Dnepropetrovsk, Ukraine, ag.gena@gmail.com

Анотація. Розглянутий метод визначення напружено-деформованого стану гумових ущільнень пакерів манжетного типу. Наявність великих переміщень і деформацій у процесі експлуатації конструкцій з еластомерів вимагає урахування геометричної нелінійності. У статті нелінійна задача зведена до послідовності розв'язків лінійної задачі за допомогою крокових ітераційних алгоритмів. Запропонований кінцево-елементний підхід розв'язання тривимірної задачі з урахуванням геометричної нелінійності. Підхід полягає в послідовному розв'язанні ряду лінійних задач із перерахуванням на

кожному кроці матриці жорсткості всієї конструкції. Наведений приклад чисельного розв'язання задачі про деформування еластомерної манжети в тривимірній постановці. У результаті розв'язання отримані компоненти напружено-деформованого стану гумового ущільнення пакеру манжетного типу з урахуванням великих деформацій, що виникають у процесі перевірки герметизаційної здатності нафтових і газових свердловин.

Ключові слова: напружено-деформований стан, нелінійність, гума, пакер манжетного типу, манжета

Abstract. A method for determine stress-strain state of the rubber collar-type packer is considered. Availability of large displacements and deformations in the course of elastomer structures using requires taking into account geometric nonlinearity. A problem of nonlinearity is reduced to a sequence of the linear problem solving by using incremental-iterative algorithms. A finite element approach for solving the three-dimensional problem with taking into account geometric nonlinearity is proposed. The approach assumes sequential solving of a number of linear problems with recalculating a stiffness matrix of the whole structure at each step. An example of a 3D numerical solution of the problem of the elastomer collar deformation is shown. With the help of the approach components of stress-strain state of the rubber collar-type packer have been specified with taking into account large deformations occurred in the process of testing pressurization capacity of the oil and gas wells .

Keywords: stress-strain state, nonlinearity, rubber, collar-type packer, collar

Статья поступила в редакцию 24.04.2015

Рекомендовано к печати д-ром техн. наук, профессором В.И. Дырдой